

6 - Spojování systémů a struktury



Michael Šebek
Automatické řízení 2018



- V následujícím budeme různě spojovat dva systémy $i = 1, 2$ s přenosy

$$y_i(s) = F_i(s)u_i(s) \quad F_i(s) = \frac{b_i(s)}{a_i(s)}$$

stavovým popisem

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i u_i$$

$$y_i = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_i u_i$$



a charakteristickými polynomy

$$a_i(s) = \det(s\mathbf{I}_i - \mathbf{A}_i)$$

- Výsledný systém, vzniklý jejich spojením, označíme bez indexu

$$y(s) = F(s)u(s), \quad F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Přičemž složený stav je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

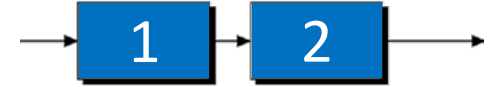
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

$$a(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$



Spojení systémů: kaskáda (série)

- Kaskáda, sériové spojení



$$y(s) = y_2(s) = F_2(s)u_2(s) = F_2(s)y_1(s) = F_2(s)F_1(s)u_1(s) = F_2(s)F_1(s)u(s)$$

$$y(s) = F(s)u(s), F(s) = F_2(s)F_1(s)$$

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_2(s)b_1(s)}{a_2(s)a_1(s)}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \mathbf{x} + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 u$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1u_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1u$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2u_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2(\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1u)$$

$$y = y_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2u_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1u$$

$$a(s) = a_1(s)a_2(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1) \det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2)$$



$$y(s) = y_1(s) + y_2(s) = (F_1(s) + F_2(s))u(s)$$

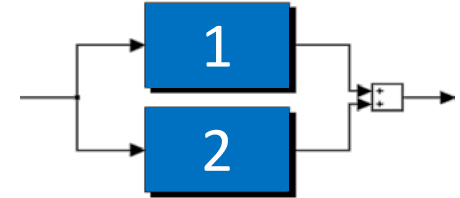
$$y(s) = F(s)u(s), F(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1(s)}{a_1(s)} + \frac{b_2(s)}{a_2(s)} = \frac{a_2(s)b_1(s) + a_1(s)b_2(s)}{a_1(s)a_2(s)}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \mathbf{x} + (\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_1)u$$

$$a(s) = a_1(s)a_2(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1) \det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2)$$





Zpětnovazební spojení

$$\begin{aligned}
 y(s) &= F_1(s)(u(s) - y_2(s)) \\
 &= F_1(s)(u(s) - F_2(s)u_2(s)) \\
 &= F_1(s)u(s) - F_1(s)F_2(s)y(s) \\
 (1 + F_1(s)F_2(s))y(s) &= F_1(s)u(s) \\
 y(s) &= \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}u(s)
 \end{aligned}$$

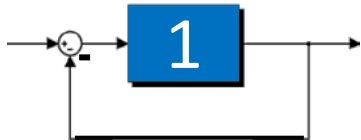
Podmínka $(1 + F_1(s)F_2(s)) \neq 0$!

Varianty:

$$F_2(s) = 1$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)}$$

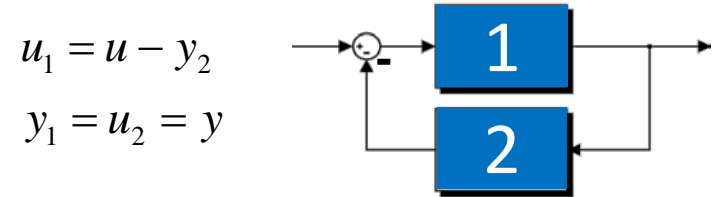
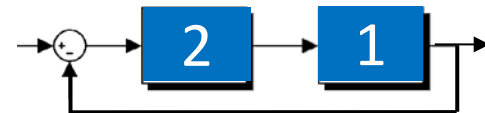
$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1(s)}{a_1(s) + b_1(s)}$$



$$F_1(s) \rightarrow F_1(s)F_2(s)$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)F_2(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1(s)b_2(s)}{a_1(s)a_2(s) + b_1(s)b_2(s)}$$



$$\begin{aligned}
 u_1 &= u - y_2 \\
 y_1 &= u_2 = y
 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{a_2(s)b_1(s)}{a_1(s)a_2(s) + b_1(s)b_2(s)}$$



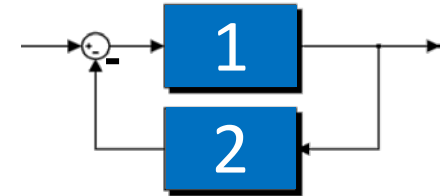
Zpětnovazební spojení stavových modelů

- Bez přímých vazeb
($\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{D}_2 = \mathbf{0}$)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$
$$y = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0}] \mathbf{x}$$

$$u_1 = u - y_2$$

$$y_1 = u_2 = y$$



- Charakteristický polynom

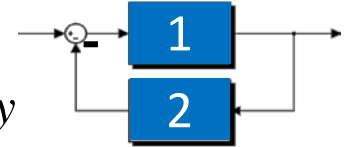
$$c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$= \det(s\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1) \det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2) \det \left(\mathbf{I} - \underbrace{\mathbf{C}_2 (s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{B}_2}_{F_2(s)} \underbrace{\mathbf{C}_1 (s\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1}_{F_1(s)} \right)$$



