# 5 - Identifikace

Michael Šebek

Automatické řízení 2019

02.03.2019

# Identifikace

Získání modelu systému z dat + jeho validace na jiných datech

white box (víme vše): ze základních principů fyziky, chemie, biologie, …

grey box (víme něco): známe třeba typ modelu, hledáme parametry

black box (nevíme nic): neznáme ani typ modelu, řád, nelinearitu, ...

V ARI jen to nejjednodušší

přednáškách i učebnicích používáme nejčastěji white box

odvození ze základních principů a známých parametrů

V této přednášce ukážeme další metody

z časové odezvy - klasicky

z frekvenční odezvy - klasicky

princip moderní metody nejmenších čtverců

# Bump test – Identifikace z odezvy na skok



Klasické, jednoduché, off-line, open-loop, deterministické - když není velký šum

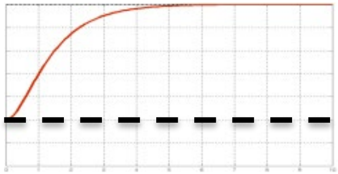
1. Změříme skokovou odezvu a naměříme několik vybraných bodů
2. Dosadíme do obecně vypočítané odezvy a řešíme rovnice pro neznámé parametry – je to obtížné, tak hledáme zvláštní hodnoty

Soustava musí být stabilní!

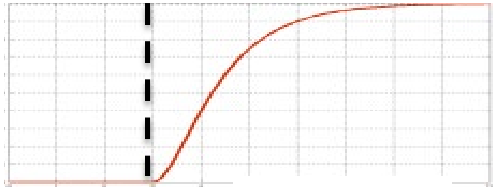
Experiment přizpůsobíme tomu, že hledáme lineární odchylkový model:

tedy pozor na pracovní bod a velikost skoku!

