3 - Póly, nuly a odezvy

Michael Šebek

Automatické řízení 2018

Póly přenosu a póly systému

Póly přenosu

- jsou kořeny jmenovatele
- pro $g(s)=b(s)/a(s)$ jsou to komplexní čísla $s_i : a(s_i)=0$
- pokud přenos nemá stejnou nulu $g(s_i)=\infty$
- odpovídají módům přirozené odezvy
- patří mezi póly systému

Póly přenosu $\subseteq$ Póly systému

Póly systému

- kořeny charakteristického polynomu (společného jmenovatele všech přenosů)

  $$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$$
- vlastní čísla matice systému ve stavovém popisu $\lambda_i(\mathbf{A})$
- charakterizují vnitřní dynamiku systému, jeho vnitřní rezonance
- jsou rovny komplexním frekvencím, které je systém schopen sám generovat (módy odezvy na jeho počáteční stav)
- nezávisí na vstupní matici **B** ani na výstupní matici **C**
- tedy nezávisí na umístění aktuátorů a senzorů (v otevřené smyčce)

Nuly přenosu

Nuly přenosu (přenosové nuly) jsou

- kořeny jeho čitatele
- pro $g(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ jsou to komplexní čísla $s_i : b(s_i) = 0$

Význam pro řízení

- nuly přenosu jsou komplexní frekvence,
  pro které je přenos mezi vstupem a výstupem blokován
- mění odezvu a tím komplikují návrh řízení (viz dále)

Nuly systému

- jsou nuly přenosu $b(s)/a(s)$ „před vykrácením“

Schurův doplněk

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} = \frac{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\det\left(\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right)}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} = \frac{\det\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}$$

- oproti nulám přenosovým tu mohou být navíc
    - vstupní nuly
      (rovné pólům neřiditelné části), tj. $z_i : \operatorname{rank}\begin{bmatrix} z_i\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix} < n$
    - výstupní nuly (rovné pólům nepozorovatelné části), tj. $z_i : \operatorname{rank}\begin{bmatrix} z_i\mathbf{I}-\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\end{bmatrix} < n$

Význam pro řízení

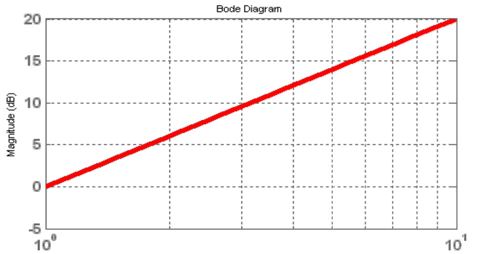
- nuly systému charakterizují, jak je systém spojen s okolím
- závisí na $\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ tedy na poloze senzorů a aktuátorů
- nestabilní nuly ztěžují nebo znemožňují řízení,
  někdy je dokonce nutno soustavu „předělat“

Póly a nuly v nekonečnu

Pól v nekonečnu má neryzí racionální funkce

- která má stupeň čitatele ostře větší než stupeň jmenovatele
- Např.

$$G(s) = s = \frac{s}{1} \qquad \lim_{s\to\infty} G(s) = \infty$$

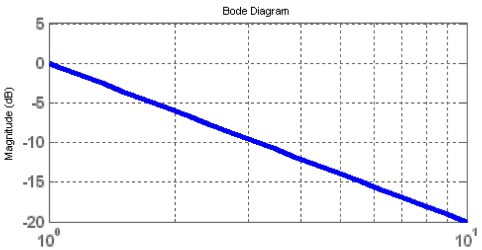


- Takový systém nemůže samostatně existovat, jen zapojení s jinými - zesiloval by i nekonečné frekvence

Nulu v nekonečnu má striktně ryzí racionální funkce

- která má stupeň čitatele ostře menší než stupeň jmenovatele
- Např.

