

5 - Identifikace



Michael Šebek
Automatické řízení 2018



Získání modelu systému z dat (a jeho validace na jiných datech)

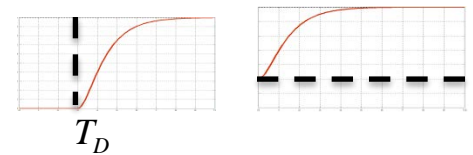
- **white box** (víme vše): ze základních principů (fyz-chem-bio-...)
- **grey box** (víme něco): známe třeba typ modelu, hledáme parametry
- **black box** (nevíme nic): neznáme ani typ modelu, řád, nelinearitu, ...

VARI ukážeme jen to nejjednodušší

- z časové odezvy
- z frekvenční odezvy
- základy nejmenších čtverců

Aproximace ze skokové odezvy (Bump test) experiment přizpůsobíme tomu, že

- hledáme lineární odchytkový model - pozor na pracovní bod a velikost skoku
- klasické, jednoduché, off-line, open-loop, deterministické (jen když ne šумы)
- soustava musí být stabilní!
- případné dopravní zpoždění a offset odečteme předem



1. Změříme skokovou odezvu a naměříme několik vybraných bodů $u(t) = 1(t)$
2. Dosadíme do obecně vypočítané odezvy a řešíme rovnice pro neznámé parametry – je to obtížné, tak hledáme zvláštní hodnoty



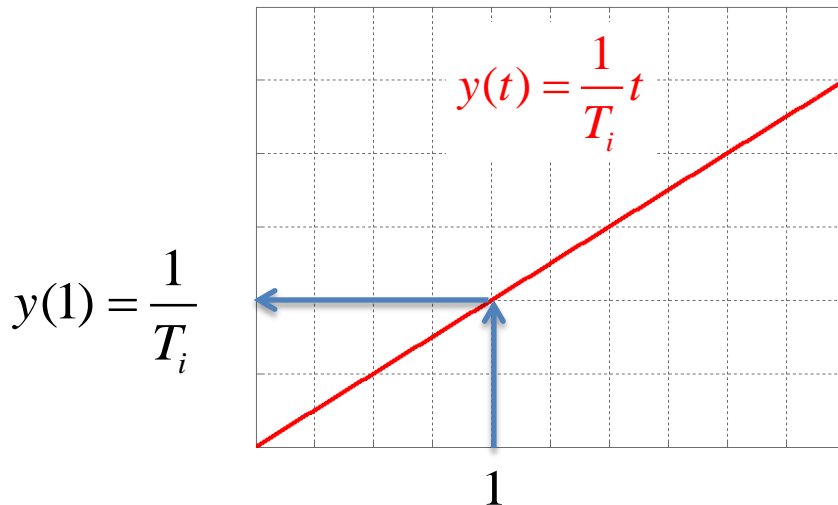
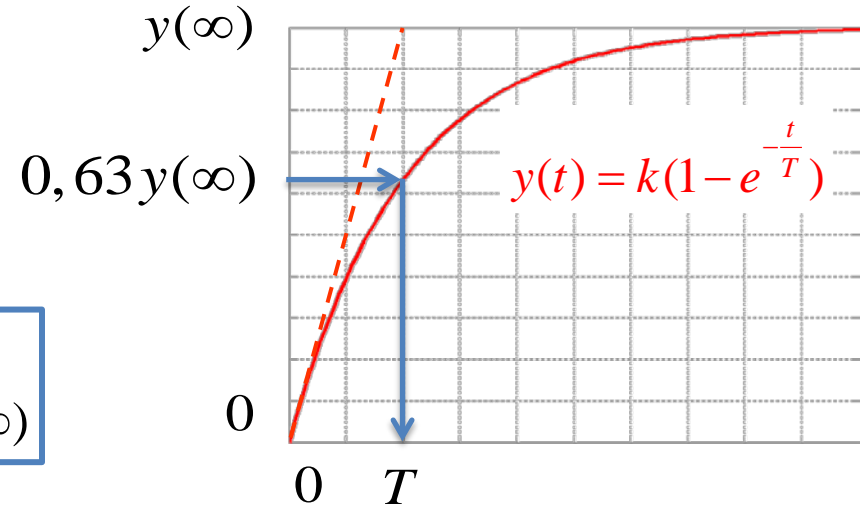
1. řád bez nuly

