# 4 - Vlastnosti systému: Stabilita, převrácená odezva, řiditelnost a pozorovatelnost

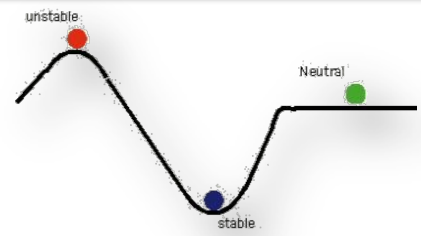
Michael Šebek

Automatické řízení 2017

2-3-17

# Stabilita obecně






- Stabilita – obecně schopnost zotavit se z perturbací (nenulové pp. nebo krátká porucha)

- Nelineární systém: stabilita řešení (ekvilibria), které může být stabilní, nestabilní, neutrální
- Lineární systém: jen jedno ekvilibrium, proto „stabilita systému"

Definice: Říkáme, že LTI systém je (vnitřně) stabilní, právě když každý jeho počáteční stav odezní do nuly.

- Pokud některý počáteční stav do nuly neodezní (stav zůstane nenulový, osciluje nebo diverguje), pak systém vnitřně stabilní není
- U spojitého LTI stavy je stabilita vždy asymptotická a tak přívlastek ztrácí opodstatnění. Další možnosti jsou „na mezi stability" a nestabilní"
- Vnitřní stabilita je vlastnost systému ne přenosu

Věta: Spojitý LTI systém je (vnitřně) stabilní právě když má jeho charakteristický polynom všechny kořeny v levé polorovině.

# Proč zrovna v levé polorovině?



- Odezva na počáteční podmínky / stav

$$y(s)=\frac{(a_n s^{n-1}+\cdots+a_1)y(0^-)+\cdots+a_n y^{(n-1)}(0^-)}{a(s)}$$

$$\mathbf{x}(s)=\frac{1}{a(s)}\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}(0^-)$$

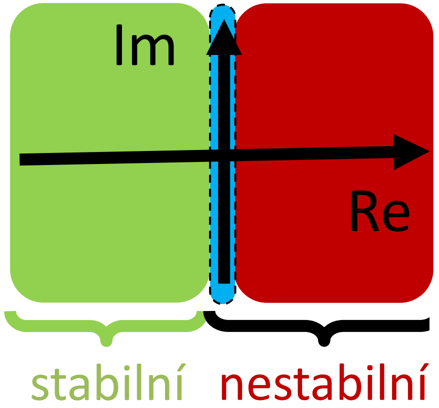
- Po rozkladu na parciální zlomky každému reálnému kořenu $s_i = a_i$ násobnosti $k$ odpovídají módy

$$e^{a_i t}, te^{a_i t}, \ldots, t^{k-1}e^{a_i t}$$

- a každé komplexní dvojici kořenů $s_i = a_i \pm jb_i$ násobnosti $l$ odpovídají

$$\begin{array}{ll} e^{a_i t}\sin b_i t, & e^{a_i t}\cos b_i t, \\ te^{a_i t}\sin b_i t, & te^{a_i t}\cos b_i t, \\ \vdots & \\ t^{l-1}e^{a_i t}\sin b_i t, & t^{l-1}e^{a_i t}\cos b_i t \end{array}$$

mez stability patří do nestabilní oblasti



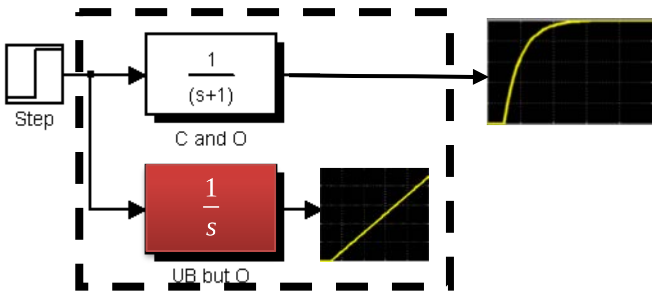

- Všechny tyto průběhy (a každý zvlášť) odezní do nuly $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re}\{s_i\} = a_i < 0$

