3 - Póly, nuly a odezvy

Michael Šebek

Automatické řízení 2017

Póly

Póly přenosu

- jsou kořeny jmenovatele
- pro $g(s)=b(s)/a(s)$ jsou to komplexní čísla $s_i : a(s_i)=0$
- pokud přenos nemá stejnou nulu (na rozdíl od matematiky): $g(s_i)=\infty$
- Odpovídají módům přirozené odezvy
- Patří mezi póly systému

Póly přenosu $\subseteq$ Póly systému

Póly systému

- kořeny charakteristického polynomu (společného jmenovatele všech přenosů)

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$$

- vlastní čísla matice systému ve stavovém popisu $\lambda_i(\mathbf{A})$
- charakterizují vnitřní dynamiku systému, jeho vnitřní rezonance
- jsou rovny komplexním frekvencím, které
  je systém schopen sám generovat (módy odezvy na jeho počáteční stav)
- nezávisí na vstupní matici **B** ani na výstupní matici **C**, tedy
  nezávisí na umístění aktuátorů a senzorů (v otevřené smyčce)

Nuly přenosu

Nuly přenosu (přenosové nuly) jsou

- kořeny jeho čitatele
- pro $g(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ jsou to komplexní čísla $s_i : b(s_i) = 0$

Význam pro řízení

- nuly přenosu jsou komplexní frekvence,
  pro které je přenos mezi vstupem a výstupem blokován
- mění odezvu a tím komplikují návrh řízení (viz dále)

Nuly systému

- jsou nuly přenosu $b(s)/a(s)$ „před vykrácením“ tj. když $a(s)=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$
- přesněji jsou to kořeny polynomu

Schurův doplněk

$$b(s)=\mathbf{C}\,\mathrm{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}+\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{D}=$$
$$=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\left[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right]=\det\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}$$

- oproti nulám přenosovým tu mohou být navíc
  - vstupní nuly (rovné pólům neřiditelné části), tj. $z_i:\mathrm{rank}\begin{bmatrix} z_i\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix}<n$
  - výstupní nuly (rovné pólům nepozorovatelné části), tj. $z_i:\mathrm{rank}\begin{bmatrix} z_i\mathbf{I}-\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\end{bmatrix}<n$

Význam pro řízení

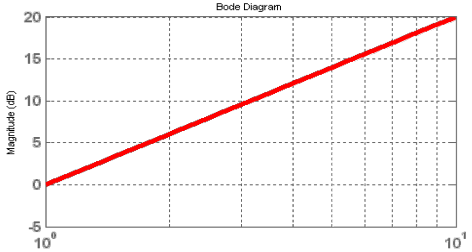
- nuly systému charakterizují, jak je systém spojen s okolím
- závisí na $\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ tedy na poloze senzorů a aktuátorů
- nestabilní nuly ztěžují řízení, někdy je dokonce nutno soustavu „předělat“

Póly a nuly v nekonečnu

Pól v nekonečnu má neryzí racionální funkce (přenos)

- Tedy, když je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele
- Např.

$$G(s) = s = \frac{s}{1} \qquad \lim_{s\to\infty} G(s) = \infty$$

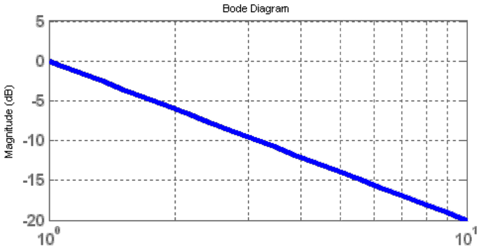


- Takový systém nemůže samostatně existovat, jen zapojení s jinými - zesiloval by i nekonečné frekvence

Nula v nekonečnu má striktně ryzí racionální funkce (přenos)

- Tedy, pokud je stupeň čitatele ostře menší než stupeň jmenovatele
- Např.