$$G(s) = \frac{k}{1+Ts}$$

$$y(s) = \frac{k}{1+Ts} \frac{1}{s} = k \left(\frac{1}{s} - \frac{T}{1+Ts} \right)$$

$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$\begin{aligned} k &\leftarrow k = y(\infty) \\ T &\leftarrow y(T) = 0,63y(\infty) \end{aligned}$$



$$G(s) = \frac{1}{T_i s}$$

$$y(s) = \frac{1}{T_i s} \frac{1}{s} = \frac{1}{T_i} \frac{1}{s^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{T_i} t$$

$$T_i = \frac{1}{y(1)}$$



1. řád s nulou

$$G(s) = \frac{1}{T_i s} + k_p = \frac{1 + T_p s}{T_i s}, \quad T_p = k_p T_i$$

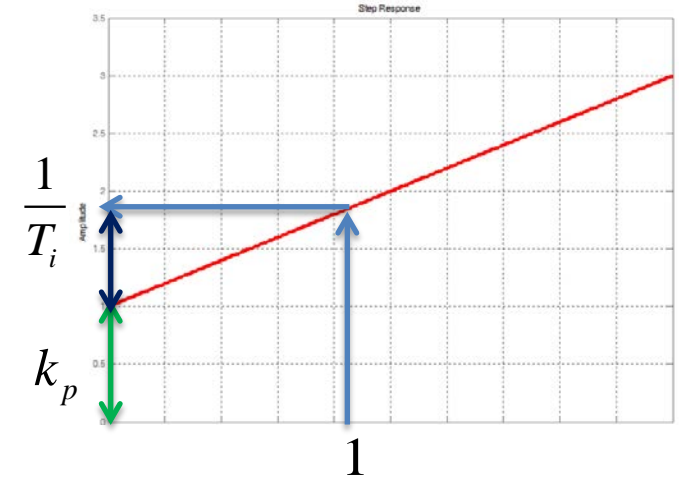
$$y(s) = \left(\frac{1}{T_i s} + k_p \right) \frac{1}{s} = \frac{1}{T_i} \frac{1}{s^2} + k_p \frac{1}{s}$$

$$k_p = y(0)$$

$$T_i = \frac{1}{y(1) - k_p}$$

$$T_p = k_p T_i$$

$$y(t) = \frac{1}{T_i} t + k_p$$

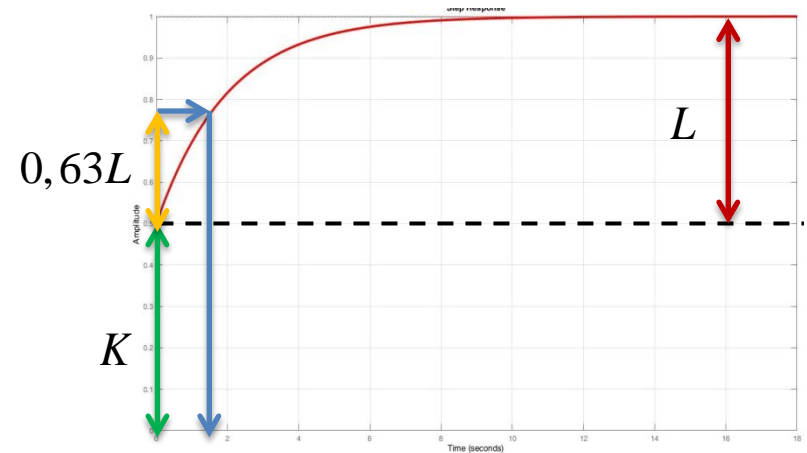


$$G(s) = k \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} = K + \frac{L}{1 + T s}$$