Předem určíme a pak odečteme případný offset



a dopravní zpoždění



$$T_D \rightarrow e^{-sT_D}$$

pro jednoduchost uvažujeme jednotkový skok $u(t) = 1(t)$

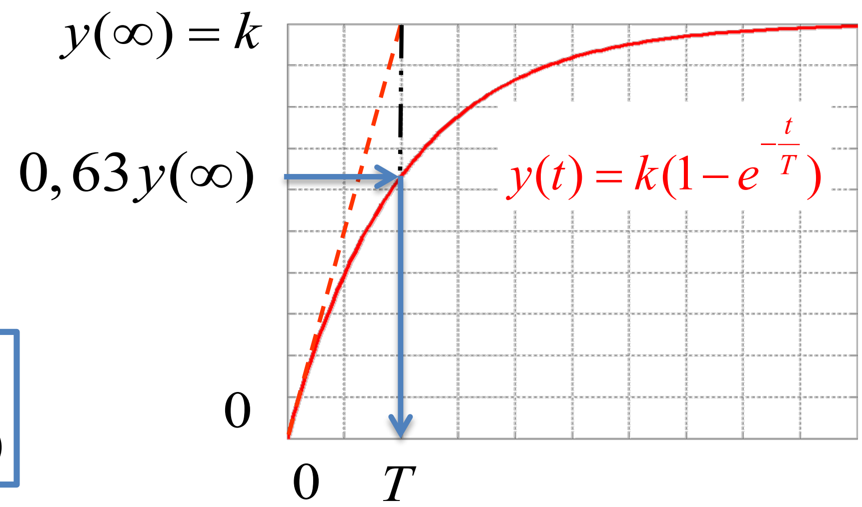
# 1. řád bez nuly

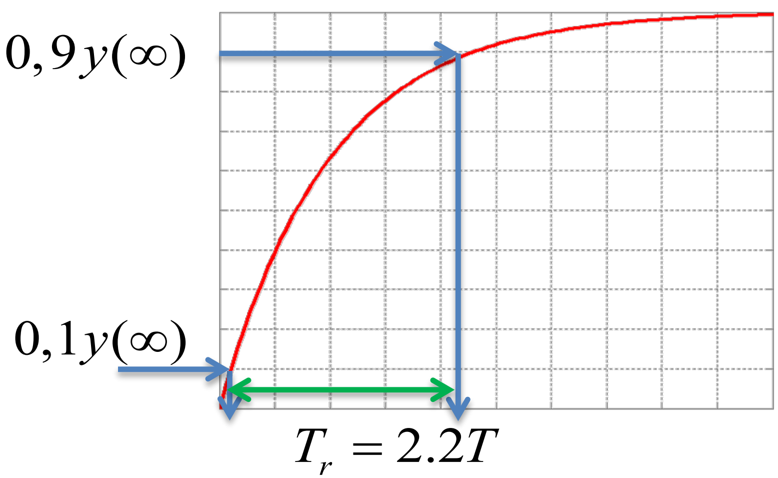
$$G(s)=\frac{k}{1+Ts}$$

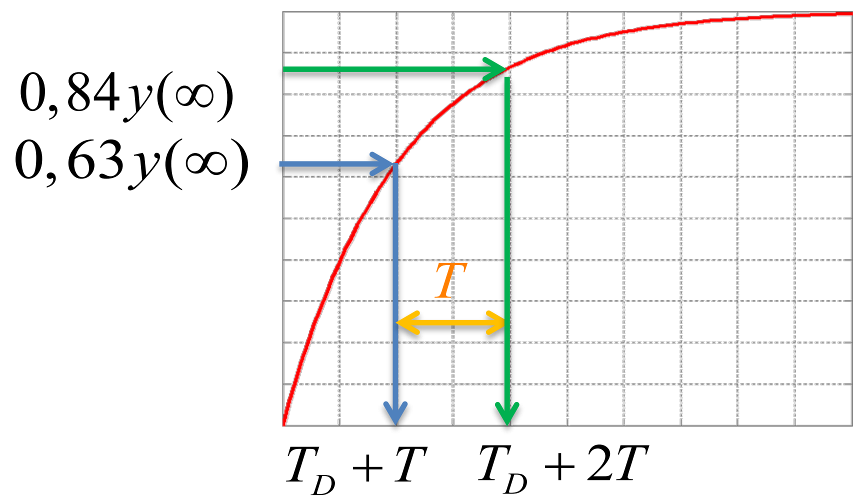
$$y(s)=\frac{k}{1+Ts}\frac{1}{s}=k\left(\frac{1}{s}-\frac{T}{1+Ts}\right)$$

$$y(t)=k(1-e^{-\frac{t}{T}})$$

$$\boxed{\begin{aligned}&k\leftarrow k=y(\infty)\\&T\leftarrow y(T)=0,63y(\infty)\end{aligned}}$$



# 1. řád integrační bez nuly

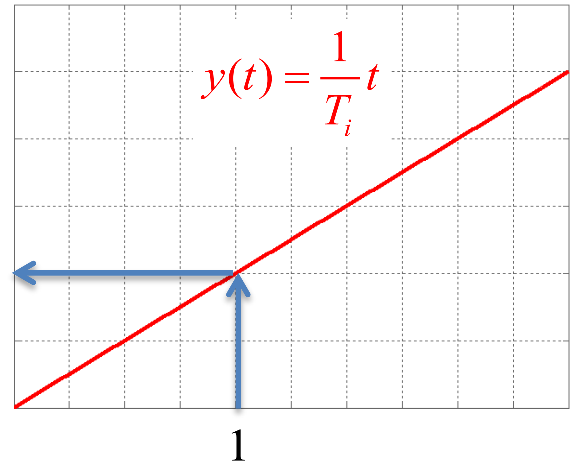


$$G(s)=\frac{1}{T_i s}$$

$$y(s)=\frac{1}{T_i s}\frac{1}{s}=\frac{1}{T_i}\frac{1}{s^2}$$

$$y(t)=\frac{1}{T_i}t$$

$$y(1)=\frac{1}{T_i}$$




$$\boxed{T_i=\frac{1}{y(1)}}$$

$$T_i=\frac{T_d}{\tau}$$

# 1. řád s nulou

$$G(s)=k\frac{1+T_1 s}{1+T_2 s}=K+\frac{L}{1+Ts}$$

$$G(s)=K+\frac{L}{1+Ts}=\frac{(1+Ts)K+L}{1+Ts}=\frac{K+L+KTs}{1+Ts}=(K+L)\frac{1+\frac{KT}{K+L}s}{1+Ts}=k\frac{1+T_1 s}{1+T_2 s}$$

$$K=k\frac{T_1}{T_2},L=k\frac{T_2-T_1}{T_2},T=T_2 \qquad k=K+L,\ T_2=T,\ T_1=\frac{KT}{K+L}$$