$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad \lim_{s\to\infty} G(s) = 0$$



- takové jsou všechny fyzikální systémy, blokují nekonečné frekvence
- Počítáme-li s násobnostmi a nekonečnými nulami a póly, má každý přenos stejný počet nul a pólů

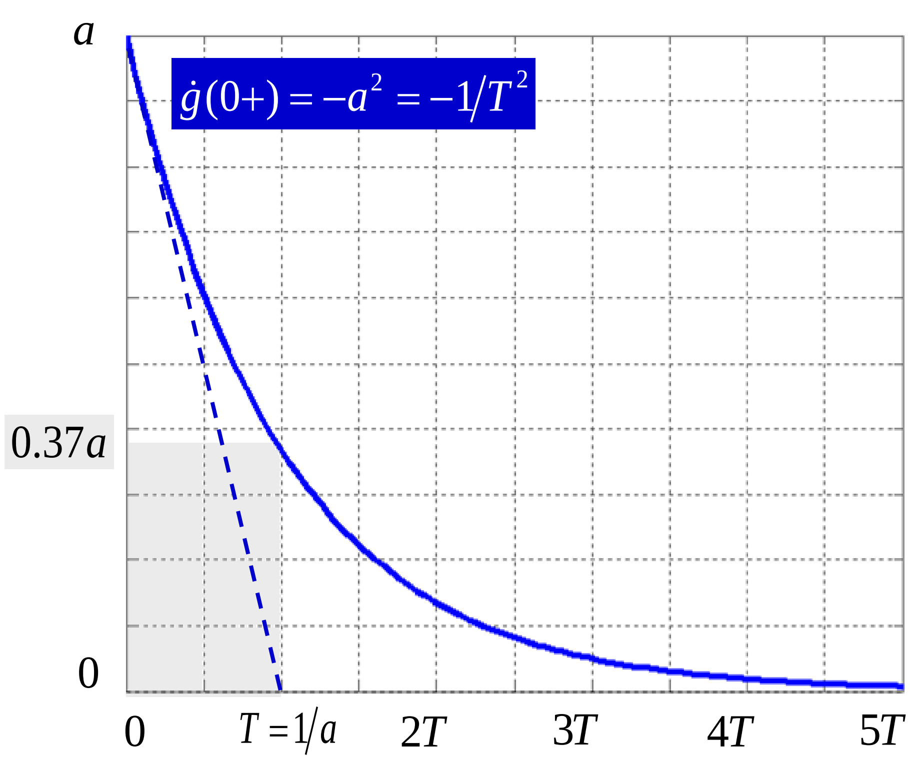
Systém 1. řádu bez nul

$$G(s) = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{1+Ts}$$

Impulzní odezva

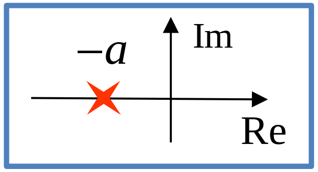
(impulzní charakteristika)

