5 - Identifikace

Michael Šebek

Automatické řízení 2017

Identifikace

Aneb jak získat model systému z dat (a validovat ho na jiných datech)

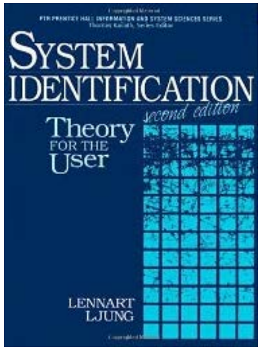
- white box (víme vše): ze základních principů (fyz-chem-bio-…)
- grey box (víme něco): známe třeba typ modelu, hledáme parametry
- black box (nevíme nic): neznáme ani typ modelu, řád, nelinearitu, ...

V ARI ukážeme jednoduché experimentální metody, off-line, open-loop

- z časové odezvy
- z frekvenční odezvy
- základy nejmenších čtverců

V dalších předmětech

- sofistikované stochastické metody typu black box
- rekurentní, on-line, v uzavřené smyčce
- pro pokročilé zájemce (a diskrétní systémy)
  L. Ljung: System Identification: Theory for the User
  (2nd Ed.) Prentice Hall, 1999. ISBN 978-0136566953
- Matlab: System Identification Toolbox



Aproximace ze skokové odezvy - Bump test

Hledáme lineární odchylkový model – tomu přizpůsobíme experiment

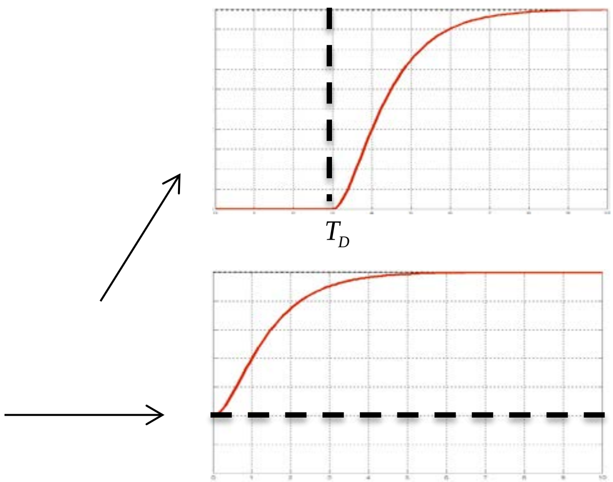
- pozor na pracovní bod a velikost skoku

Postup

1. Experimentálně změříme skokovou odezvu → graf nebo tabulka
2. Na ní naměříme několik vybraných bodů
3. Dosadíme hodnoty do obecně vypočítané odezvy a řešíme rovnice pro neznámé parametry – je to obtížné, tak hledáme zvláštní hodnoty

Metody

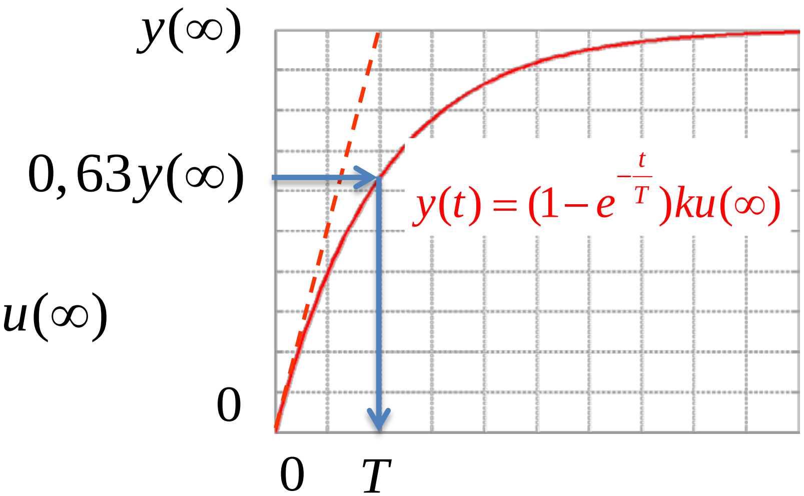
- Klasické, jednoduché metody, off-line, open-loop
- Deterministické - fungují, jen když nejsou (jsou malé) šumy, statistické vlastnosti neznáme
- Soustava musí být stabilní!
- Pokud má systém dopravní zpoždění, odečteme ho předem
- Pokud má systém ofset, odečteme ho předem