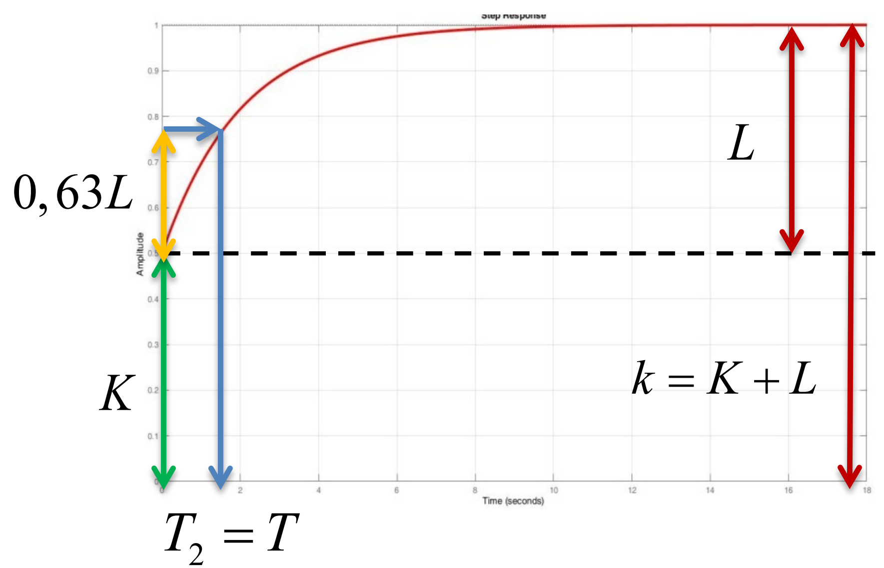
$$y(t)=k\left(1+\frac{T_1-T_2}{T_2}e^{-\frac{1}{T_2}t}\right)$$

