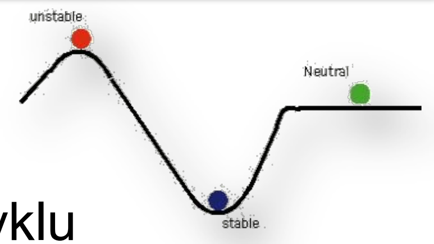
4 - Vlastnosti systému: Stabilita, převrácená odezva, řiditelnost a pozorovatelnost

Michael Šebek

Automatické řízení 2018

Stabilita obecně



- Stabilita – obecně schopnost zotavit se z perturbací (nenulové pp. nebo krátká porucha)
- Nelineární systém: stabilita „řešení“: ekvilibria nebo cyklu přičemž „systém“ může mít současně stabilní i nestabilní řešení
- Lineární systém: má jen jedno ekvilibrium, proto stabilita „systému“

Definice: Říkáme, že LTI systém je (vnitřně) stabilní, právě když každý jeho počáteční stav odezní do nuly.

- Pokud naopak některý počáteční stav do nuly neodezní (stav zůstane nenulový, osciluje nebo diverguje), pak systém vnitřně stabilní není
- U spojitého LTI systému je stabilita vždy asymptotická, a tak tento přívlastek nemá opodstatnění.
- Další možnosti jsou systém „na mezi stability“ a systém „nestabilní“
- Vnitřní stabilita je vlastnost systému ne přenosu

Věta: Spojitý LTI systém je (vnitřně) stabilní právě když má jeho charakteristický polynom všechny kořeny v levé polorovině.

Stabilita BIBO - Bounded Input Bounded Output

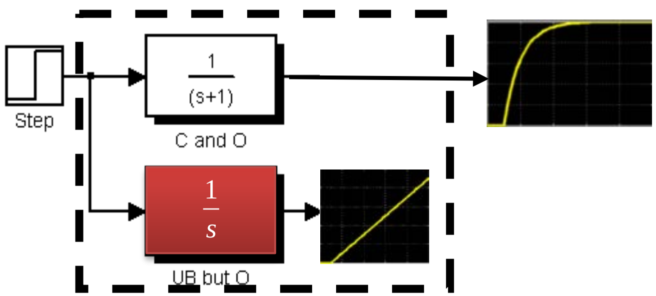
Definice: Přenos je BIBO stabilní právě když odezva na každý omezený vstupní signál je také omezená

- Pokud nějaký omezený vstupní signál vyvolá na výstupu neomezenou odezvu, pak přenos BIBO stabilní není

Věta: Přenos je BIBO stabilní právě když má jeho jmenovatel všechny kořeny v levé polorovině.

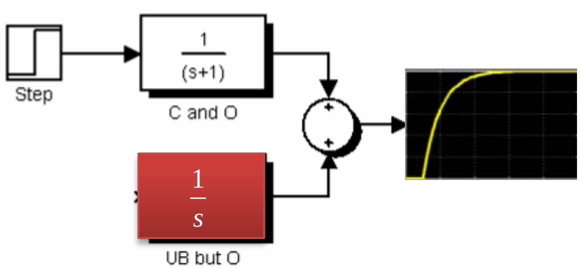
- BIBO stabilita je vlastnost přenosu (ze vstupu na výstup), ne systému
- Vnitřně stabilní systém má přenos BIBO stabilní, opačně to neplatí!
- Opačně to platí jen když jsou všechny módy systému vidět v přenosu

- Příklady – systémy BIBO stabilní, ale vnitřně nestabilní



nestabilní část není zvenku pozorovatelná

Přenos je BIBO stabilní, ale některé počáteční podmínky nevymizí



nestabilní část není řiditelná

vstupní signál se do ní nedostane

Jak se testuje stabilita polynomu

- Výpočet kořenů, případně rovnou jejich zobrazení
  - v minulosti se neumělo (Maxwell), dnes je to nejčastější
  - moderní SW a numerická matematika to rychle vypočtou
- Dost přesné vyjma případu vícenásobných kořenů,
  což ale pro test stability většinou nevadí
  - Matlab: **roots**, v toolboxech často předefinováno, dále
  - Symbolic Math Tbx: **solve** (pozor na Abela)
  - Control Systems Tbx: **pzplot**
  - Polynomial Tbx: **zpplot**
- Speciální metody
  - Hurwitzova metoda (hlavní minory Hurwitzovy matice > 0)
  - Routh-Hurwitzův test stability - mechanická rutina
    Dnes se užívá pro jiné účely, k testování stability zřídka
    Naučte se ji sami z učebnic (např. Franklin 5/e s 132-133)

Jak se testuje stabilita polynomu

- Výpočet kořenů, rovnou jejich zobrazení! V minulosti problém (Maxwell), dnes rychlé a dost přesné (až na vícenásobné kořeny)
- důležitý problém -> spousta metod, přímo se už moc nepoužívají
- Hurwitzův test stability: Polynom $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ je stabilní, právě když jeho Hurwitzova matice má všechny hlavní minory stejného znaménka.

$$\underset{n \times n}{H(p)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

  Jasné, ale (ručně) nepraktické!