$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad \lim_{s\to\infty} G(s) = 0$$



- takové jsou všechny fyzikální systémy, blokují nekonečné frekvence
- Počítáme-li s násobnostmi a nekonečnými nulami a póly, tak má každý přenos stejný počet nul a pólů

Systém 1. řádu bez nul

$$G(s)=\frac{a}{s+a}=\frac{1}{1+Ts}$$

Impulzní odezva

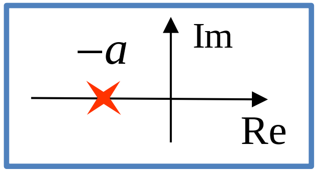
(impulzní charakteristika)

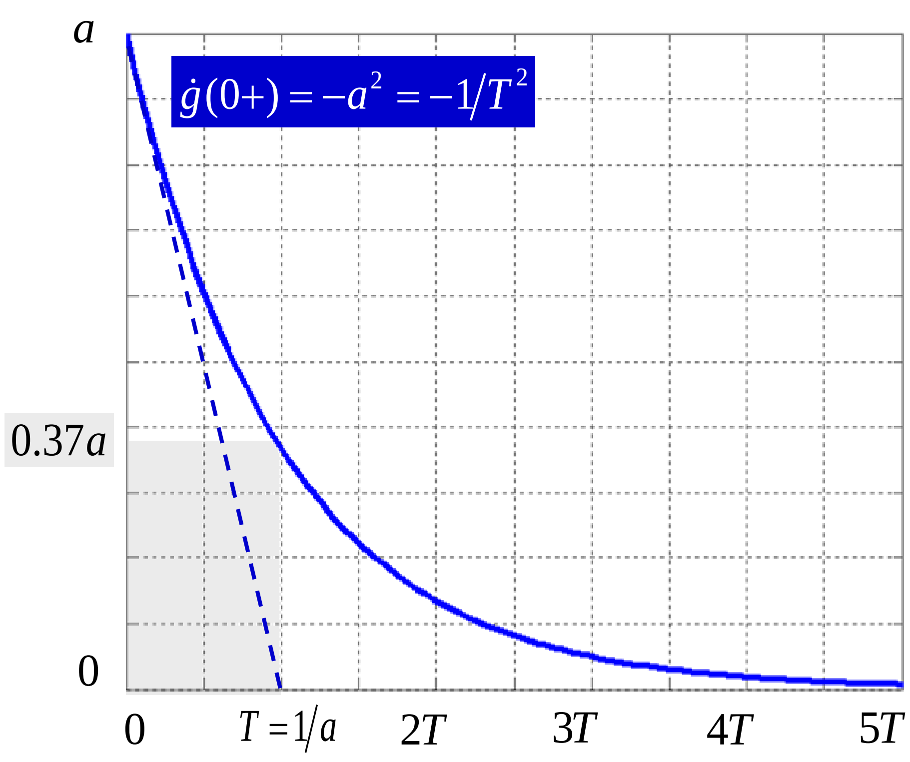
$$g(t)=ae^{-at}=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