$$g(t) = ae^{-at} = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

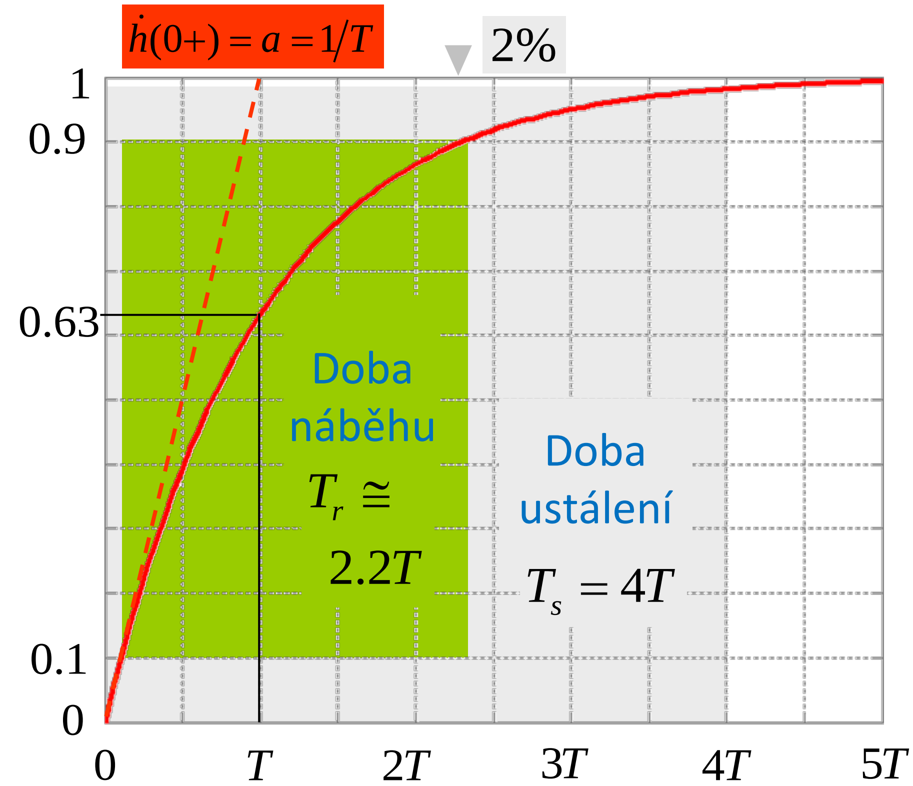


Skoková odezva

(přechodová charakteristika)



$$h(t) = 1 - e^{-at} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

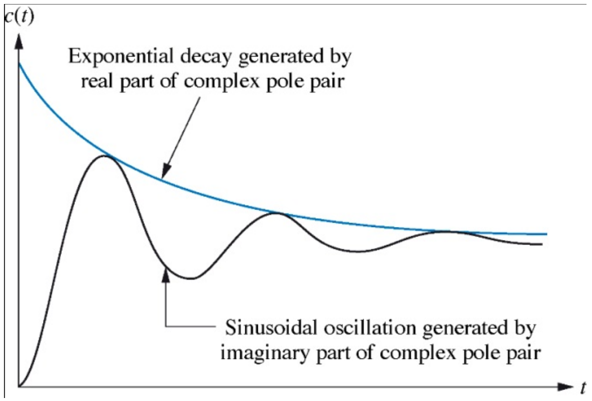


Systém 2. řádu bez nul (stabilní) $G(s) = \dfrac{b}{s^2 + as + b}$ $\quad a \geq 0,\ b > 0$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

Tradičně označujeme

- přirozenou frekvenci (natural frequency) oscilací netlumeného systému $\omega_n = \sqrt{b}$

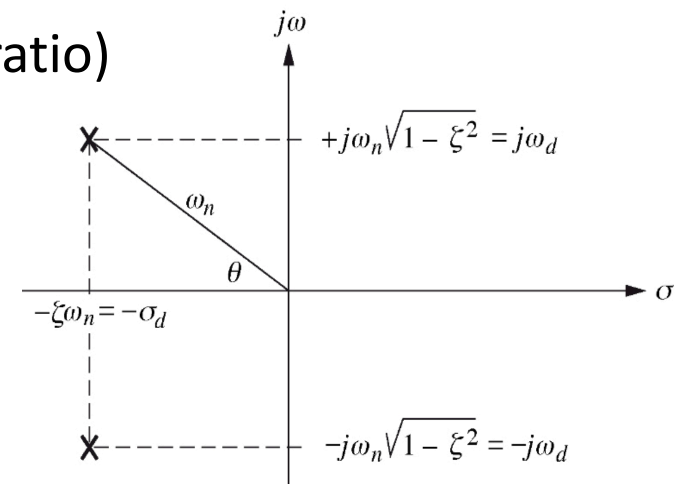


- frekvenci exponenciálního útlumu (exponential decay frequency) $\sigma = a/2$

  obálka $1 \pm e^{-\sigma t}$

- poměrný útlum, relativní tlumení (damping ratio)

$$\zeta = \frac{a}{a_c} = \frac{a}{2\sqrt{b}} = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{1}{2\pi}\frac{T_n}{T_\sigma} = \frac{a/2}{\omega_n} = \cos\theta$$



- frekvenci tlumených oscilací (damped frequency)

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{b}\sqrt{1-(a/(2\sqrt{b}))^2}$$

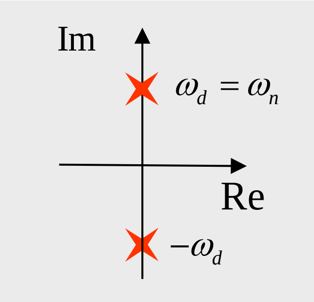
Systém 2. řádu bez nul - zajímavé případy