$$K = k \frac{T_1}{T_2}, L = k \frac{T_2 - T_1}{T_2}, T = T_2$$

$$y(t) = k \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) = y(t) = K + L(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$G(s) = K + \frac{L}{1 + T s} = \frac{(1 + T s)K + L}{1 + T s} = \frac{K + L + K T s}{1 + T s} = (K + L) \frac{1 + \frac{K T}{K + L} s}{1 + T s} = k \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}$$



$$K = y(0)$$

$$k = K + L$$

$$L = y(\infty) - K$$

$$T_2 = T$$

$$T \leftarrow y(T) = K + 0,63L$$

$$T_1 = \frac{K T}{K + L}$$



2. řád bez nul - kmitavý případ

Hledáme

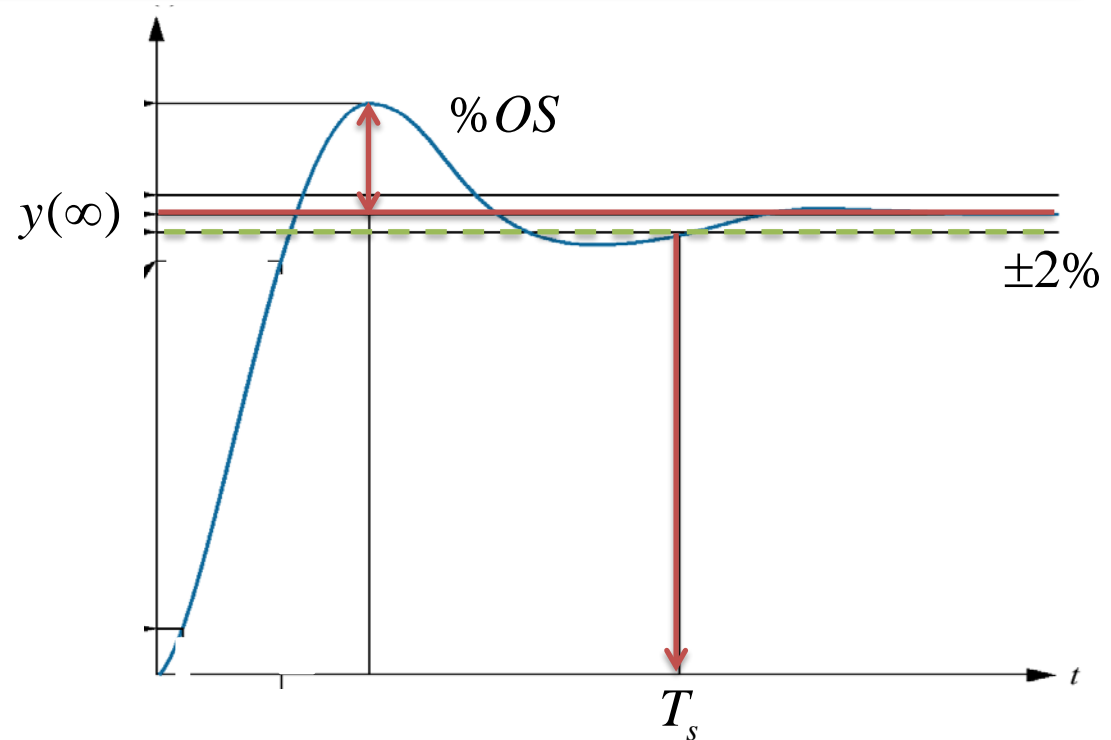
$$G(s) = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

1. Změříme

$$y(\infty), \%OS, T_s$$

2. Vypočteme

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}, \quad \omega_n \doteq \frac{4}{\zeta T_s}, \quad k = y(\infty)$$





