6 - Spojování systémů a struktury

Michael Šebek

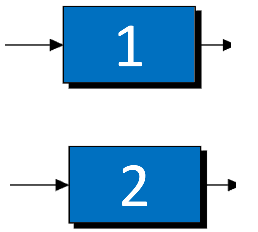
Automatické řízení 2019

04.03.2019

Spojování systémů

- V následujícím budeme různě spojovat dva systémy $i = 1, 2$ s přenosy

$$y_i(s) = F_i(s)u_i(s) \qquad F_i(s) = \frac{b_i(s)}{a_i(s)}$$



stavovým popisem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i u_i \\ y_i &= \mathbf{C}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{D}_i u_i \end{aligned}$$

a charakteristickými polynomy $a_i(s) = \det\left(s\mathbf{I}_i - \mathbf{A}_i\right)$

- Výsledný systém, vzniklý jejich spojením, označíme bez indexu

$$y(s) = F(s)u(s), \quad F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

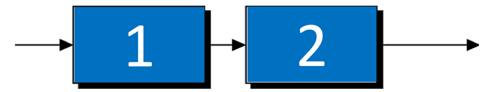
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \\ a(s) &= \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) \end{aligned}$$

- Přičemž složený stav je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

Spojení systémů: kaskáda (série)

- Kaskáda, sériové spojení



$$y(s) = y_2(s) = F_2(s)u_2(s) = F_2(s)y_1(s) = F_2(s)F_1(s)u_1(s) = F_2(s)F_1(s)u(s)$$

$$y(s) = F(s)u(s), F(s) = F_2(s)F_1(s)$$

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_2(s)b_1(s)}{a_2(s)a_1(s)}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 u$$

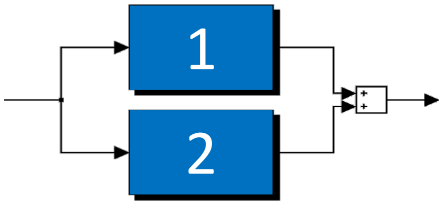
$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 u_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 u$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 u_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\left(\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 u\right)$$

$$y = y_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 u_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 u$$

$$a(s) = a_1(s)a_2(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2)$$

Paralelní spojení systémů



$$y(s) = y_1(s) + y_2(s) = \big(F_1(s) + F_2(s)\big)u(s)$$

$$y(s) = F(s)u(s), F(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1(s)}{a_1(s)} + \frac{b_2(s)}{a_2(s)} = \frac{a_2(s)b_1(s) + a_1(s)b_2(s)}{a_1(s)a_2(s)}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u$$

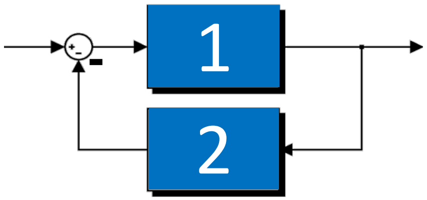
$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \big(\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_1\big)u$$

$$\boxed{a(s) = a_1(s)a_2(s)} = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2)$$

Zpětnovazební spojení systémů

Zpětnovazební spojení

$$u_1 = u - y_2$$
$$y_1 = u_2 = y$$



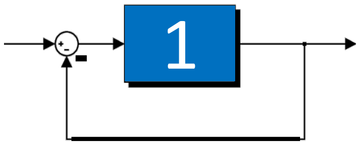
$$y(s) = F_1(s)\big(u(s) - y_2(s)\big)$$
$$= F_1(s)\big(u(s) - F_2(s)u_2(s)\big)$$
$$= F_1(s)u(s) - F_1(s)F_2(s)y(s)$$
$$\big(1 + F_1(s)F_2(s)\big)\,y(s) = F_1(s)u(s)$$
$$y(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}u(s)$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$
$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{a_2(s)b_1(s)}{a_1(s)a_2(s) + b_1(s)b_2(s)}$$

Podmínka $\big(1 + F_1(s)F_2(s)\big) \neq 0$!

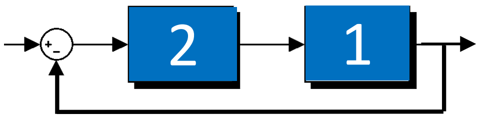
Varianty:

$$F_2(s) = 1$$



$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)}$$
$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1(s)}{a_1(s) + b_1(s)}$$

$$F_1(s) \to F_1(s)F_2(s)$$



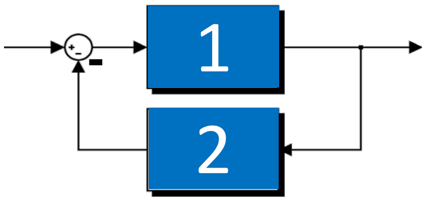
$$F(s) = \frac{F_1(s)F_2(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$
$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1(s)b_2(s)}{a_1(s)a_2(s) + b_1(s)b_2(s)}$$