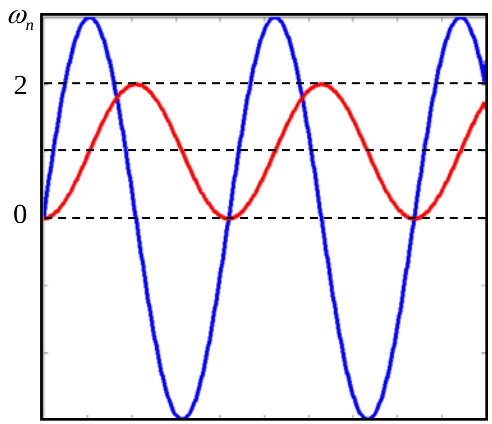
Netlumený systém $\sigma = 0, \omega_n = \omega_d, \zeta = 0$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$g(t) = \omega_n \sin \omega_n t$$

$$h(t) = 1 - \cos \omega_n t$$



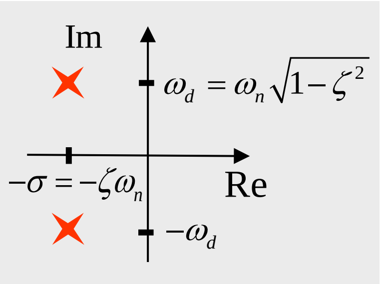


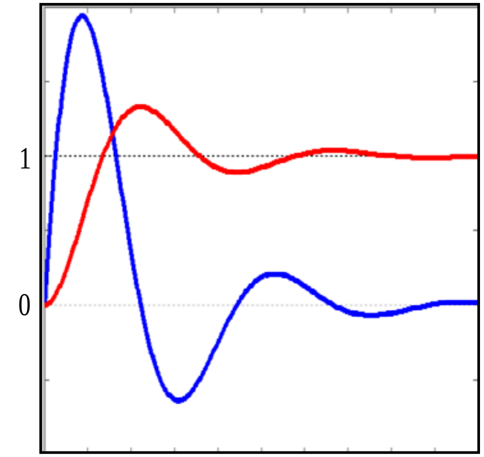
Podtlumený systém $|\zeta| < 1, \sigma = \zeta\omega_n, \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\sigma - j\omega_d)(s+\sigma + j\omega_d)}$$

$$g(t) = (\omega_n^2/\omega_d)e^{-\sigma t} \sin \omega_d t$$

$$h(t) = 1 - e^{-\sigma t}\left[\cos \omega_d t + (\sigma/\omega_d)\sin \omega_d t\right]$$





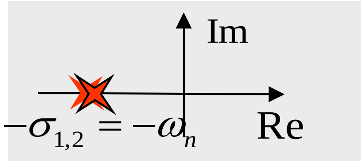
Systém 2. řádu bez nul - zajímavé případy

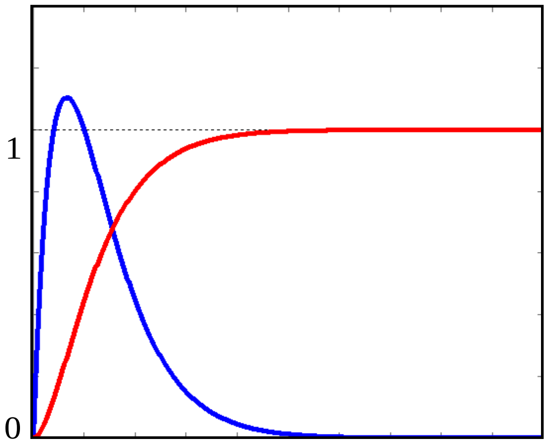
Kriticky tlumený systém $\zeta = 1, \sigma_{1,2} = \omega_n, \omega_d = 0$