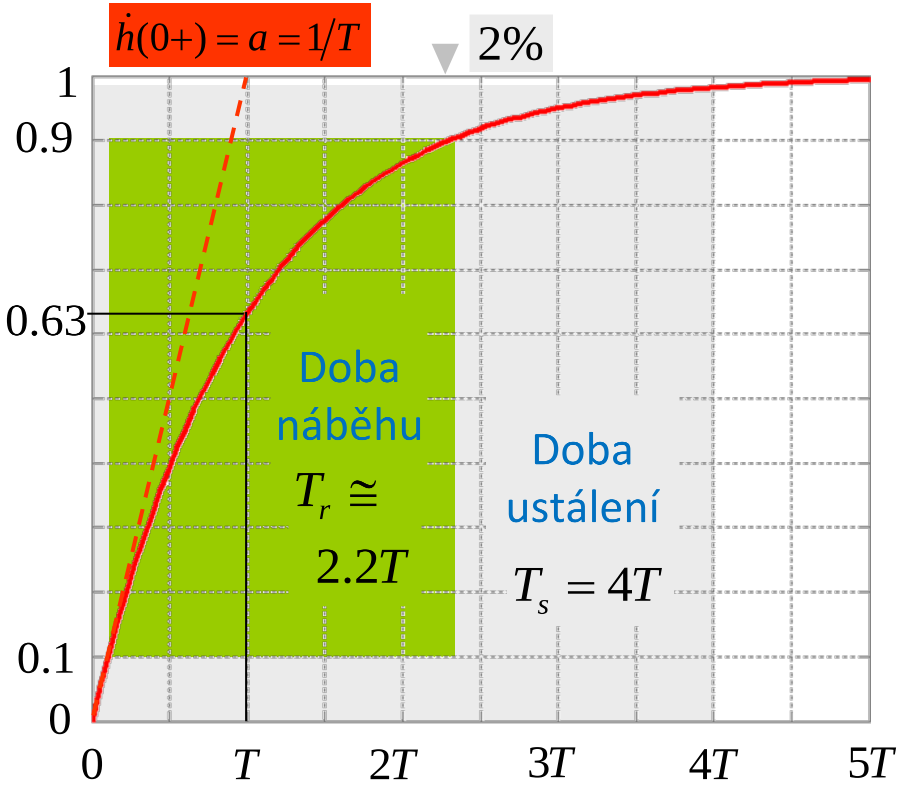
Skoková odezva

(přechodová charakteristika)

$$h(t)=1-e^{-at}=1-e^{-\frac{t}{T}}$$







Systém 2. řádu bez nul (stabilní) $G(s)=\dfrac{b}{s^2+as+b}$ $\quad a\geq 0,\ b>0$

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s+\sigma-j\omega_d)(s+\sigma+j\omega_d)}=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}=\frac{\omega_n^2}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2}$$

Tradičně označujeme

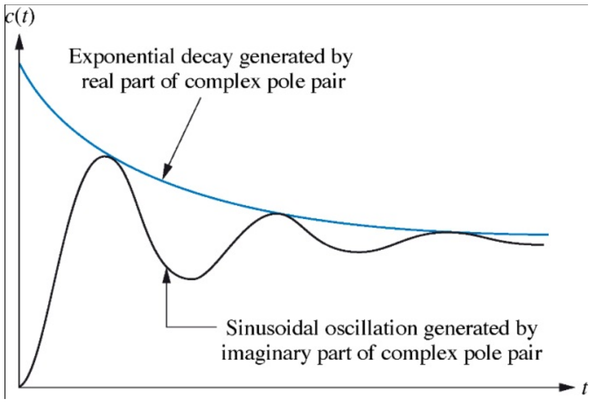
- přirozenou frekvenci (natural frequency) oscilací netlumeného systému $\omega_n=\sqrt{b}$
- frekvenci exponenciálního útlumu (exponential decay frequency) $\sigma=a/2$

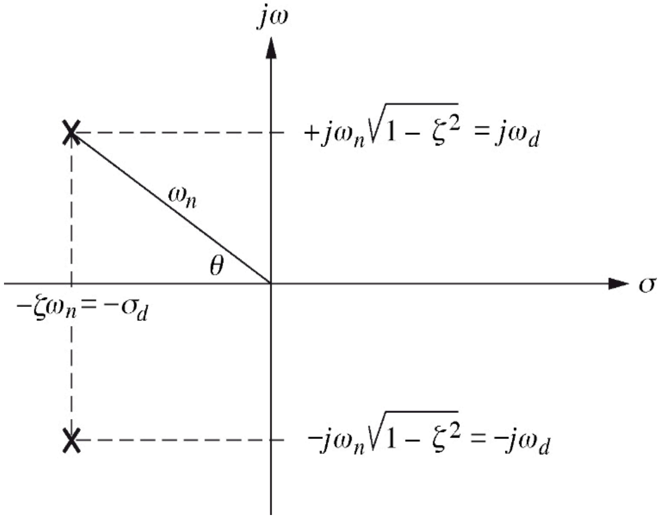
  obálka $1\pm e^{-\sigma t}$
- poměrný útlum, tlumení (damping ratio)

$$\zeta=\frac{\sigma}{\omega_n}=\frac{1}{2\pi}\frac{T_n}{T_\sigma}=\frac{a/2}{\omega_n}=\cos\theta$$

- frekvenci tlumených oscilací (damped frequency)

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\sqrt{b}\sqrt{1-(a/(2\sqrt{b}))^2}$$





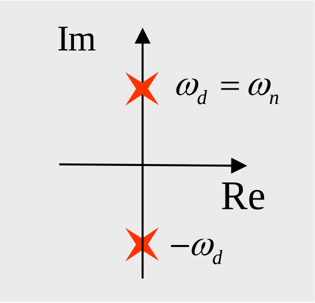
Systém 2. řádu bez nul - zajímavé případy