1. Řád bez nuly

Aplikujeme $u(s) = u(\infty)/s$ a hledáme

$$G(s) = \frac{k}{1+Ts}$$



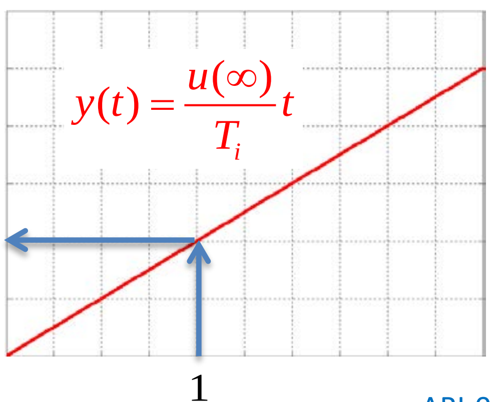
1. Změříme $y(\infty)$ a vypočteme $k = y(\infty)/u(\infty)$
2. Najdeme $0.63y(\infty)$ a odměříme T

Pro $G(s) = \dfrac{1}{T_i s}$

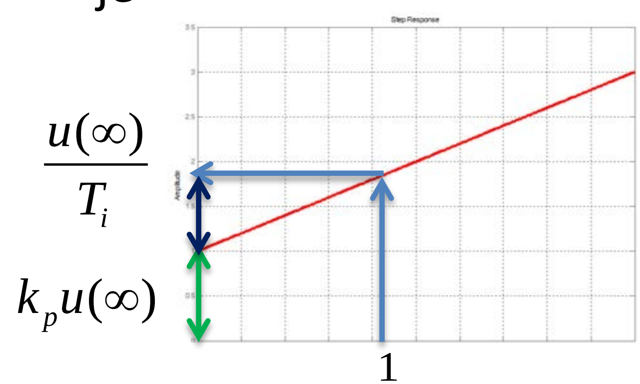
1. Odměříme $y(1)$ a vypočteme

$$T_i = \frac{u(\infty)}{y(1)}$$

$$y(1) = \frac{u(\infty)}{T_i}$$



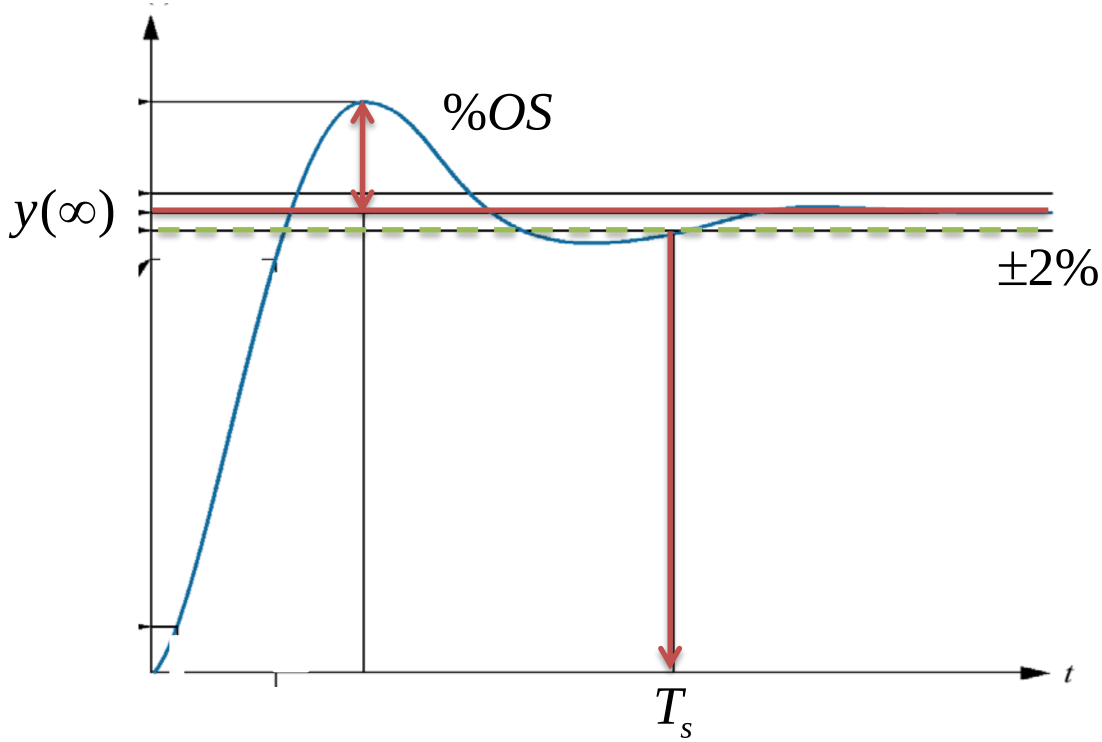
Konečně pro je $G(s) = \dfrac{1}{T_i s} + k_p = \dfrac{1+T_p s}{T_i s}$