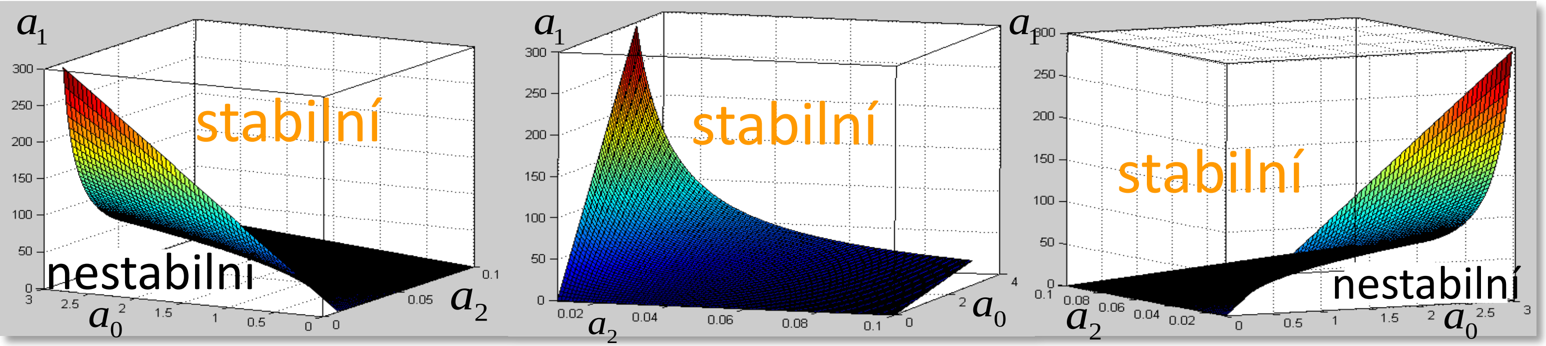
- Naučte se sami praktickou variantu Routh-Hurwitzovu – viz Čtení
- Hodí se Stodolova nutná podmínka stability (pro $n \le 2$ i postačující): „všechny koeficienty kladné“

Proč je stabilizace systému obtížná

- Hurwitzův test stability je založen na Hurwitzově matici:
  Polynom je stabilní právě když jsou všechny hlavní minory kladné
- Pro polynom třetího stupně $p(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ to je

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} a_2 > 0 \\ a_2 a_1 > a_0 \\ a_0 a_1 a_2 - a_0^2 > 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} a_2, a_1, a_0 > 0 \\ a_2 a_1 > a_0 \end{array}$$

- Podmínky stability jsou „v koeficientech nelineární,“ proto oblast stability „v koeficientech“ není tak jednoduchá jako „v kořenech“



;

- Při návrhu regulátorů bohužel častěji pracujeme s koeficienty, proto je vyjma trivialit většina úloh složitá, nekonvexní, nelineární, ….

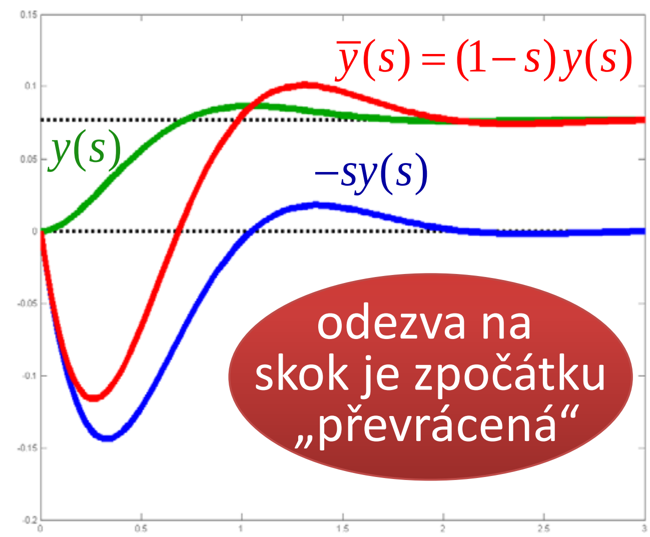
Vliv nestabilní nuly - Převrácená odezva