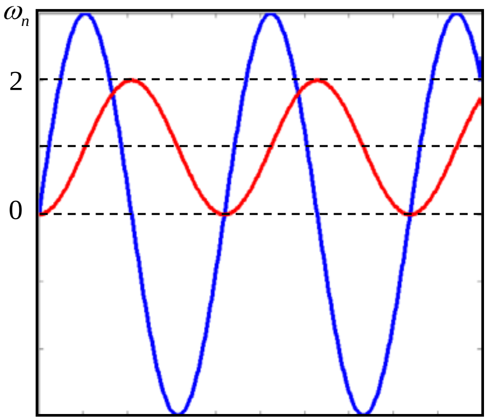
Netlumený systém $\quad \sigma = 0, \omega_n = \omega_d, \zeta = 0$

$$\boxed{G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}}$$

$$g(t) = \omega_n \sin \omega_n t$$

$$h(t) = 1 - \cos \omega_n t$$



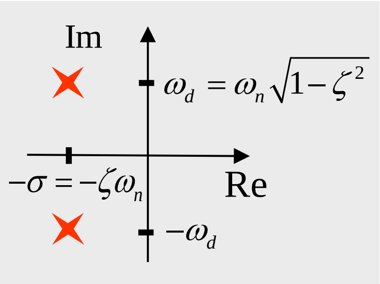


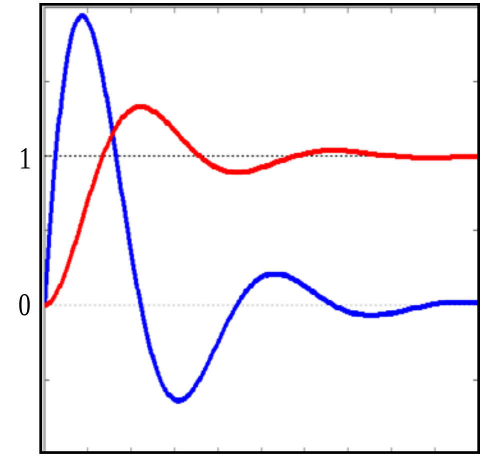
Podtlumený systém $\quad |\zeta| < 1, \sigma = \zeta\omega_n, \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\boxed{\begin{aligned} G(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s+\sigma-j\omega_d)(s+\sigma+j\omega_d)} \end{aligned}}$$

$$g(t) = (\omega_n^2/\omega_d)e^{-\sigma t} \sin \omega_d t$$

$$h(t) = 1 - e^{-\sigma t}\left[\cos \omega_d t + (\sigma/\omega_d)\sin \omega_d t\right]$$





Systém 2. řádu bez nul - zajímavé případy

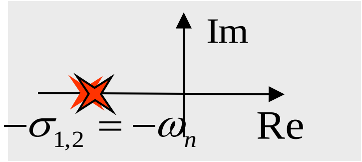
Kriticky tlumený systém

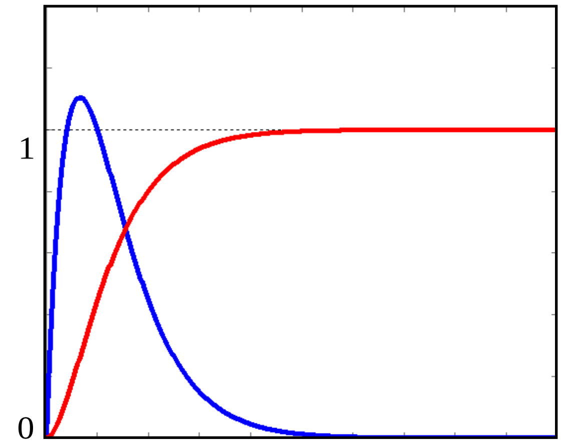
$\zeta = 1, \sigma_{1,2} = \omega_n, \omega_d = 0$

$$\boxed{G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}}$$

$$g(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

$$h(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$





Přetlumený systém

$|\zeta| \geq 1:$

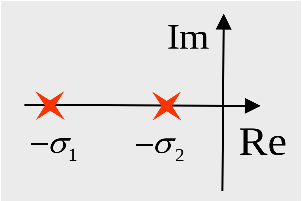
$$\sigma_1 = \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