Obecný případ

$$u_1 = u - y_2, y_1 = u_2 = y$$



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{B}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} u$$

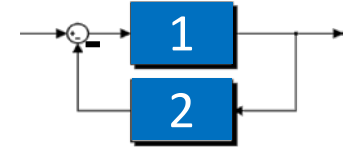
$$y = (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2)^{-1} [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2] \mathbf{x} + (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_1 u$$

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2) \neq 0$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} (1 + f_1(s) f_2(s))$$



Pokud $(1 + F_1(s)F_2(s)) = 0$, složený systém nemá přenos!



Když $\det(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2) = 0$, složený systém nemá stavový popis!

$$\deg a_1(s) < \deg b_1(s) \wedge \deg a_2(s) \geq \deg b_2(s)$$

Platí $\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} (1 + F_1(s)F_2(s))$, takže

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + F_1(s)F_2(s) \neq 0$$

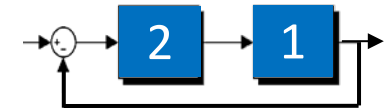
Když je jeden ze subsystémů ryzí a druhý striktně ryzí, pak je výsledný systém ryzí

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{a_2(s)b_1(s)}{a_1(s)a_2(s) + b_1(s)b_2(s)}$$

$$\deg(a_1(s)a_2(s) + b_1(s)b_2(s)) = \deg a_1(s)a_2(s) > \deg b_1(s)a_2(s)$$

Pokud ten striktně ryzí je „1“, pak je výsledek striktně ryzí.

Obojí zřejmé i ze stavového popisu $\mathbf{D} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_1$



Případ se jednotkovou ZV je symetričtější: $\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1(s)b_2(s)}{a_1(s)a_2(s) + b_1(s)b_2(s)}$ kterýkoli striktně ryzí -> výsledek striktně ryzí



Struktura s poruchou a šumem

- Přenos otevřené smyčky

$$L = GK$$

- Přenos na odchylku (citlivost)

$$S = \frac{1}{1 + GK}$$

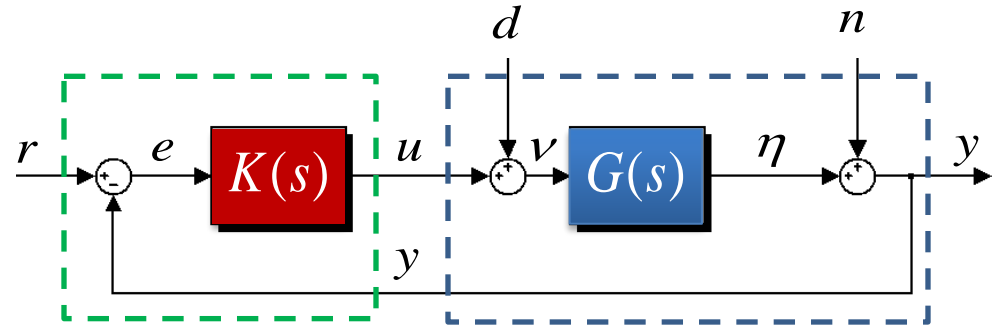
- Přenos uzavřené smyčky (komplementární citlivost)

$$T = \frac{GK}{1 + GK}$$

- Vstupní citlivost (zátěže)
- Výstupní citlivost (šumu)

$$GS = \frac{G}{1 + GK}$$

$$KS = \frac{K}{1 + GK}$$



- s novým označením

$$y = Tr + GSd + Sn \quad \text{výstup}$$

$$\eta = Tr + GSd - Tn$$

$$u = K Sr - Td - KSn \quad \text{akční zásah}$$

$$e = Sr - GSd - Sn$$

$$\varepsilon = Sr - GSd + Tn \quad \text{regulační odchylka}$$

- Vidíme vliv přenosů a můžeme analyzovat. Např.
- „přesné řízení“ vyžaduje $S(s)$ malé



Charakteristický polynom uzavřené smyčky

- Pro $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, $K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$ je $L(s) = G(s)K(s) = \frac{b(s)q(s)}{a(s)p(s)}$

- a tedy

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{a(s)p(s)}{a(s)p(s) + b(s)q(s)}$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{b(s)q(s)}{a(s)p(s) + b(s)q(s)}$$

- Všimněte si, že oba přenosy (a všechny další v CL) mají stejný jmenovatel:

charakteristický polynom uzavřené smyčky

$$c(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s)$$

- Naučte se ho nazpaměť!