$$=K+L(1-e^{-\frac{t}{T}})$$

$$K=y(0)$$

$$L=y(\infty)-K$$

$$T\leftarrow y(T)=K+0{,}63L$$



# 1. řád integrační s nulou

$$G(s)=\frac{1}{T_i s}+k_p=\frac{1+T_p s}{T_i s},\quad T_p=k_pT_i$$

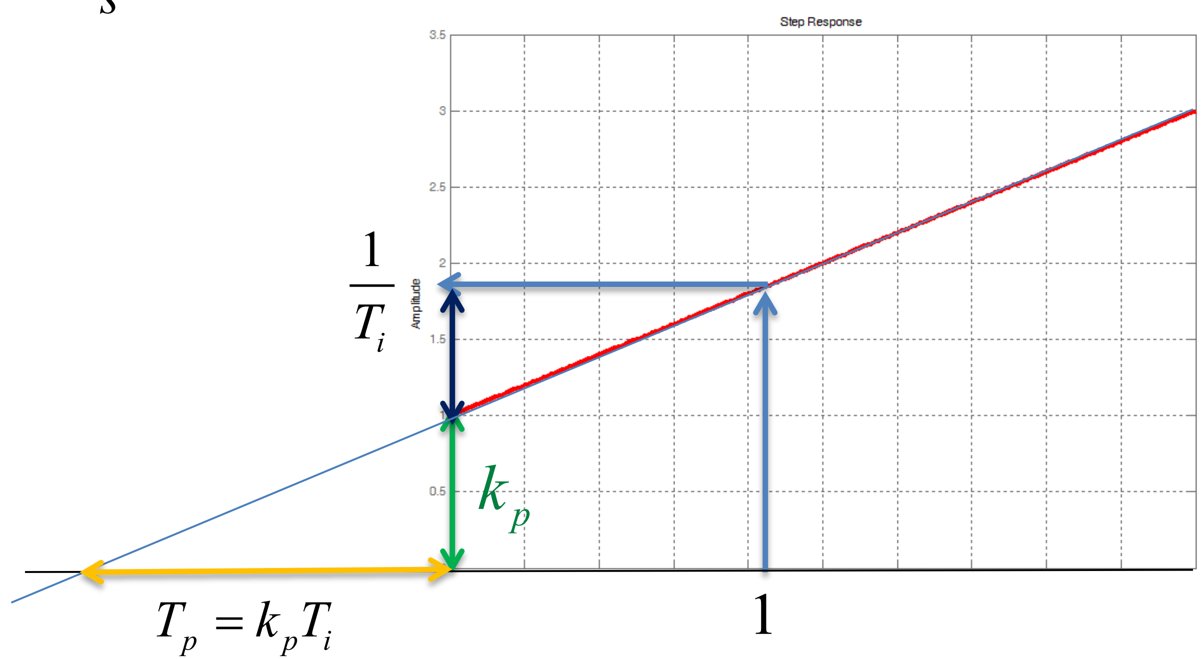
$$y(s)=\left(\frac{1}{T_i s}+k_p\right)\frac{1}{s}=\frac{1}{T_i}\frac{1}{s^2}+k_p\frac{1}{s}$$