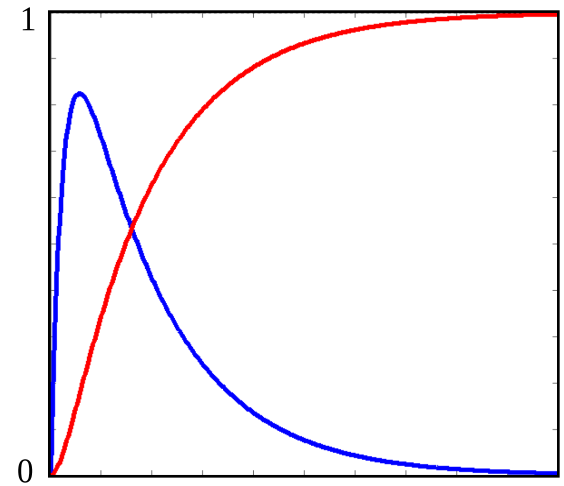
$$\sigma_2 = \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)} \end{aligned}}$$

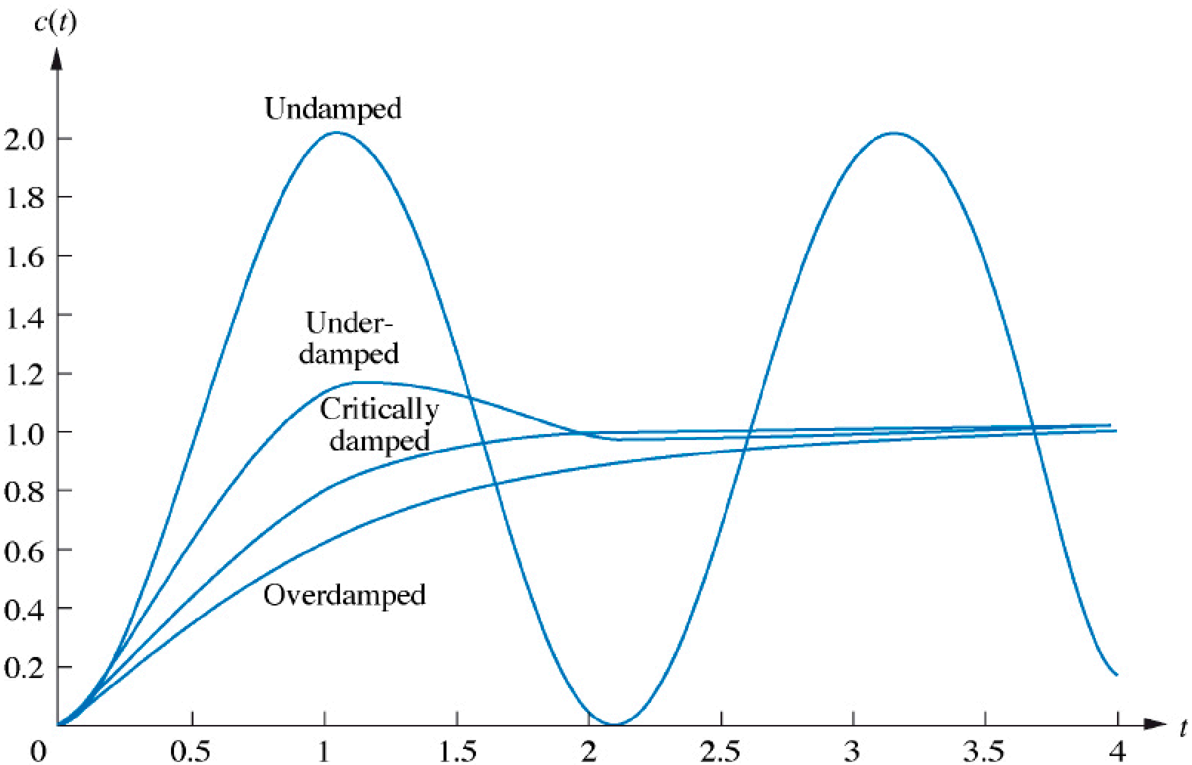
$$g(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(e^{-\sigma_2 t} - e^{-\sigma_1 t}\right)$$

