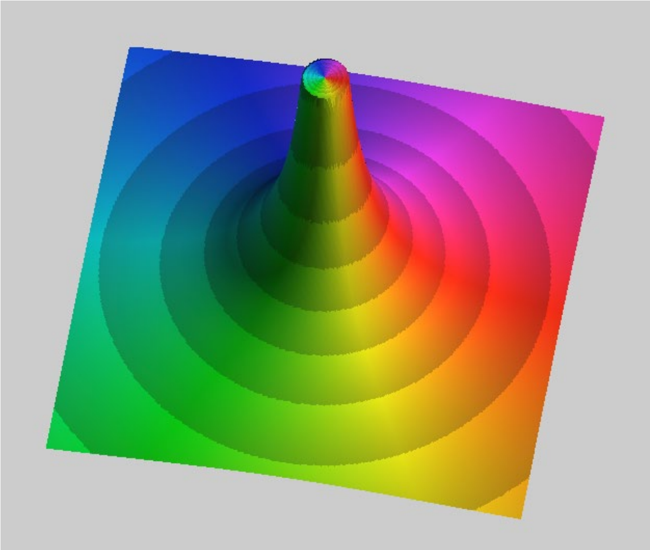
3 - Póly, nuly a odezvy

Michael Šebek
Automatické řízení 2019

21.02.2019

Póly přenosu

- jsou kořeny jmenovatele přenosu $$g(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$
- jsou to komplexní čísla $s_i : a(s_i) = 0$
- pokud přenos nemá stejnou nulu, tak $g(s_i) = \infty$
- odpovídají módům přirozené odezvy, tj. dají se vybudit vstupním signálem
- patří mezi póly systému



Póly přenosu $\subseteq$ Póly systému

Póly systému

- vlastní čísla $\lambda_i(\mathbf{A})$ matice systému ve stavovém popisu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

- kořeny charakteristického polynomu (společného jmenovatele všech přenosů)

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

- charakterizují vnitřní dynamiku systému, jeho vnitřní rezonance
- jsou rovny komplexním frekvencím, které je systém schopen sám generovat (jsou to módy odezvy na jeho počáteční stav)
- nezávisí na vstupní matici **B** ani na výstupní matici **C** tedy nezávisí na umístění aktuátorů a senzorů (v otevřené smyčce)

Nuly přenosu

Nuly přenosu (přenosové nuly) jsou

- kořeny jeho čitatele
- pro $g(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ jsou to komplexní čísla $s_i : b(s_i) = 0$

Význam pro řízení

- nuly přenosu jsou komplexní frekvence,
  pro které je přenos mezi vstupem a výstupem blokován
- mění odezvu a tím komplikují návrh řízení (viz dále)

Nuly systému

- jsou nuly přenosu $b(s)/a(s)$ „před vykrácením“

Schurův doplněk

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} = \frac{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\det\left(\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right)}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} = \frac{\det\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}$$

- oproti nulám přenosovým tu mohou být navíc
  - vstupní nuly
    (rovné pólům neřiditelné části), tj. $z_i : \operatorname{rank}\begin{bmatrix} z_i\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix} < n$
  - výstupní nuly (rovné pólům
    nepozorovatelné části), tj. $z_i : \operatorname{rank}\begin{bmatrix} z_i\mathbf{I}-\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\end{bmatrix} < n$

Význam pro řízení

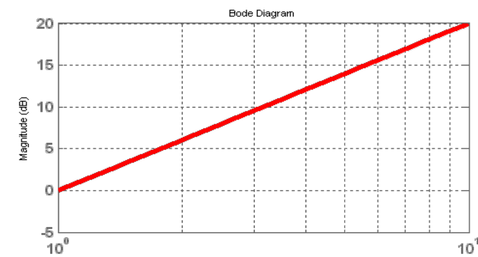
- nuly systému charakterizují, jak je systém spojen s okolím
- závisí na $\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ tedy na poloze senzorů a aktuátorů
- nestabilní nuly ztěžují nebo znemožňují řízení,
  někdy je dokonce nutno soustavu „předělat“