2. řád bez nul - kmitavý případ

Hledáme

$$G(s) = k\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



1. Změříme

$$y(\infty), \%OS, T_s$$

2. Vypočteme

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\%OS/100\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\%OS/100\right)}}, \quad \omega_n \doteq \frac{4}{\zeta T_s}, \quad k = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$$

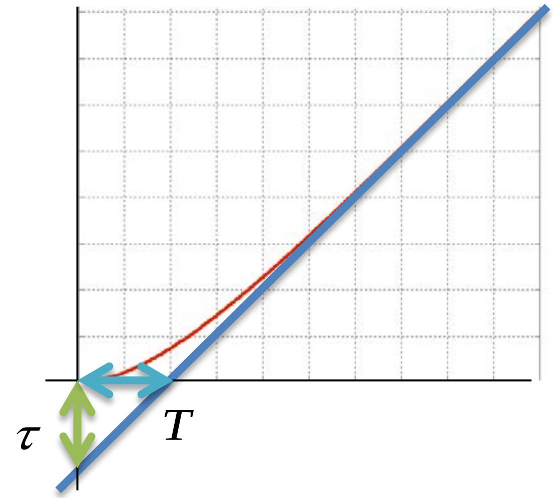
Zvláštní systém integračního charakteru bez nul

Pro systém s „integračním chováním“

$$G(s)=\frac{k}{s(Ts+1)} \quad \text{a} \quad u(s)=\frac{1}{s}$$

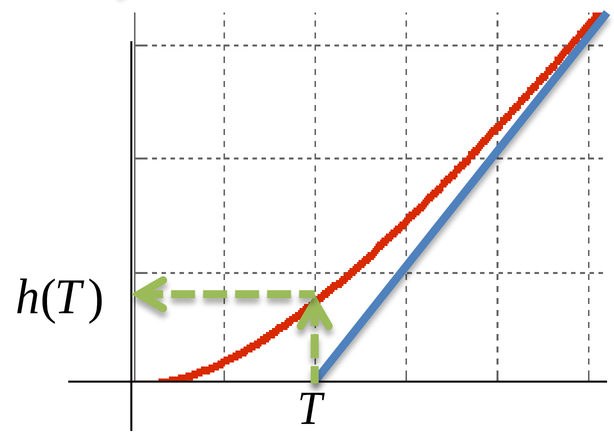
$$\frac{k}{s^2(Ts+1)}=\frac{k}{s^2}-\frac{Tk}{s}+\frac{Tk}{s+1/T}$$

$$h(t)=kt-kT+kTe^{-t/T} \qquad h_{\text{asymptota}}(t)=kt-kT=k(t-T)$$



1. nakreslíme asymptotu v nekonečnu
2. odečteme T
3. odečteme τ a vypočteme $k=\dfrac{\tau}{T}$

Obdobně pro složitější $G(s)=\dfrac{k}{s(Ts+1)^n}$



1. $\boldsymbol{k}$ = směrnice asymptoty
2. a platí

$$\frac{h(T)}{k}=e^{-n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

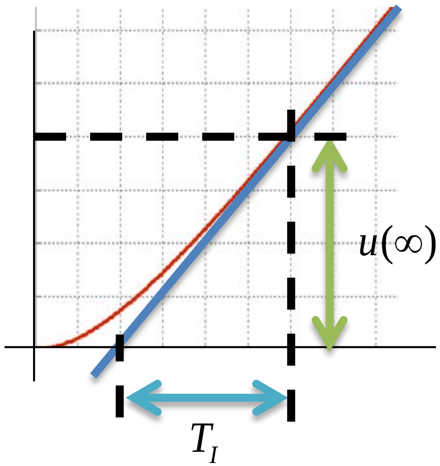
n	1	2	3	4	5
$h(T)/k$	0.37	0.27	0.22	0.20	0.18