$$\boxed{G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}}$$

$$g(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

$$h(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$





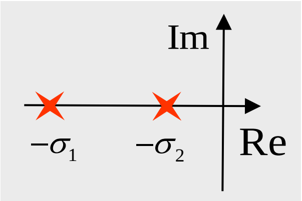
Přetlumený systém $|\zeta| \geq 1:$

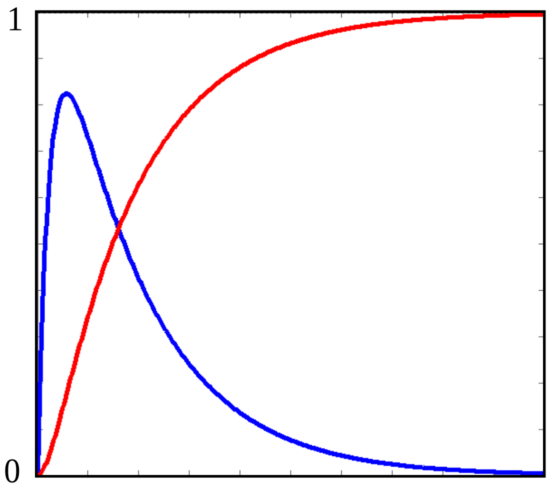
$$\sigma_1 = \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$
$$\sigma_2 = \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)} \end{aligned}}$$

$$g(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(e^{-\sigma_2 t} - e^{-\sigma_1 t}\right)$$

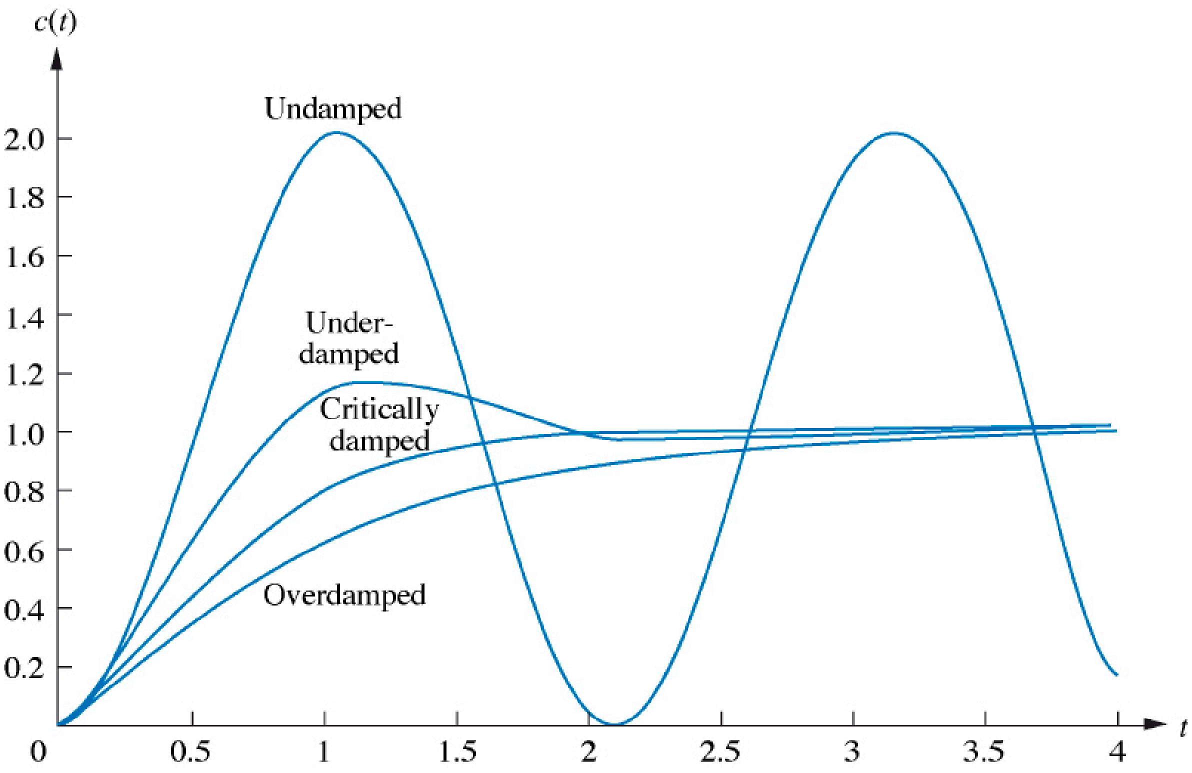
$$h(t) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_2 e^{-\sigma_1 t} - \sigma_1 e^{-\sigma_2 t}}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