Zpětnovazební spojení systémů

Zpětnovazební spojení stavových modelů

- Bez přímých vazeb $(\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{D}_2 = \mathbf{0})$

$$u_1 = u - y_2$$
$$y_1 = u_2 = y$$



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Charakteristický polynom

$$\begin{aligned} c(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \det(s\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2)\det\Big(\mathbf{I} - \underbrace{\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2}_{F_2(s)}\underbrace{\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1}_{F_1(s)}\Big) \end{aligned}$$

Zpětnovazební spojení systémů

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2+(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2) \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)^{-1}+\mathbf{I}_2\right)(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & x \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\backslash=\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)^{-1}+\mathbf{I}_2\right)(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & -(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)^{-1}+\mathbf{I}_2\right)(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{I}+\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\right)(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2) \end{bmatrix}$$

$$\det=\det(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)\det\left(\mathbf{I}_1+\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\right)$$

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{F} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}=\det\mathbf{I}_1\det(\mathbf{I}_2+\mathbf{GF})=\det\mathbf{I}_2\det(\mathbf{I}_1+\mathbf{FG})$$

$$\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)^{-1}$$

$$\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1$$

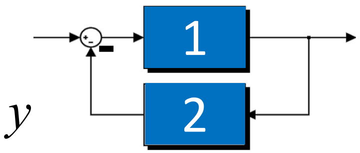
$$c(s)=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$$

$$=\det(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)\det\left(\mathbf{I}-\underbrace{\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2}_{F_2(s)}\underbrace{\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1}_{F_1(s)}\right)$$

Zpětnovazební spojení stavových modelů

Obecný případ

$$u_1 = u - y_2, y_1 = u_2 = y$$



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

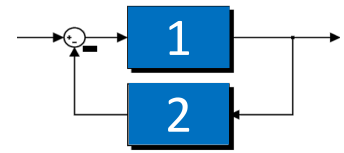
$$+\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1 \\ \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\left[\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\right]\mathbf{x} + \left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1 u$$

$$\det\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right) \neq 0$$

$$\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 = \lim_{s\to\infty}\left(1+f_1(s)f_2(s)\right)$$

Ryzost systému



Pokud $\left(1+F_1(s)F_2(s)\right)=0$, složený systém nemá přenos!

Když $\det\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)=0$, složený systém nemá stavový popis!

$$\deg a_1(s) \dot{<} \deg b_1(s) \wedge \deg a_2(s) \geq \deg b_2(s)$$

Platí $\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 = \lim_{s\to\infty}\left(1+F_1(s)F_2(s)\right)$, takže

$$\det\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)\neq 0 \quad \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \quad 1+F_1(s)F_2(s)\neq 0$$

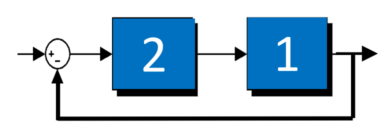
Když je jeden ze subsystémů ryzí a druhý striktně ryzí, pak je výsledný systém ryzí

$$\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{a_2(s)b_1(s)}{a_1(s)a_2(s)+b_1(s)b_2(s)}$$

$$\deg\left(a_1(s)a_2(s)+b_1(s)b_2(s)\right)=\deg a_1(s)a_2(s)) > \deg b_1(s)a_2(s)$$

Pokud ten striktně ryzí je „1“, pak je výsledek striktně ryzí.

Obojí zřejmé i ze stavového popisu $\mathbf{D}=\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1$



Případ se jednotkovou ZV je symetričtější: kterýkoli striktně ryzí -> výsledek striktně ryzí

$$\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{b_1(s)b_2(s)}{a_1(s)a_2(s)+b_1(s)b_2(s)}$$

Ryzost a fyzikální realizovatelnost

Víme: Zesílení systému s přenosem $G(s)=b(s)/a(s)$ na frekvenci ω je $|G(j\omega)|$

Zesílení pro vysoké frekvence

ukazuje chování systému v počátku (času)

Systémy se striktně ryzím přenosem vysoké frekvence nepřenášejí

$$\deg a(s) > \deg b(s) \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} |G(j\omega)| = 0$$

- takové jsou všechny „fyzikální systémy“

Systémy s přenosem ryzím, ale ne striktně

$$\deg a(s) = \deg b(s) \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} |G(j\omega)| = |b_n/a_n| \neq 0, < \infty$$

- vf přenášejí - ve fyzikálním světě nejsou, jinde snad ano,
  také je můžeme dostat zjednodušením složitých ryzích přenosů

Systémy ostře neryzí nekonečné frekvence nekonečně zesilují

- nejsou fyzikálně realizovatelné - přesto se o to občas pokoušíme ☺

$$\deg a(s) < \deg b(s) \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} |G(j\omega)| = \infty$$