- Polynom s kořeny „jen vlevo“ se nazývá stabilní v Hurwitzově smyslu

# BIBO Stabilita

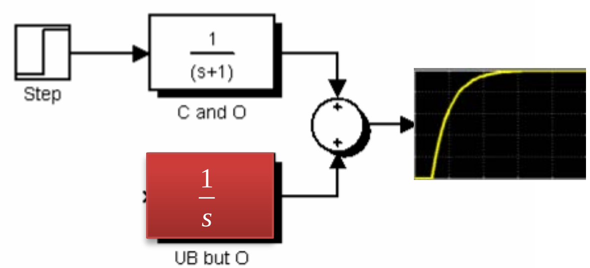
- Jiný pojem je stabilita typu BIBO (Bounded Input Bounded Output)
  Definice: Přenos je BIBO stabilní právě když odezva na každý omezený vstupní signál je také omezená
- Pokud nějaký omezený vstupní signál vyvolá na výstupu neomezenou odezvu, pak přenos BIBO stabilní není
- BIBO stabilita je vlastnost přenosu (ze vstupu na výstup), ne systému
- Interně stabilní syst. má všechny přenosy BIBO stabilní, opačně to neplatí
- Opačně to platí jen když jsou všechny módy systému vidět v přenosu

- Příklady – systémy BIBO stabilní, ale vnitřně nestabilní




nestabilní část není zvenku pozorovatelná

Přenos je BIBO stabilní, ale některé počáteční podmínky nevymizí




nestabilní část není řiditelná

vstupní signál se do ní nedostane

# Jak se odhadne stabilita polynomu



- Nutná podmínka stability polynomu (A. Stodola):
  Stabilní polynom $p(s) = s^n + \cdots + a_0$ má všechny koeficienty kladné

- Pro druhý stupeň je to nejen podmínka nutná, ale i postačující:
  Polynom $p(s) = s^2 + a_1 s + a_0$ je stabilní, právě když $a_1, a_0 > 0$

- Vysvětlení (pro stupně 1 a 2 platí oběma směry):

$$p_1(s) = s + a$$

$$p_{2,\mathrm{real}}(s) = \left(s+a\right)\left(s+b\right) = s^2 + (a+b)s + ab, \quad \left((a+b) > 0 \,\&\, ab > 0\right) \Leftrightarrow \left(a, b > 0\right)$$

$$p_{2,\mathrm{complex}}(s) = (s + c + jd)(s + c - jd) = (s+c)^2 + d^2 = s^2 + 2cs + c^2 + d^2$$

$$\left(2c > 0 \,\&\, (c^2 + d^2) > 0\right) \Leftrightarrow \left(c > 0\right)$$

- Pro vyšší stupně je to jen nutné:
  Násobením členů 1. a 2. řádu s kladnými koeficienty už nekladné koeficienty nevzniknou

- Ale není to postačující, viz protipříklad:

$$p_3(s) = \left(s^2 + 1\right)\left(s+1\right) = s^3 + s^2 + s + 1$$

$$s_{1,2} = \pm j$$

# Jak se testuje stabilita polynomu



- Výpočet kořenů, případně rovnou jejich zobrazení
  - v minulosti se neumělo (Maxwell), dnes je to nejčastější
  - moderní SW a numerická matematika to rychle vypočtou
- Dost přesné vyjma případu vícenásobných kořenů, což ale pro test stability většinou nevadí
  - Matlab: **roots**, v toolboxech často předefinováno, dále
  - Symbolic Math Tbx: **solve** (pozor na Abela)
  - Control Systems Tbx: **pzplot**
  - Polynomial Tbx: **zpplot**
- Speciální metody
  - Hurwitzova metoda (hlavní minory Hurwitzovy matice > 0)
  - Routh-Hurwitzův test stability - mechanická rutina
    Dnes se užívá pro jiné účely, k testování stability zřídka
    Naučte se ji sami z učebnic (např. Franklin 5/e s 132-133)