$$y(t)=\frac{1}{T_i}t+k_p$$

$$k_p=y(0)$$

$$T_i=\frac{1}{y(1)-k_p}$$

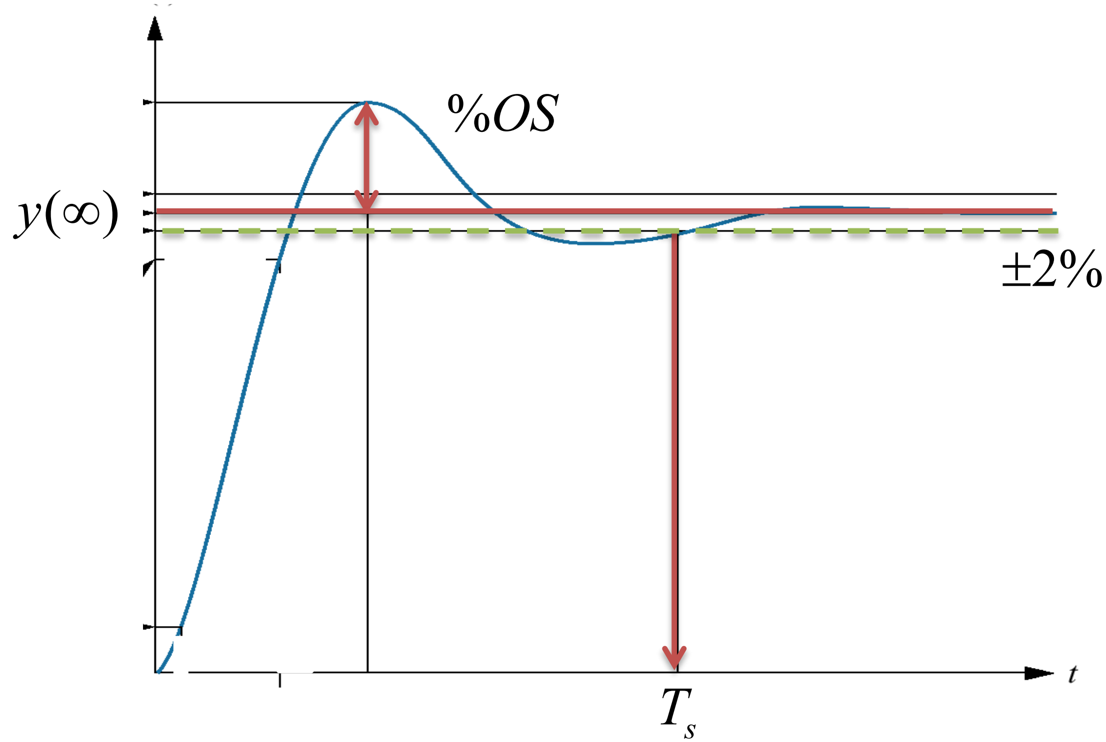
$$T_p=k_pT_i$$



# 2. řád bez nul - kmitavý případ

Hledáme

$$G(s)=k\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$




1. Změříme

$$y(\infty), \%OS, T_s$$

2. Vypočteme

$$\zeta=\frac{-\ln\left(\%OS/100\right)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\left(\%OS/100\right)}},\quad \omega_n \doteq \frac{4}{\zeta T_s},\quad k=y(\infty)$$

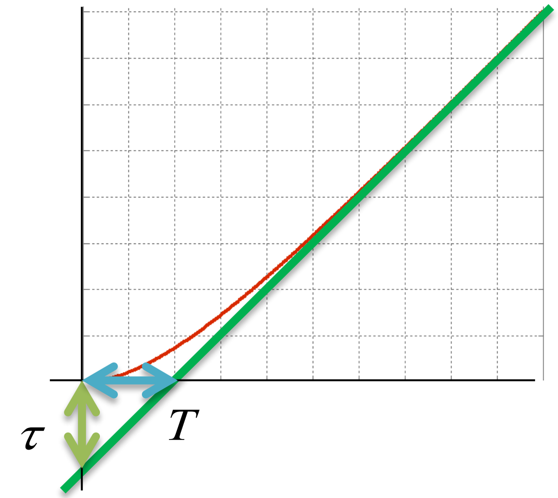
# 2. řád integrační bez nul

## Systém s „integračním chováním“

$$G(s)=\frac{k}{s\left(Ts+1\right)}$$ a

$$\frac{k}{s^2\left(Ts+1\right)}=\frac{k}{s^2}-\frac{Tk}{s}+\frac{Tk}{s+1/T}$$

$$h(t)=kt-kT+kTe^{-t/T} \qquad h_{\text{asymptota}}(t)=kt-kT=k\left(t-T\right)$$

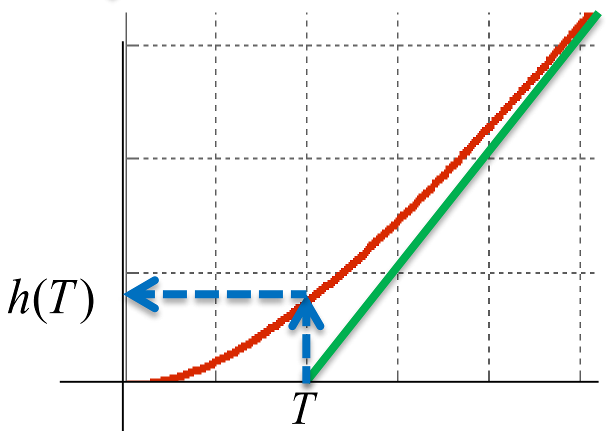



1. nakreslíme asymptotu v nekonečnu
2. odečteme $T$
3. odečteme $\tau$ a vypočteme $k=\dfrac{\tau}{T}$

## Obdobně pro složitější $G(s)=\dfrac{k}{s\left(Ts+1\right)^n}$

1. $\boldsymbol{k}$ = směrnice asymptoty
2. a platí

$$\frac{h(T)}{k}=e^{-n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$



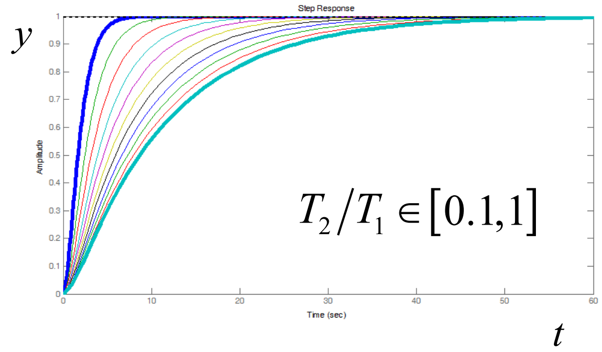

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(T)/k$ | 0.37 | 0.27 | 0.22 | 0.20 | 0.18 |