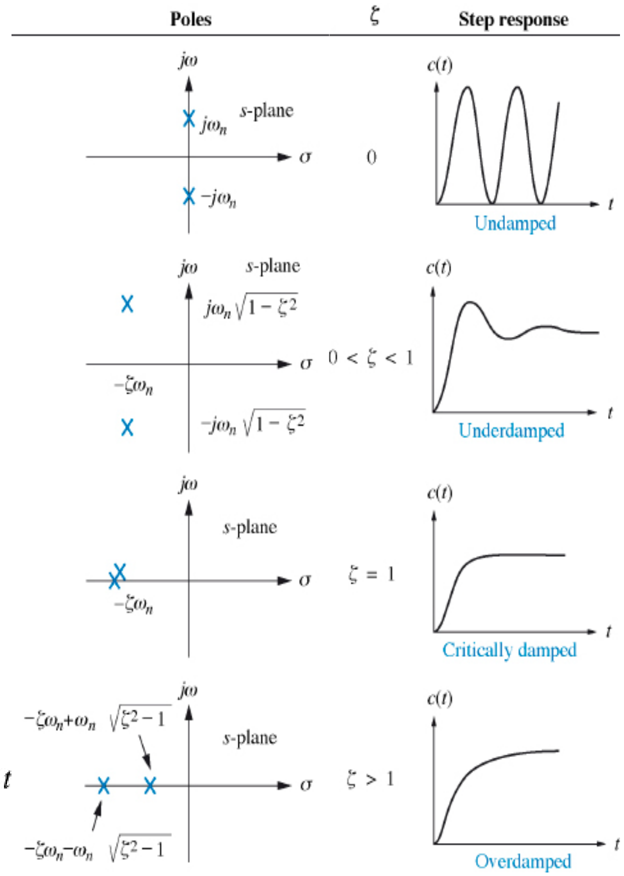




Systém 2. řádu

Všechny případy v jednom obrázku





Avšak pozor: Je to přesně tak jen když systém nemá nuly!

Systém 2. řádu: vzorce pro podtlumený případ

Doba ustálení (settling time)

$$T_s \doteq \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

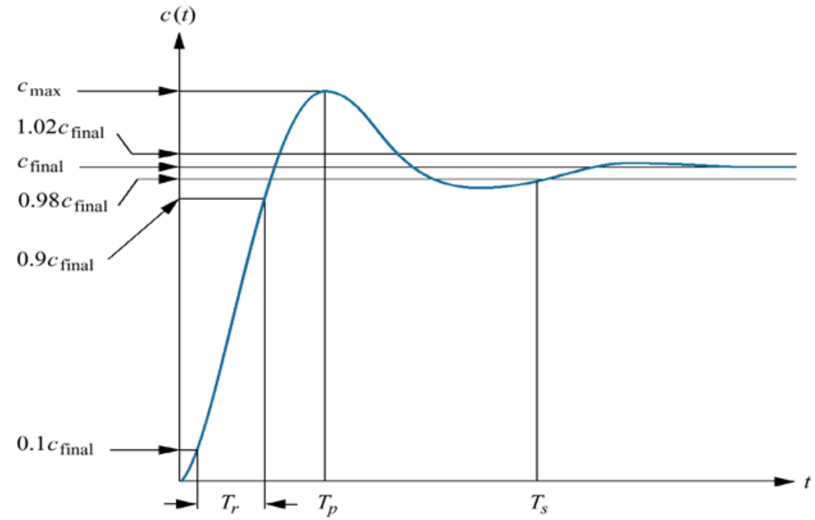
Doba 1. maxima (peak time)

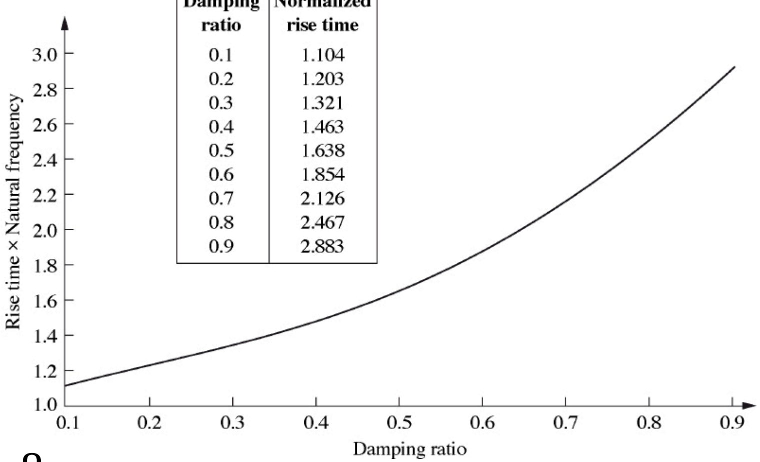
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Překmit, překývnutí (overshoot)

$$\%OS = 100 e^{-\left(\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}\right)}$$