# Hurwitzova matice

Pro polynom $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$

- je Hurwitzova matice čtvercová $n \times n$ matice tvaru

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

- Hurwitzův test stability: $p(s)$ je stabilní, právě když $H(p)$ má všechny hlavní minory stejného znaménka
- Jasné, ale nepraktické:

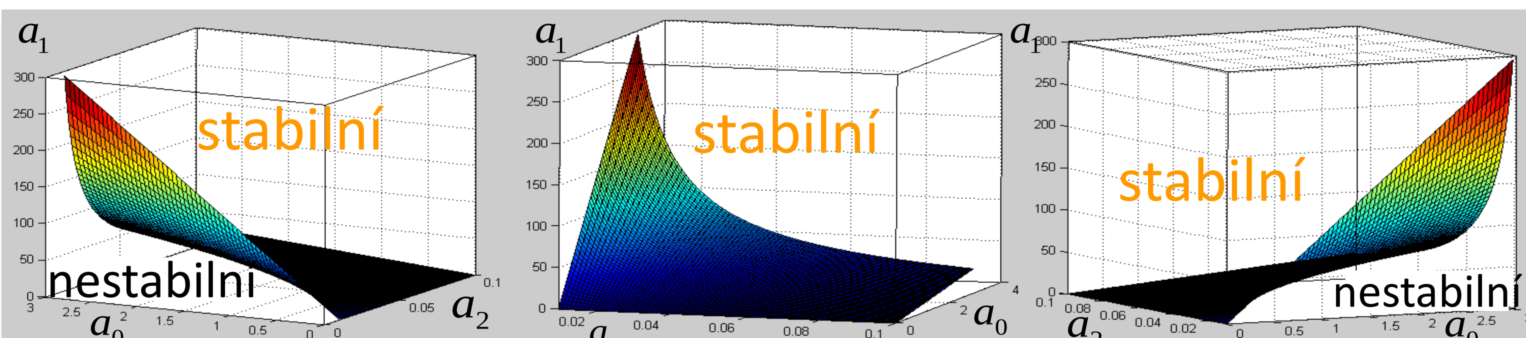
naučte se variantu Routh-Hurwitzovu – viz Čtení

# Proč je stabilizace obtížná

- Hurwitzův test stability je založen na Hurwitzově matici:
  Polynom je stabilní právě když jsou všechny hlavní minory kladné
- Pro polynom třetího stupně $p(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ to je

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} a_2 > 0 \\ a_2 a_1 > a_0 \\ a_0 a_1 a_2 - a_0^2 > 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} a_2, a_1, a_0 > 0 \\ a_2 a_1 > a_0 \end{array}$$

- Podmínky stability jsou „v koeficientech nelineární," proto oblast stability „v koeficientech" není tak jednoduchá jako „v kořenech"