# 2. řád bez nul - nekmitavý případ

$$G(s)=\frac{k}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}e^{-sL}, T_2 \le T_1$$

má skokovou odezvu

$$y(t)=\begin{cases} k\left(1-\dfrac{T_1}{T_1-T_2}e^{-(t-L)/T_1}-\dfrac{T_2}{T_2-T_1}e^{-(t-L)/T_2}\right) & T_1 \ne T_2 \\ k\left(1-e^{-(t-L)/T_1}-\dfrac{t}{T_1}e^{-(t-L)/T_1}\right) & T_1 = T_2 \end{cases}$$



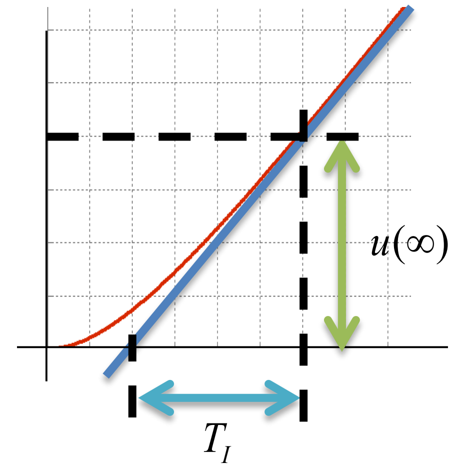

- Identifikace tohoto případu ze skokové odezvy je obtížná
- graf nahoře: odezvy se zdají být různé,
- ale po normalizaci času na $t/(T_1+T_2)$ je vidět, že jsou podobné a protínají se přibližně v jednom bodě
- je těžké určit parametry robustně ze skokové odezvy
- speciální Strejcova metoda je neintuitivní a složitá (viz příklady)
- pokud to jde, identifikujte každý subsystém 1. řádu zvlášť

# Trik: zbavit se integračního charakteru

Pro systém s „integračním chováním“

$$G(s)=\frac{1}{T_I s}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(T_k s+1)},\qquad u(s)=\frac{u(\infty)}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dy(t)}{dt}=\lim_{s\to 0}\left(s^2 y(s)\right)=\lim_{s\to 0}\left(sG(s)u(\infty)\right)=\frac{u(\infty)}{T_I}$$




1. Nakreslíme asymptotu v nekonečnu
2. Odečteme její směrnici a vypočteme (odečteme) $T_I$
3. Potom uděláme derivaci odezvy a
4. z ní identifikujeme systém proporcionálního charakteru

$$y_D(s)=sy(s)=sG(s)\frac{u(\infty)}{s}$$

$$G_P(s)=sG(s)=\frac{1}{T_I}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(T_k s+1)}$$

Téhož dosáhneme použitím impulzního vstupu

$$u(t)=c\delta(t)$$
$$u(s)=c$$

$$\Rightarrow\quad y_{impulse}(s)=G(s)c=G_P(s)c/s$$

Jak realizovat Dirac?
Krátkým obdélníkovým pulsem s plochou c !

# Trik: zbavit se derivačního charakteru (nuly v nule)

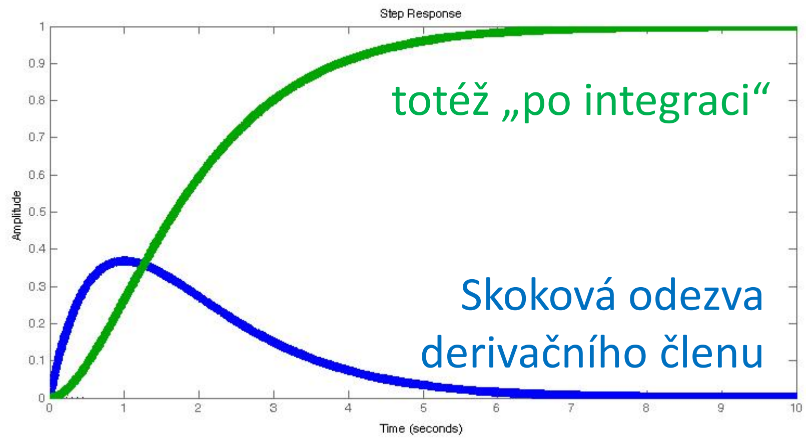


- Pro systém „derivačního charakteru“ (tedy s nulou v $s=0$)