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\%OS/100\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\%OS/100\right)}}$$





Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Doba náběhu T_r: rozumný vzorec není, jen graf ze simulací. Přesto někteří užívají „velmi přibližný“ odhad

$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

Vliv dalších pólů – Dominantní póly

- Někdy můžeme vliv více pólů aproximovat vlivem dvojice dominantních pólů a pak můžeme vzorečky pro 2. řád použít na tu dvojici a póly ostatní zanedbat

Příklad:

- Systém s dvojicí komplexních a ještě třetím reálným pólem má odezvu na skok

$$y(s)=\frac{bc}{s\left(s^2+as+b\right)\left(s+c\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+as+b}+\frac{D}{s+c}$$

kde

$$A=1,\quad B=\frac{-c^2+ca}{c^2+b-ca}$$

$$C=\frac{-c^2a+ca^2-bc}{c^2+b-ca}$$

$$D=\frac{-b}{c^2+b-ca}$$

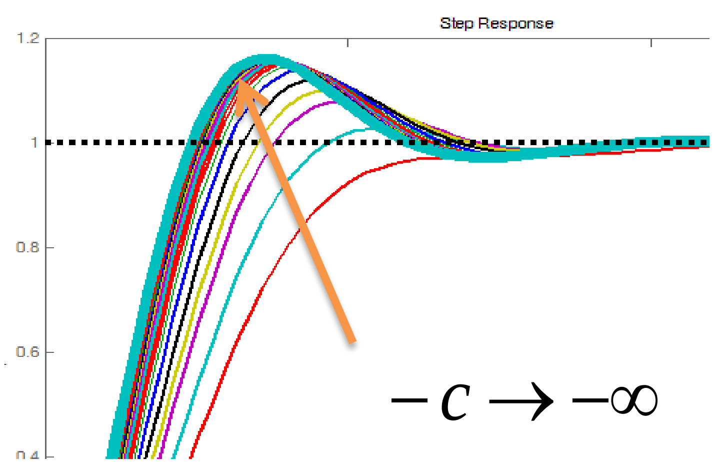
- Je-li reálný pól blízko dvojice, zanedbat ho nemůžeme!
- Je-li hodně daleko nalevo, má vliv zanedbatelný:

$$\lim_{-c\to-\infty} A=1\neq 0,\ \lim_{-c\to-\infty} B=-1\neq 0,\ \lim_{-c\to-\infty} C=-a\neq 0$$

ale $\lim_{-c\to-\infty} D=0$

- Co je to „daleko“?

  Pravidlo 5 (nebo 10): Třetí pól zanedbáme, je-li aspoň 5× (10x) dál nalevo od imag. osy než reálná část dominantní dvojice.
- Vždy ověříme simulací!



Vliv nuly

- Přidáme k systému s přenosem $g(s)$ a odezvou $y(s)$ nulu v $-a$, což změní přenos na $(1+s/a)g(s)$ a odezvu na $(1+s/a)y(s)$
- Odezva nového systému bude složená z původní a násobku její derivace

$$\bar{y}(s) = (1+s/a)y(s) = y(s) + (s/a)y(s)$$

- Je-li nula „hodně“ stabilní (tj. a je velké kladné), má člen s derivací $(s/a)y(s)$ zanedbatelný vliv a odezva se skoro nezmění
- Je-li to nula stabilní „méně“ (tj. a menší kladné), je vliv derivace významný!
- Skoková odezva má typicky na počátku derivaci kladnou, tedy člen s derivací se přičte a způsobí větší první překmit
- Bude-li nula nestabilní (záporné a), má derivace opačné znaménko a odezva je zpočátku dokonce obrácená
- Nuly neovlivňují typ módů, ale jejich relativní vliv, neboť v rozkladu na parciální zlomky ovlivňují jen čitatele (rezidua)