Póly a nuly v nekonečnu

Pól v nekonečnu má neryzí racionální funkce

- která má stupeň čitatele ostře větší než stupeň jmenovatele
- Např.

$$G(s) = s = \frac{s}{1} \qquad \lim_{s\to\infty} G(s) = \infty$$

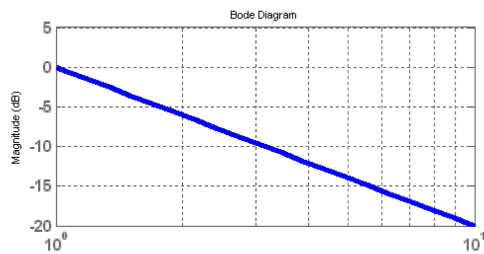


- Takový systém nemůže samostatně existovat, jen zapojení s jinými - zesiloval by i nekonečné frekvence

Nulu v nekonečnu má striktně ryzí racionální funkce

- která má stupeň čitatele ostře menší než stupeň jmenovatele
- Např.

$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad \lim_{s\to\infty} G(s) = 0$$



- takové jsou všechny fyzikální systémy, blokují nekonečné frekvence
- Počítáme-li s násobnostmi a nekonečnými nulami a póly, má každý přenos stejný počet nul a pólů

Vliv další pólů na odezvu

Odezvy systémů 1. a 2. řádu bez nul jste probírali v kurzu SAS,
zopakujte si je i s příslušnými vzorečky z doplňkových slajdů
Vzorečky mějte vždy po ruce, budeme je často používat při návrhu,
k určení požadované polohy pólů
Některé z nich nejsou přesné, výsledek vždy ověřte simulací

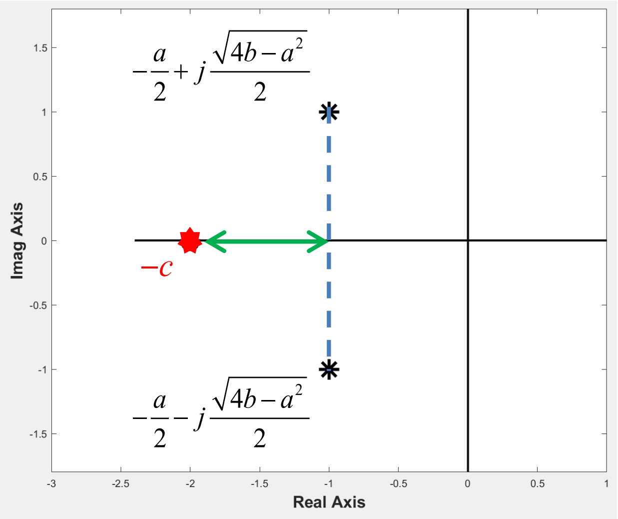
Pro systémy řádu 3. a vyšších jsou odezvy složitější
a žádné vzorečky nemáme
Přesto se i tak používají pro zjednodušení používají vzorečky
pro 1. a 2. řádu někdy oprávněně, jindy ne (viz dále)

Tím spíše vždy ověřte výsledek simulací a experimentálně!

Dominantní póly

- Systém s dvojicí komplexních a ještě třetím reálným pólem má odezvu na skok

$$y(s)=\frac{bc}{s\left(s^2+as+b\right)\left(s+c\right)}$$
$$=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+as+b}+\frac{D}{s+c}$$