Obecnější systém integračního charakteru

Pro systém s „integračním chováním“

$$G(s)=\frac{1}{T_I s}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(T_k s+1)},\qquad u(s)=\frac{u(\infty)}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dy(t)}{dt}=\lim_{s\to 0}\left(s^2 y(s)\right)=\lim_{s\to 0}\left(sG(s)u(\infty)\right)=\frac{u(\infty)}{T_I}$$



1. Nakreslíme asymptotu v nekonečnu
2. Odečteme její směrnici
   a vypočteme (odečteme) T_I
3. Potom uděláme derivaci odezvy a
4. z ní identifikujeme systém
   proporcionálního charakteru

$$y_D(s)=sy(s)=sG(s)\frac{u(\infty)}{s}$$

$$G_P(s)=sG(s)=\frac{1}{T_I}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(T_k s+1)}$$

Téhož dosáhneme použitím impulzního vstupu

$$u(t)=c\delta(t)$$
$$u(s)=c$$

$$\Rightarrow\quad y_{impulse}(s)=G(s)c=G_P(s)c/s$$

Jak realizovat Dirac?
Krátkým obdélníkovým
pulsem s plochou c !

2. řád bez nul - nekmitavý případ

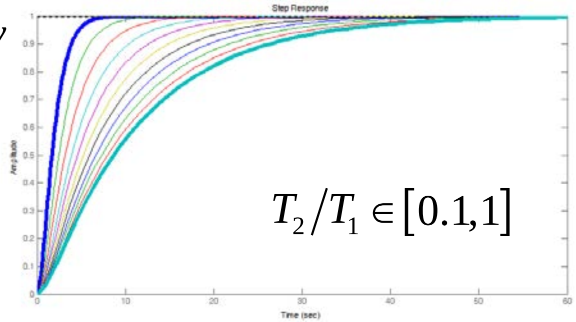
Pro

$$G(s)=\frac{k}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}e^{-sL},T_2\le T_1$$

je skoková odezva

$$y(t)=\begin{cases} k\left(1-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-(t-L)/T_1}-\frac{T_2}{T_2-T_1}e^{-(t-L)/T_2}\right) & T_1\ne T_2 \\ k\left(1-e^{-(t-L)/T_1}-\frac{t}{T_1}e^{-(t-L)/T_1}\right) & T_1=T_2 \end{cases}$$

y

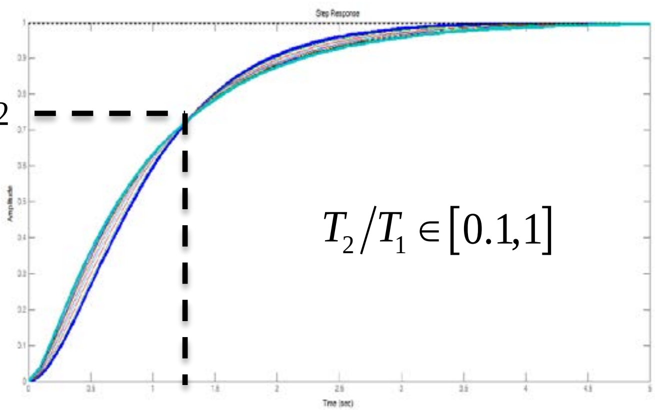


t

- V horním grafu odezev pro $T_2/T_1 \in [0.1,1]$ se zdají být různé, ale po normalizaci času na $t/(T_1+T_2)$ je vidět, že jsou podobné
- A proto je těžké určit parametry robustně ze skokové odezvy, šlo by to lépe z impulzní
- Protínají se přibližně v bodě $(\tau\approx 1.256, f(\tau)\approx 0.72)$, toho využívá Strejcova metoda – viz příklady

y

≈ 0.72



$\tau\approx 1.256$ $\tau = t/(T_1+T_2)$

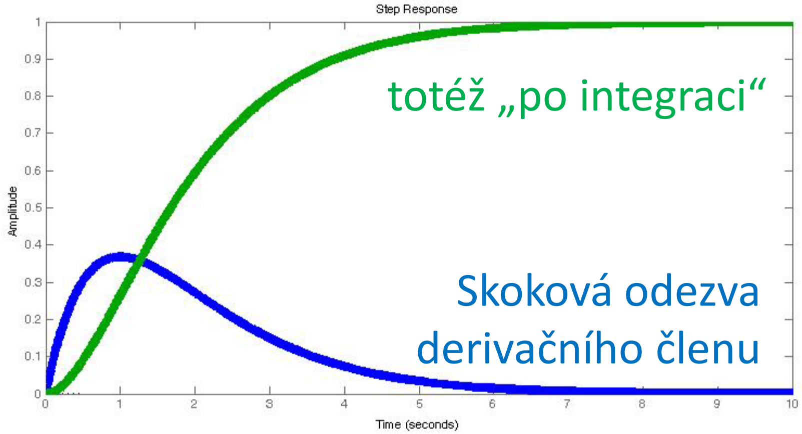
Systém derivačního charakteru (s nulou v nule)