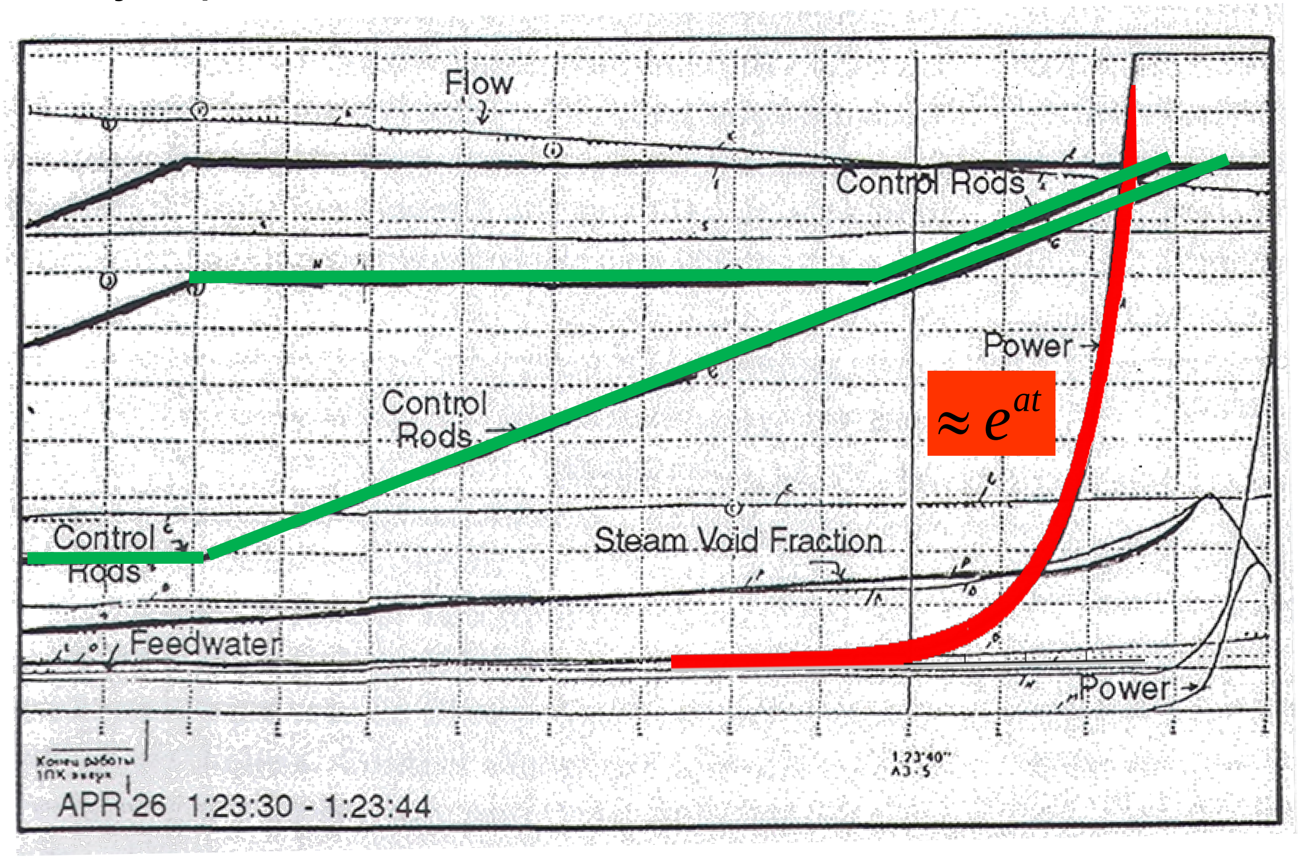



;

- Při návrhu regulátorů bohužel častěji pracujeme s koeficienty, proto je vyjma trivialit většina úloh složitá, nekonvexní, nelineární, ....