2. řád integrační bez nul

System s „integračním chováním“

$$G(s) = \frac{k}{s(Ts+1)} \quad \text{a}$$

$$\frac{k}{s^2(Ts+1)} = \frac{k}{s^2} - \frac{Tk}{s} + \frac{Tk}{s+1/T}$$

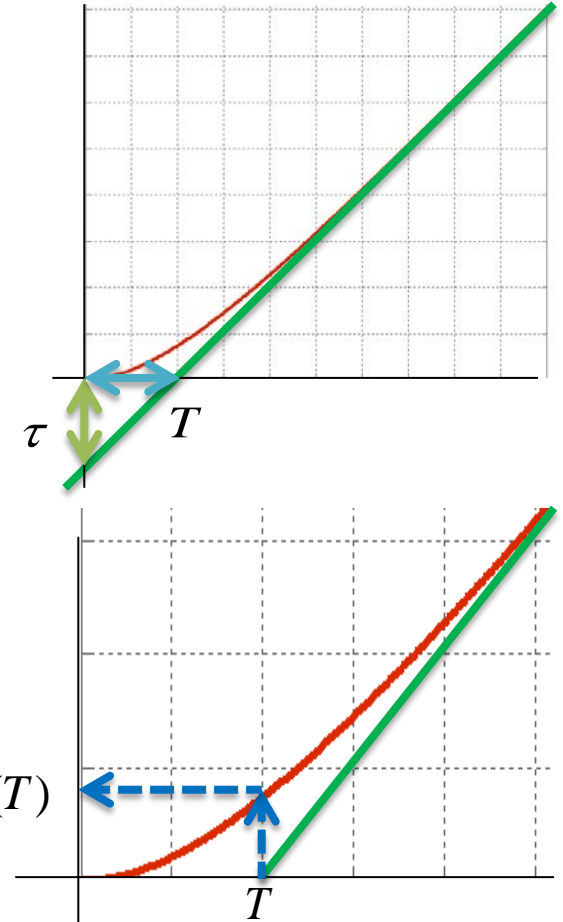
$$h(t) = kt - kT + kTe^{-t/T} \quad h_{\text{asymptota}}(t) = kt - kT = k(t - T)$$

1. nakreslíme asymptotu v nekonečnu
2. odečteme T
3. odečteme τ a vypočteme $k = \frac{\tau}{T}$

Obdobně pro složitější $G(s) = \frac{k}{s(Ts+1)^n}$

1. k = směrnice asymptoty
2. a platí

$$\frac{h(T)}{k} = e^{-n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$



n	1	2	3	4	5
$h(T)/k$	0.37	0.27	0.22	0.20	0.18



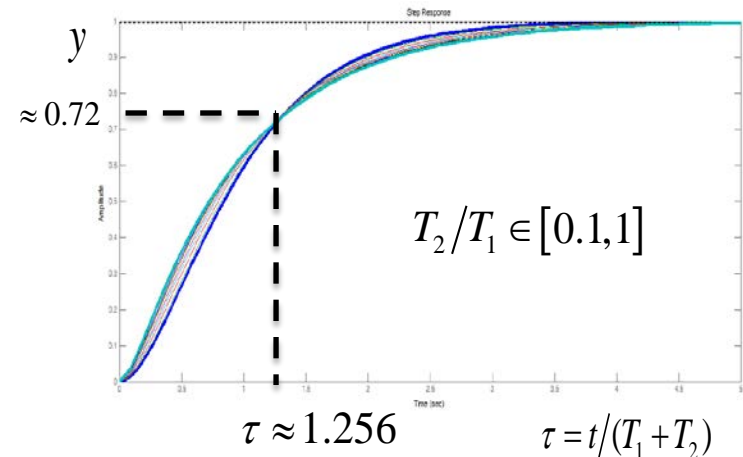
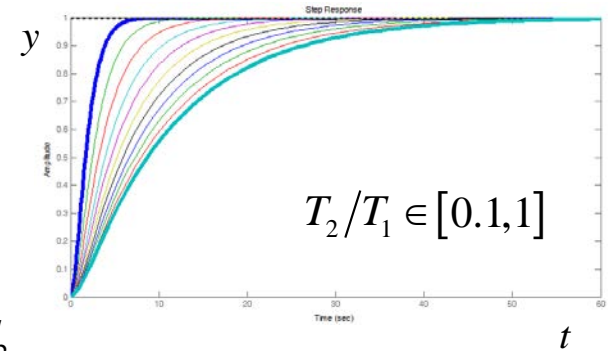
2. řád bez nul - nekmitavý případ