$$G(s)=\frac{T_D s}{\prod(T_i s+1)}$$

$$y(s)=G(s)\frac{u(\infty)}{s}=\frac{T_D}{\prod(T_i s+1)}u(\infty)$$

$$y_I(s)=y(s)\frac{u(\infty)}{s}=\frac{T_D}{\prod(T_i s+1)}\frac{u(\infty)}{s}$$




$$y(\infty)=0$$

1. Skokovou odezvu derivačního členu nejprve integrujeme
2. A pak identifikujeme vhodnou z předchozích metod

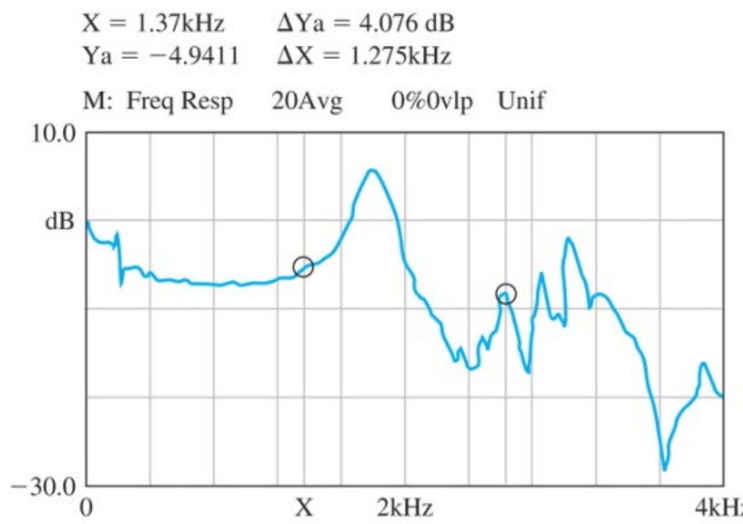
- Téhož dosáhneme vybuzením rampou $u(t)=ct \Leftrightarrow u(s)=c/s^2$ . Pak výstup rovnou odpovídá skokové odezvě systému „proporcionálního charakteru“

$$y_{ramp}(s)=G(s)\frac{c}{s^2}=\frac{T_D}{\prod(T_i s+1)}\frac{c}{s}$$

# Identifikace z frekvenční odezvy

## Bodeho graf

- Odezva většinou naměřená (spektrálním analyzátorem
- Nebo „vypočtená“ (FEM z mech. modelu)




## Metody

- Podívat se, odhadnout vlastnosti
- a zkusmo napasovat asymptoty
  - minima → frekvence nul
  - maxima → frekvence pólů
- dobrý fit v okolí maxim a minim → tlumení, násobnosti nul a pólů
- potom se najde dopravní zpoždění nastavením fázového Bodeho grafu

- Obecné metody interpolace, fitting, nejmenší čtverce
- Speciální metody (starší) pro Bodeho nebo Nyquistův graf

# Nejmenší čtverce – Least Squares

- Přeurčená soustava lineárních rovnic ( $\mathbf{A}$ je $m \times n,\ \ m > n$ )

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

pokud $\operatorname{rank} \mathbf{A} \neq \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ nemá řešení!

- Varianta

$$\min_{\mathbf{x}} \left\| \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \right\| = \min_{\mathbf{x}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)^2}$$

  - ekvivalentní minimalizaci kvadrátu normy $\min_{\mathbf{x}} \left\| . \right\|^2 = \min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)^2$
  - $\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ se nazývá reziduum nebo odchylka
  - nazývá se řešení s nejmenšími čtverci

- Pro $\mathbf{A}$ plné sloupcové hodnosti najdeme řešení pomocí pseudoinverze:

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

- $\mathbf{A}$ je často hodně vysoká!