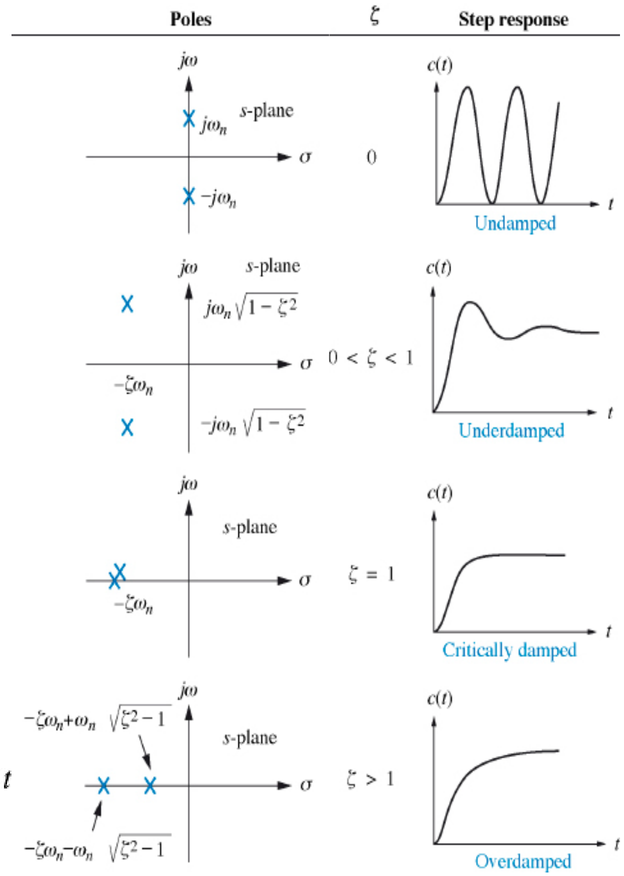
$$h(t) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_2 e^{-\sigma_1 t} - \sigma_1 e^{-\sigma_2 t}}{\sigma_1 - \sigma_2}$$





Všechny případy v jednom obrázku





Avšak pozor: Je to přesně tak jen když systém nemá nuly!

Systém 2. řádu: vzorce pro podtlumený případ

Doba ustálení (settling time)

$$T_s \doteq \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

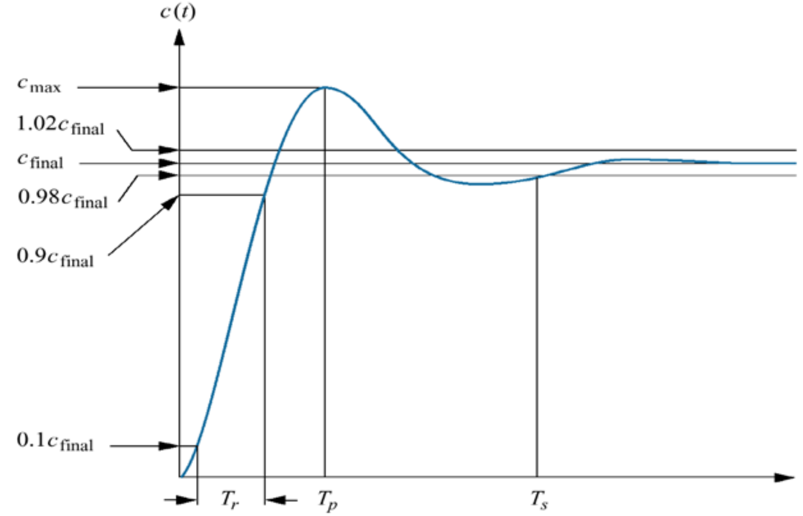
Doba 1. maxima (peek time)