$$G(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)} e^{-sL}, T_2 \leq T_1$$

má skokovou odezvu

$$y(t) = \begin{cases} k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-(t-L)/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-(t-L)/T_2} \right) & T_1 \neq T_2 \\ k \left(1 - e^{-(t-L)/T_1} - \frac{t}{T_1} e^{-(t-L)/T_1} \right) & T_1 = T_2 \end{cases}$$

- Identifikace je obtížná
- graf nahoře: odezvy se zdají být různé,
- ale po normalizaci času na $t/(T_1 + T_2)$ je vidět, že jsou podobné
- Proto je těžké určit parametry robustně ze skokové odezvy, šlo by to lépe z impulzní
- Protínají se přibližně v jednom bodě, toho využívá **Strejcova metoda** – viz příklady





Trik: zbavit se integračního charakteru

Pro systém s „integračním chováním“

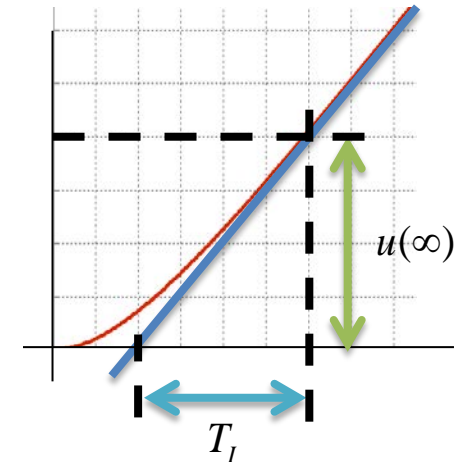
$$G(s) = \frac{1}{T_I s} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (T_k s + 1)}, \quad u(s) = \frac{u(\infty)}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s G(s) u(\infty)) = \frac{u(\infty)}{T_I}$$

1. Nakreslíme asymptotu v nekonečnu
2. Odečteme její směrnici a vypočteme (odečteme) T_I
3. Potom uděláme derivaci odezvy a
4. z ní identifikujeme systém proporcionálního charakteru

Téhož dosáhneme použitím impulzního vstupu

$$\begin{aligned}
 u(t) &= c\delta(t) \\
 u(s) &= c
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 y_{impulse}(s) = G(s)c = G_P(s)c/s$$



$$y_D(s) = sy(s) = sG(s) \frac{u(\infty)}{s}$$

$$G_P(s) = sG(s) = \frac{1}{T_I} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (T_k s + 1)}$$

Jak realizovat Dirac?
Krátkým obdélníkovým pulsem s plochou c !



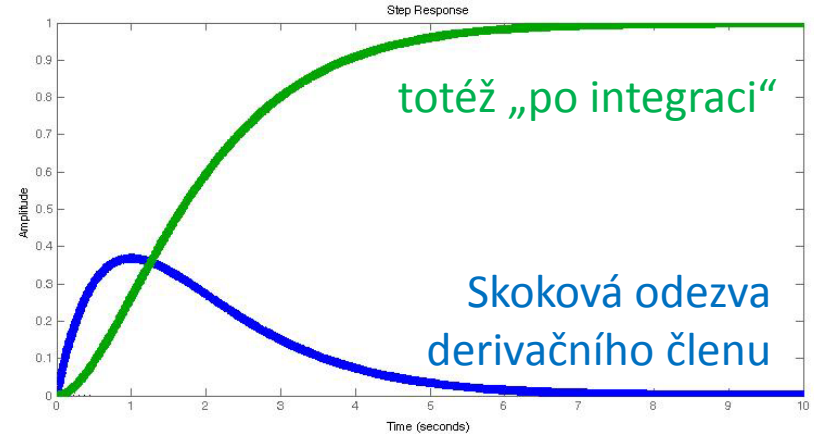
Trik: zbavit se derivačního charakteru (nuly v nule)