- Pro systém „derivačního charakteru“ (tedy s nulou v $s = 0$)

$$G(s)=\frac{T_D s}{\prod(T_i s+1)}$$

$$y(s)=G(s)\frac{u(\infty)}{s}=\frac{T_D}{\prod(T_i s+1)}u(\infty)$$

$$y_I(s)=y(s)\frac{u(\infty)}{s}=\frac{T_D}{\prod(T_i s+1)}\frac{u(\infty)}{s}$$



$$y(\infty)=0$$

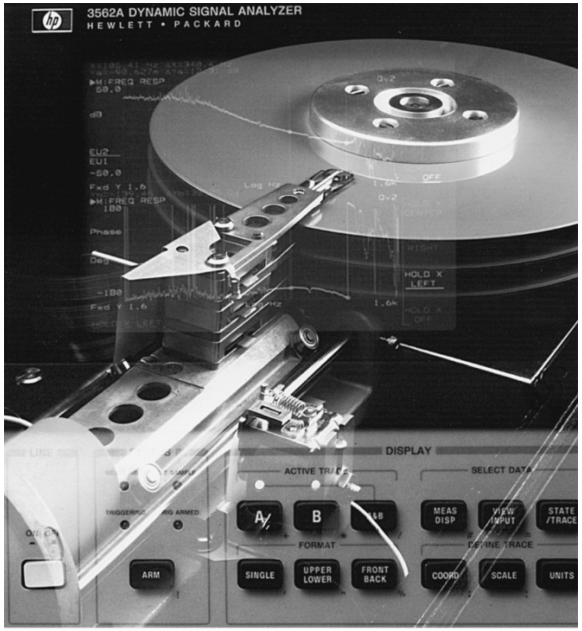
1. Skokovou odezvu derivačního členu nejprve integrujeme
2. A pak identifikujeme vhodnou z předchozích metod

- Téhož dosáhneme vybuzením rampou $u(t)=ct \Leftrightarrow u(s)=c/s^2$. Pak výstup rovnou odpovídá skokové odezvě systému „proporcionálního charakteru“

$$y_{ramp}(s)=G(s)\frac{c}{s^2}=\frac{T_D}{\prod(T_i s+1)}\frac{c}{s}$$

Identifikace z frekvenční odezvy

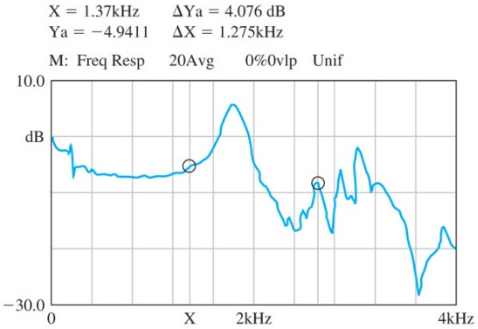
- Odezva většinou naměřená (analyzátorem, typicky 0-100kHz), ale
- může být i „vypočtená“ (příklad: mechanický model a metoda konečných prvků)



(a)

Metody

- Podívat se, odhadnout vlastnosti a zkusmo napasovat asymptoty (Nise paperback 10.13 strana 665)



(b)

- Obecné metody interpolace, fitting, nejmenší čtverce

- Speciální metody (starší) pro Bodeho nebo Nyquistův graf

Nejmenší čtverce – Least Squares

- Přeurčená soustava lineárních rovnic ($\mathbf{A}$ je $m \times n,\ m > n$)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

pokud $\operatorname{rank}\mathbf{A} \neq \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ nemá řešení!