- kde

$$A=1,\quad B=\frac{-c^2+ca}{c^2+b-ca},\quad C=\frac{-c^2a+ca^2-bc}{c^2+b-ca}$$

$$D=\frac{-b}{c^2+b-ca}$$

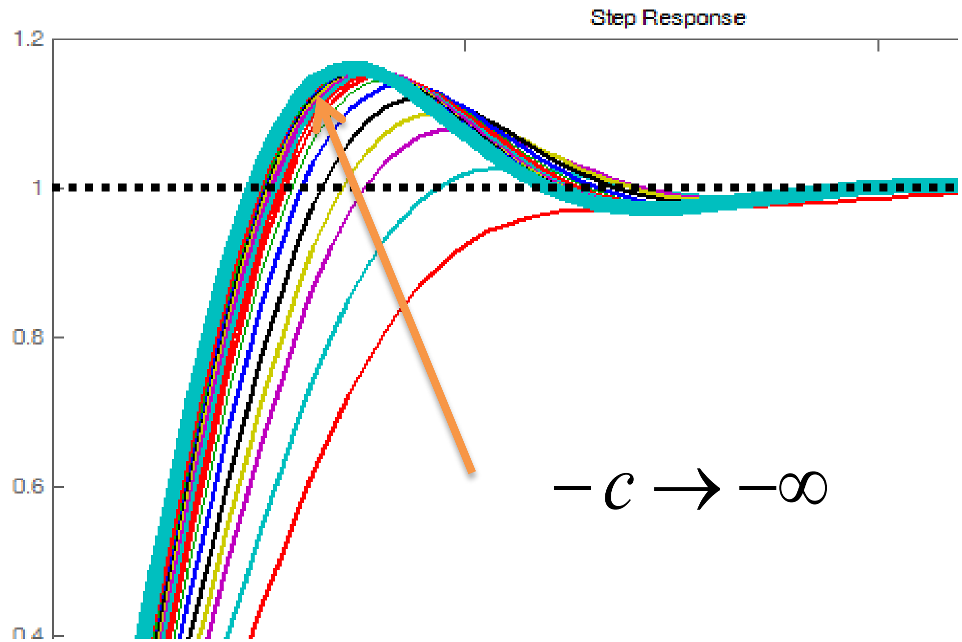
- O vlivu třetího pólu na odezve zřejmě rozhoduje poslední člen
- Je-li přidaný pól hodně nalevo od původní dvojice

$$\lim_{-c\to-\infty}A=1\neq 0,\ \lim_{-c\to-\infty}B=-1\neq 0,\ \lim_{-c\to-\infty}C=-a\neq 0\qquad \lim_{-c\to-\infty}D=0$$

- má na odezvu zanedbatelný vliv! Pak říkáme, že je dvojice dominantní

Vliv dalších pólů

- Je-li reálný pól blízko dvojice, jeho vliv na odezvu je podstatný a zanedbat ho nemůžeme!
- Jak „daleko“?



Pravidlo 5 (Pravidlo 10):

- Třetí pól zanedbáme, je-li aspoň 5x (10x) dál nalevo od imaginární osy než reálná část dominantní dvojice.
- Vždy ověříme simulací!

Vliv přidané stabilní nuly na odezvu

- Přidáme k systému s přenosem $g(s)$ a odezvou $y(s)$ nulu v $-a$, což změní přenos na $(1+s/a)g(s)$ a odezvu na $(1+s/a)y(s)$
- Odezva nového systému bude složená z původní a násobku její derivace

$$\bar{y}(s)=(1+s/a)y(s)=y(s)+\left(s/a\right)y(s)$$

- Je-li nula „hodně“ stabilní (tj. a je velké kladné), má člen s derivací $\left(s/a\right)y(s)$ zanedbatelný vliv a odezva se skoro nezmění
- Je-li to nula stabilní „méně“ (tj. a menší kladné), je vliv derivace významný!
- Skoková odezva má typicky na počátku derivaci kladnou, tedy člen s derivací se přičte a způsobí větší první překmit
- Bude-li nula nestabilní (záporné a), má derivace opačné znaménko a odezva je zpočátku dokonce obrácená
- Nuly neovlivňují typ módů, ale jejich relativní vliv, neboť v rozkladu na parciální zlomky ovlivňují jen čitatele (rezidua)