- Pro systém „derivačního charakteru“ (tedy s nulou v $s = 0$)

$$G(s) = \frac{T_D s}{\prod (T_i s + 1)}$$

$$y(s) = G(s) \frac{u(\infty)}{s} = \frac{T_D}{\prod (T_i s + 1)} u(\infty)$$

$$y_I(s) = y(s) \frac{u(\infty)}{s} = \frac{T_D}{\prod (T_i s + 1)} \frac{u(\infty)}{s}$$



$$y(\infty) = 0$$

1. Skokovou odezvu derivačního členu nejprve integrujeme
2. A pak identifikujeme vhodnou z předchozích metod

- Téhož dosáhneme vybuzením rampou $u(t) = ct \Leftrightarrow u(s) = c/s^2$.
Pak výstup rovnou odpovídá skokové odezvě systému „proporcionálního charakteru“

$$y_{ramp}(s) = G(s) \frac{c}{s^2} = \frac{T_D}{\prod (T_i s + 1)} \frac{c}{s}$$



Identifikace z frekvenční odezvy

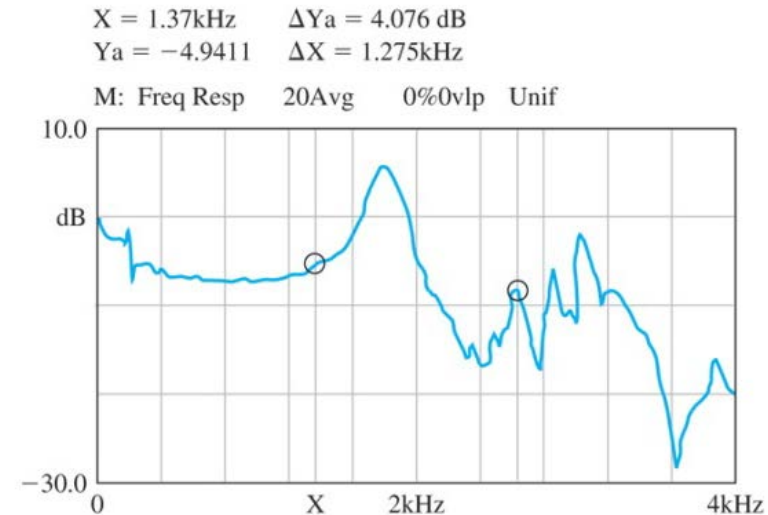
Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Bodeho graf

- Odezva většinou naměřená (spektrálním analyzátozem)
- Nebo „vypočtená“ (FEM z mech. modelu)

Metody

- Podívat se, odhadnout vlastnosti
- a zkusmo napasovat asymptoty
 - Minima \rightarrow frekvence nul
 - Maxima \rightarrow frekvence pólů
 - Dobrý fit v okolí maxim a minim
 - \rightarrow tlumení, násobnosti nul a pólů
 - Potom se najde dopravní zpoždění nastavením fázového Bodeho grafu
- Obecné metody interpolace, fitting, nejmenší čtverce
- Speciální metody (starší) pro Bodeho nebo Nyquistův graf





Nejmenší čtverce – Least Squares

- Přeurčená soustava lineárních rovnic (\mathbf{A} je $m \times n$, $m > n$)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

pokud $\text{rank } \mathbf{A} \neq \text{rank} [\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$ nemá řešení!