# Pozor na nestabilní soustavy

- Odstrašující příklad

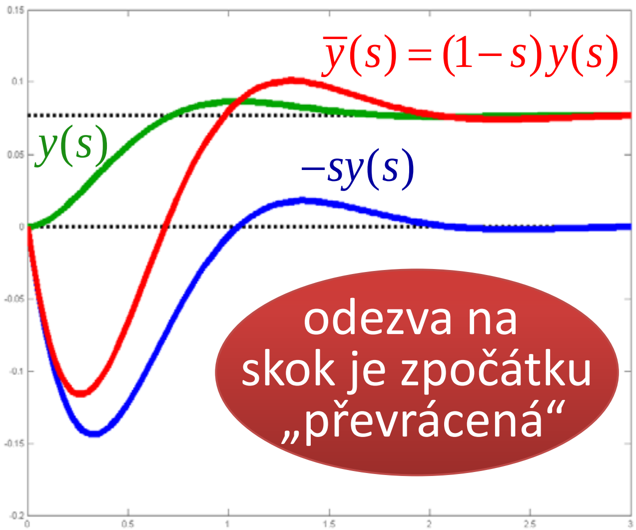



- Jaký mód/pól odpovídá průběhu výkonu? $a = 2$

# Vliv nestabilní nuly - Převrácená odezva



- Když k systému $y(s) = g(s)u(s)$ přidáme nestabilní nulu v $s = 1$, jeho odezva se změní na
$$\bar{y}(s) = (1-s)\,g(s)u(s) = (1-s)y(s) = y(s) - sy(s)$$
- tedy se od původní odezvy odečte její derivace (ta má typicky stejné znaménko jako odezva, a tak jde odečtení proti původnímu průběhu)
- Např. ze skokové odezvy
$$y(s) = \frac{1}{(s+2)^2+9}\frac{1}{s}$$
- odečtením derivace $-sy(s)$ dostaneme
$$\bar{y}(s) = (1-s)y(s) = \frac{1-s}{(s+2)^2+9}$$




- Systém zpočátku reaguje opačně a později to napraví – nejde tedy o změnu polarity!
- Souvisí to s pojmem neminimální fáze, proto se v literatuře místo „nestabilní nula“ někdy říká nula „neminimálně fázová“

# „Dělat se systémem, co chci“ neboli Řiditelnost



- Definice: matice řiditelnosti $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$

Následující tvrzení jsou ekvivalentní

řiditelnost není vlastností přenosu, ale stavové realizace

- systému je úplně řiditelný
- systém nemá neřiditelnou (divnou) část
- všechny módy systému můžeme vybudit akčním zásahem
- každý stav systému lze řídit (třeba do nuly)
- stavový popis lze převést do normální formy řiditelnosti
- matice řiditelnosti má plnou hodnost (u SISO je nesingulární)
- platí $\operatorname{rank}\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A},\mathbf{B}\right]=n \quad \forall s \in C$
- při výpočtu přenosu se nic nekrátí mezi $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \dfrac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}$
- stavovou ZV můžeme libovolně posouvat póly systému

# Neřiditelný systém

- když předchozí tvrzení neplatí, tak  máme problém

## Důvody

- špatný model (např. stavový popis zbytečně vysokého řádu)
- systém opravdu nejde dobře řídit a musíme ho „předělat“ (přemístit nebo přidat aktuátor apod.)
- sami jsme neřiditelnost způsobili nevhodným spojením podsystémů

## Neřiditelnost

- nemusíme poznat z přenosu (někdo už ho mohl vykrátit)
- nemusí být ještě úplný průšvih, pokud je „neřiditelná část“ systému stabilní - pak je systém alespoň stabilizovatelný

Mezi tím je špatná řiditelnost

- matice řiditelnosti je „skoro singulární,“ přenosy „skoro soudělné“
- špatně se řídí, špatná dynamika, velká spotřeba energie

# „Zjistit, co se v systému děje“ neboli pozorovatelnost

- Definice: matice pozorovatelnosti je

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Následující tvrzení jsou ekvivalentní

- systému je úplně pozorovatelný
- každý stav systému lze zpětně pozorovat (= vypočítat)
- všechny módy systému můžeme v principu pozorovat na výstupu
- systém nemá nepozorovatelnou (divnou) část
- stavový popis lze převést do normální formy pozorovatelnosti
- matice pozorovatelnosti je nesingulární
- pro každé komplexní číslo $s$ platí $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} (s\mathbf{I}-\mathbf{A}) \\ -\mathbf{C} \end{bmatrix} = n$
- při výpočtu přenosu se nic nekrátí mezi $\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \dfrac{\mathbf{C}\,\mathrm{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}$
- můžeme libovolně navrhnout tzv. pozorovatele

pozorovatelnost není vlastností přenosu, ale stavové realizace

# Jak je to pro diskrétní systémy?

Systémy s diskrétním časem budeme mít až později, takže zde je jen malá návnada:

Téměř vše probrané v této přednášce pro ně platí stejně, až na několik rozdílů:

- místo L-transformace je z-transformace …
- oblast a mez stability v komplexní rovině je jiná
- Hurwitzova matice se nahradí tzv. Schurovou maticí
- Svobodova podmínka vypadá jinak