- Varianta - Nejmenší čtverce

$$\min_{\mathbf{x}} \left\| \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)^2}$$

  - ekvivalentní minimalizaci bez odmocniny (kvadrátu normy)
  - $\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ se nazývá reziduum nebo odchylka
  - Řešení minimalizující normu rezidua se nazývá řešení s nejmenšími čtverci

- Pro $\mathbf{A}$ plné sloupcové hodnosti najdeme řešení pomocí pseudoinverze:

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Napasování na data - Data fitting

- Vhodným výběrem koeficientů $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- napasujte funkci (lineární kombinaci bázových funkcí neboli regresorů $g_i(t)$)

$$g(t) = x_1 g_1(t) + x_2 g_2(t) + \cdots + x_n g_n(t)$$

- na data (neboli měření) $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots, (t_n, y_n)$
- tak, aby

$$g(t_1) \approx y_1, g(t_2) \approx y_2, \ldots, g(t_n) \approx y_n$$

- Obvykle je $m \gg n$ a neexistuje přesné řešení $g(t_1) = y_1, g(t_2) = y_2, \ldots, g(t_n) = y_n$
- Takže hledáme nejlepší řešení ve smyslu nejmenších čtverců

$$\min \sum_{i=1}^{m} \left(x_1 g_1(t_i) + x_2 g_2(t_i) + \cdots + x_n g_n(t_i) - y_i \right)^2$$

Napasování na data - Data fitting - pokračování

- Data fitting převedeme na maticový problém

$$\min_{\mathbf{x}} \left\| \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \right\|$$

- pomocí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_1(t_1) & g_2(t_i) & \cdots & g_n(t_1) \\ g_1(t_2) & g_2(t_2) & \cdots & g_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(t_m) & g_2(t_m) & \cdots & g_n(t_m) \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Data fitting s polynomy

- Pro

$$g(t) = x_1 + x_2 t + x_3 l^2 \cdots + x_n t^{n-1}$$

- Jsou bázové funkce

$$g_k(t) = t^{k-1}, k-1, \ldots, n$$

- a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \ldots & t_m^{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

- Při interpolaci je $m = n$ a $g(t_i) = y_i$ splníme přesně řešením $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
- Při aproximaci je $m > n$ a snažíme se o malou odchylku $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$

Identifikace metodou nejmenších čtverců

- Diskrétní lineární model, nazývaný v oblasti identifikace
  Auto-Regressive model with exogenous input (ARX)
- Daný buď lineární diferenční rovnicí se stochastickým členem

$$y(t)+a_1 y(t-1)+\cdots+a_n y(t-n_a)=b_0 u(t)+b_1 u(t-1)+\cdots+b_{n_b} u(t-n_b)+e(t)$$

- nebo přenosem (polynomiálním popisem)

$$a(d)y(t)=b(d)u(t)+e(t) \qquad y(t)=\frac{b(d)}{a(d)}u(t)+\frac{1}{a(d)}e(t)$$

$$a(d)=1+a_1 d+\cdots+a_{n_a} d^{n_a}, b(d)=b_0+b_1 d+\cdots+b_{n_b} d^{n_b}$$

- Pokud je předem známe pevné dopravní zpoždění

$$a(d)y(t)=b(d)u(t-T_d)+e(t) \qquad y(t)=\frac{b(d)}{a(d)}u(t-T_d)+\frac{1}{a(d)}e(t)$$

Jednorázová identifikace

- Celý soubor naměřených dat se zpracuje najednou
- Kompaktně zapsáno $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}$, kde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(m) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -y(0) & -y(-1) & \dots & -y(1-n_a) & u(1) & u(0) & \dots & u(1-n_b) \\ -y(1) & -y(0) & \dots & -y(2-n_a) & u(2) & u(1) & \dots & u(2-n_b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y(m-1) & -y(m-2) & \dots & -y(m-n_a) & u(m) & u(m-1) & \dots & u(m-n_b) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_a} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(m) \end{bmatrix}$$

je vektor měření výstupů, matice dat, vektor parametrů a vektor chyb predikce,

- Hledáme $\min_{\mathbf{x}} \mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$

LS identifikace – další jemnosti

- Stochastický (Bayesovský) přístup – důkazy

- Numerická implementace
  - jednorázová identifikace
  - průběžná identifikace - rekurzivní postup

- Proměnné parametry
  - zapomínání, směrové zapomínání
  - adaptivní řízení

- Zabudování apriorní informace

- Identifikovaný systém není dostatečně vybuzen
  - lineární závislost dat – např. identifikace v uzavřené smyčce
  - návrh experimentu / volba budicího signálu

To vše až v dalších předmětech