- Když k systému $y(s)=g(s)u(s)$ přidáme nestabilní nulu v $s=1$, jeho odezva se změní na
$$\bar{y}(s)=(1-s)g(s)u(s)=(1-s)y(s)=y(s)-sy(s)$$
- tedy se od původní odezvy odečte její derivace (ta má typicky stejné znaménko jako odezva, a tak jde odečtení proti původnímu průběhu)
- Např. ze skokové odezvy

$$y(s)=\frac{1}{(s+2)^2+9}\frac{1}{s}$$

- odečtením derivace $-sy(s)$ dostaneme

$$\bar{y}(s)=(1-s)y(s)=\frac{1-s}{(s+2)^2+9}\frac{1}{s}$$



- Systém zpočátku reaguje opačně a později to napraví – nejde tedy o změnu polarity!
- Souvisí to s pojmem neminimální fáze, proto se v literatuře místo „nestabilní nula“ někdy říká nula „neminimálně fázová“

Řiditelnost aneb „dělat se systémem, co chci“

Řiditelnost je míra toho, jak dobře můžeme všechny stavy systému řídit

- Definice: matice řiditelnosti $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$

- není to vlastnost přenosu, ale stavové realizace
- nezmění ji transformace

Následující tvrzení jsou ekvivalentní

- systému je úplně řiditelný
- každý stav systému lze řídit (z libovolného počátečního stavu do nuly)
- všechny módy systému můžeme vybudit akčním zásahem
- systém nemá neřiditelnou (divnou) část
- stavový popis lze převést do normální formy řiditelnosti
- matice řiditelnosti má plnou hodnost (u SISO je nesingulární)
- platí $\operatorname{rank}\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A},\mathbf{B}\right]=n \;\; \forall s \in C$
- při výpočtu přenosu se nic nekrátí mezi $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \dfrac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}$
- stavovou ZV můžeme libovolně posouvat póly systému

Neřiditelný systém

- když předchozí tvrzení neplatí, tak máme problém

Důvody

- špatný model (např. stavový popis zbytečně vysokého řádu)
- systém opravdu nejde dobře řídit a musíme ho „předělat“ (přemístit nebo přidat aktuátor apod.)
- sami jsme neřiditelnost způsobili nevhodným spojením podsystémů

Neřiditelnost

- nemusíme poznat z přenosu (někdo už ho mohl vykrátit)
- nemusí být ještě úplný průšvih, pokud je „neřiditelná část“ systému stabilní - pak je systém alespoň stabilizovatelný

Mezi tím je špatná řiditelnost

- matice řiditelnosti je „skoro singulární,“ přenosy „skoro soudělné“
- špatně se řídí, špatná dynamika, velká spotřeba energie

Pozorovatelnost aneb „odvodit co se v systému děje“

- Pozorovatelnost je míra toho, jak dobře můžeme interní stavy odvodit ze znalosti vnějších výstupů

Matice pozorovatelnosti

$$O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Následující tvrzení jsou ekvivalentní

- systému je úplně pozorovatelný
- každý stav systému lze zpětně pozorovat (= vypočítat počáteční stav)
- všechny módy systému můžeme v principu pozorovat na výstupu
- systém nemá nepozorovatelnou (divnou) část
- stavový popis lze převést do normální formy pozorovatelnosti
- matice pozorovatelnosti je nesingulární
- pro každé komplexní číslo s platí $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} (s\mathbf{I}-\mathbf{A}) \\ -\mathbf{C} \end{bmatrix} = n$
- při výpočtu přenosu se nic nekrátí mezi $\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \dfrac{\mathbf{C}\,\mathrm{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}$
- můžeme libovolně navrhnout tzv. pozorovatele

- není vlastností přenosu, ale stavové realizace
- nezmění se transformací

Slabší podmínky

- Někdy je požadavek na plnou řiditelnost a pozorovatelnost moc ?

- Pokud jsou všechny neřiditelné módy alespoň stabilní,
  říkáme, že systém je stabilizovatelný a
- lze ho stabilizovat (stavovou zpětnou vazbou).
- Řiditelné módy změníme a ty neřiditelné už stabilní jsou.

- Pokud jsou všechny nepozorovatelné módy alespoň stabilní,
  říkáme, že systém je detekovatelný.
- Můžeme pozorovat alespoň eventuální nestabilní část.

- Stabilizovatelný a detekovatelný systém můžeme mít dynamiku, kterou nevidíte a/nebo neovlivníte, ale ta je alespoň stabilní

- Stabilizovatelný a detekovatelný systém můžeme
  stabilizovat zpětnou vazbou z výstupu