# Identifikace metodou nejmenších čtverců

- Diskrétní lineární model, nazývaný v oblasti identifikace

  Auto-Regressive Moving-Average model with exogenous input (ARMAX)
- Daný buď lineární diferenční rovnicí se stochastickým členem

$$y(t)+a_1 y(t-1)+\cdots+a_n y(t-n_a)=b_0 u(t)+b_1 u(t-1)+\cdots+b_{n_b} u(t-n_b)+e(t)$$

- nebo přenosem v operátoru zpoždění (polynomiálním popisem)

$$a(d)y(t)=b(d)u(t)+e(t) \qquad y(t)=\frac{b(d)}{a(d)}u(t)+\frac{1}{a(d)}e(t)$$

$$a(d)=1+a_1 d+\cdots+a_{n_a} d^{n_a}, b(d)=b_0+b_1 d+\cdots+b_{n_b} d^{n_b}$$

- Nebo v *z*-transformaci $d=z^{-1}$

$$y=\{y(0),y(-1),y(-2),\ldots\}\rightarrow y(z^{-1})=y(0)+y(-1)z^{-1}+y(-2)z^{-2}+\cdots$$

$$y(z^{-1})=\frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})}u(z^{-1})+\frac{1}{a(z^{-1})}e(z^{-1})$$

$$\frac{\bar{b}(z)}{\bar{a}(z)}=\frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})}$$

$$a(z^{-1})=1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_{n_a} z^{-n_a}$$

$$b(z^{-1})=b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_{n_b} z^{-n_b}$$

$$\bar{a}(z)=z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n_a}$$

$$\bar{b}(z^{-1})=b_0 \check{z}^n+b_1 z^{n-1}+\cdots$$

# Identifikace metodou nejmenších čtverců



Řešíme $y(t) = -a_1 y(t-1) - \cdots - a_n y(t-n_a) + b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \cdots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t)$

$$y(1) = -a_1 y(0) - a_1 y(-1) - \cdots - a_n y(1-n_a) + b_0 u(1) + b_1 u(0) + \cdots + b_{n_b} u(1-n_b) + e(1)$$

$$y(2) = -a_1 y(1) - a_1 y(0) - \cdots - a_n y(2-n_a) + b_0 u(2) + b_1 u(1) + \cdots + b_{n_b} u(2-n_b) + e(2)$$

$$\vdots$$

kompaktně

$$y(1) = \left[-y(0), -y(-1), \ldots, -y(1-n_a)\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \left[u(1), u(0), \ldots, u(1-n_b)\right] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix} + e(1)$$

$$y(2) = \left[-y(1), -y(0), \ldots, -y(2-n_a)\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \left[u(2), u(1), \ldots, u(2-n_b)\right] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix} + e(2)$$

# Jednorázová identifikace

- Označíme naměřená data

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} y(1)\\ y(2)\\ \vdots\\ y(m)\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} -y(0) & -y(-1) & \dots & -y(1-n_a) & u(1) & u(0) & \dots & u(1-n_b)\\ -y(1) & -y(0) & \dots & -y(2-n_a) & u(2) & u(1) & \dots & u(2-n_b)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -y(m-1) & -y(m-2) & \dots & -y(m-n_a) & u(m) & u(m-1) & \dots & u(m-n_b)\end{bmatrix}$$

hledané parametry

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_{n_a}\\ b_0\\ \vdots\\ b_{n_b}\end{bmatrix}$$

a neznámý vektor chyb

$$\mathbf{r}=\begin{bmatrix} e(1)\\ e(2)\\ \vdots\\ e(m)\end{bmatrix}$$

- a vyjádříme kompaktně

$$\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{r}$$

- Hledáme přibližné řešení

$$\min_{\mathbf{x}}\|\mathbf{r}\|=\min_{\mathbf{x}}\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$$