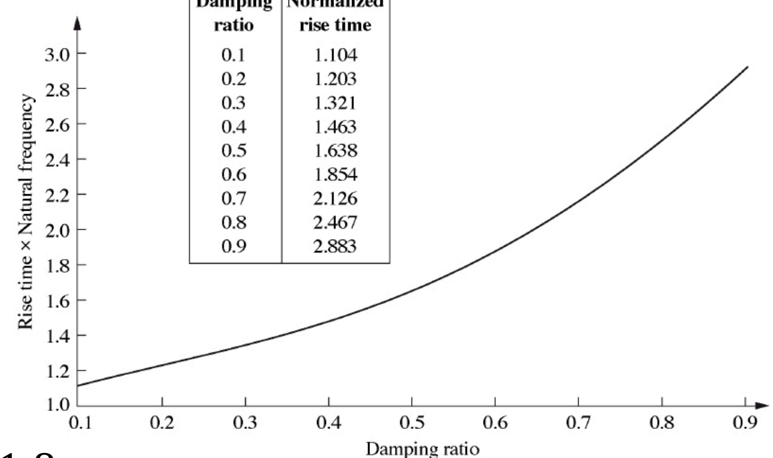
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Překmit, překývnutí (overshoot)

$$\%OS = 100 e^{-\left(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}$$

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\%OS/100\right)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\left(\%OS/100\right)}}$$





Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Doba náběhu T_r: rozumný vzorec není, jen graf ze simulací. Přesto někteří užívají „velmi přibližný“ odhad

$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

Vliv dalších pólů – Dominantní póly

- Někdy můžeme systém s více póly aproximovat systémem s dvojicí dominantních pólů
- A pak můžeme vzorečky pro 2. řád aplikovat na tu dvojici
- Např. pro systém s dvojicí komplexních pólů a ještě třetím reálným pólem je odezva na skok

$$A=1, B=\frac{-c^2+ca}{c^2+b-ca}$$

$$D=\frac{-b}{c^2+b-ca}$$

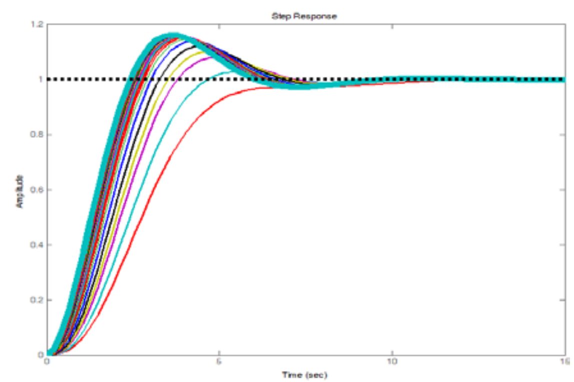
$$C=\frac{-c^2a+ca^2-bc}{c^2+b-ca}$$

$$y(s)=\frac{bc}{s\left(s^2+as+b\right)\left(s+c\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+as+b}+\frac{D}{s+c}$$

- Je-li **-*c*** blízko dvojice, zanedbat ho nemůžeme!
- Je-li hodně daleko nalevo, má vliv zanedbatelný

$$-c\to-\infty: A\to 1, B\to -1, C\to -a, D\to 0$$

- „Pravidlo 5“:
  Třetí pól zanedbáme, je-li aspoň 5× víc nalevo od imaginární osy než reálná část dominantní dvojice
- Někdo používá „Pravidlo 10“
- Raději to vždy ještě ověříme simulací



Vliv nuly

- Přidáme k systému s přenosem $g(s)$ a odezvou $y(s)$ nulu v $-a$, což změní přenos na $(1+s/a)g(s)$ a odezvu na $(1+s/a)y(s)$
- Odezva nového systému bude složená z původní a násobku její derivace

$$\bar{y}(s)=(1+s/a)y(s)=y(s)+\left(s/a\right)y(s)$$

- Je-li nula „hodně“ stabilní (tj. a je velké kladné), má člen s derivací $\left(s/a\right)y(s)$ zanedbatelný vliv a odezva se skoro nezmění
- Je-li to nula stabilní „méně“ (tj. a menší kladné), je vliv derivace významný!
- Skoková odezva má typicky na počátku derivaci kladnou, tedy člen s derivací se přičte a způsobí větší první překmit
- Bude-li nula nestabilní (záporné a), má derivace opačné znaménko a odezva je zpočátku dokonce obrácená
- Nuly neovlivňují typ módů, ale jejich relativní vliv, neboť v rozkladu na parciální zlomky ovlivňují jen čitatele (rezidua)