- Varianta

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| = \min_{\mathbf{x}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right)^2}$$

- ekvivalentní minimalizaci kvadrátu normy $\min_{\mathbf{x}} \|\cdot\|^2 = \min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right)^2$
- $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ se nazývá reziduum nebo odchylka
- nazývá se **řešení s nejmenšími čtverci**
- Pro \mathbf{A} plné sloupcové hodnoty najdeme řešení pomocí pseudoinverze:
- \mathbf{A} je často **hodně vysoká!**

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$



Identifikace metodou nejmenších čtverců

- Diskrétní lineární model, nazývaný v oblasti identifikace Auto-Regressive Moving-Average model with exogenous input (ARMAX)
- Daný buď lineárními diferenční rovnicí se stochastickým členem

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n_a) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t)$$

- nebo přenosem v operátoru zpoždění (polynomiálním popisem)

$$a(d) y(t) = b(d) u(t) + e(t) \quad y(t) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t) + \frac{1}{a(d)} e(t)$$

$$a(d) = 1 + a_1 d + \dots + a_{n_a} d^{n_a}, b(d) = b_0 + b_1 d + \dots + b_{n_b} d^{n_b}$$

- Nebo v z-transformaci $d = z^{-1}$

$$y = \{y(0), y(-1), y(-2), \dots\} \rightarrow y(z^{-1}) = y(0) + y(-1)z^{-1} + y(-2)z^{-2} + \dots$$

$$y(z^{-1}) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} u(z^{-1}) + \frac{1}{a(z^{-1})} e(z^{-1})$$

$$\frac{\bar{b}(z)}{\bar{a}(z)} = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})}$$

$$a(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}$$

$$b(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}$$

$$\bar{a}(z) = z^{n_a} + a_1 z^{n_a-1} + \dots + a_{n_a}$$

$$\bar{b}(z^{-1}) = b_0 z^{n_b} + b_1 z^{n_b-1} + \dots$$



Identifikace metodou nejmenších čtverců

Řešíme $y(t) = -a_1y(t-1) - \dots - a_ny(t-n_a) + b_0u(t) + b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t)$

$$y(1) = -a_1y(0) - a_1y(-1) - \dots - a_ny(1-n_a) + b_0u(1) + b_1u(0) + \dots + b_{n_b}u(1-n_b) + e(1)$$

$$y(2) = -a_1y(1) - a_1y(0) - \dots - a_ny(2-n_a) + b_0u(2) + b_1u(1) + \dots + b_{n_b}u(2-n_b) + e(2)$$

⋮

kompaktně

$$y(1) = [-y(0), -y(-1), \dots, -y(1-n_a)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + [u(1), u(0), \dots, u(1-n_b)] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix} + e(1)$$

$$y(2) = [-y(1), -y(0), \dots, -y(2-n_a)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + [u(2), u(1), \dots, u(2-n_b)] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix} + e(2)$$



- Označíme naměřená data

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -y(0) & -y(-1) & \dots & -y(1-n_a) & u(1) & u(0) & \dots & u(1-n_b) \\ -y(1) & -y(0) & \dots & -y(2-n_a) & u(2) & u(1) & \dots & u(2-n_b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y(m-1) & -y(m-2) & \dots & -y(m-n_a) & u(m) & u(m-1) & \dots & u(m-n_b) \end{bmatrix}$$

hledané parametry $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_a} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix}$ a neznámý vektor chyb $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(m) \end{bmatrix}$

- a vyjádříme kompaktně
- Hledáme **přibližné řešení**

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{r}\| = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$$



- Stochastický (Bayesovský) přístup – důkazy
- Numerická implementace
 - jednorázová identifikace
 - průběžná identifikace - rekurzivní postup
- Proměnné parametry
 - zapomínání, směrové zapomínání
 - adaptivní řízení
- Zabudování apriorní informace
- Identifikovaný systém není dostatečně vybuzen
 - lineární závislost dat – např. identifikace v uzavřené smyčce
 - návrh experimentu / volba budicího signálu

To vše až v dalších předmětech