Chování „na počátku“ a relativní řád

Řád systému n = dimense stavového prostoru (matice), počet stavů

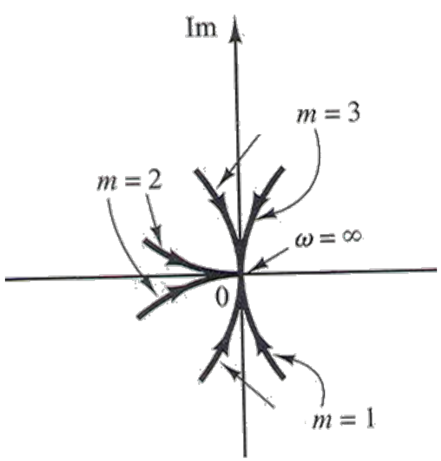
Pokud nemá systém skryté módy (a má ryzí přenos)

$$G(s) = b(s)/a(s), \ \deg a(s) \geq \deg b(s) \quad \Rightarrow \quad n = \deg a(s)$$

U neryzích přenosů (systému) je definice složitější, „řád“ je $n = \deg \begin{bmatrix} a(s) & b(s) \end{bmatrix}$

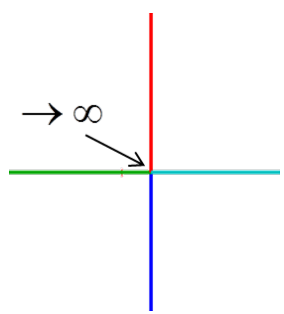
Relativní řád $m = \deg a(s) - \deg b(s)$

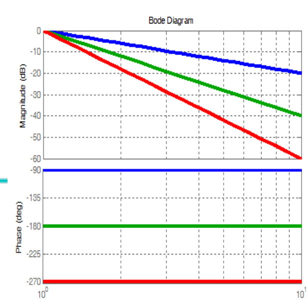
- Pro vysoké frekvence se pro $m \geq 1$ systém chová jako $1/s^m$
  Nyquistův graf končí ($\omega \to \infty$) v počátku a tečna je příslušná osa
- Na koeficientech závisí „směr“ přiblížení, ale ne tečna (jako přímka!)

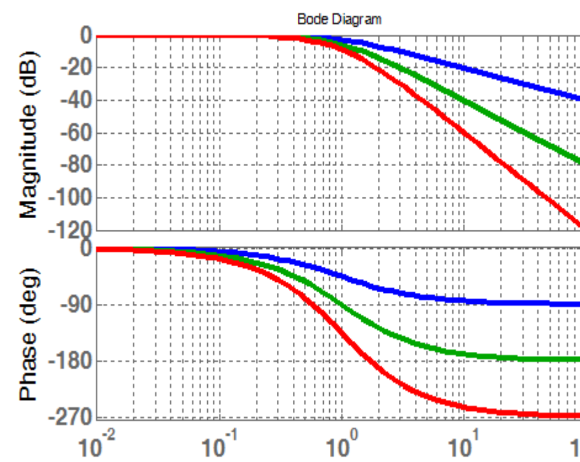


$$1/s^m : \left|1/\omega^m\right| = 1/\omega^m$$

$$\angle 1/(j\omega)^m = -m \times 90^\circ$$







Struktura s poruchou a šumem

- Přenos otevřené smyčky

$$L = GK$$

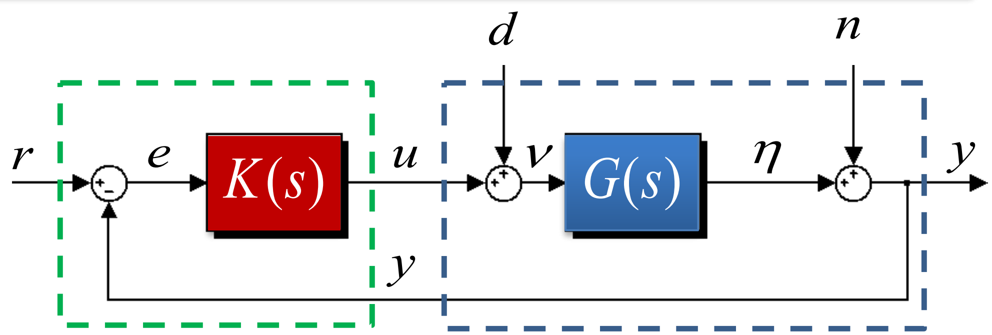
- Přenos na odchylku (citlivost)

$$S = \frac{1}{1+GK}$$

- Přenos uzavřené smyčky (komplementární citlivost)

$$T = \frac{GK}{1+GK}$$

- Vstupní citlivost (zátěže) $$GS = \frac{G}{1+GK}$$
- Výstupní citlivost (šumu) $$KS = \frac{K}{1+GK}$$



- s novým označením

$$y = Tr + GSd + Sn$$ výstup

$$\eta = Tr + GSd - Tn$$

$$u = KSr - Td - KSn$$ akční zásah

$$e = Sr - GSd - Sn$$

$$\varepsilon = Sr - GSd + Tn$$ regulační odchylka

- Vidíme vliv přenosů a můžeme analyzovat. Např.
- „přesné řízení“ vyžaduje $S(s)$ malé

Charakteristický polynom uzavřené smyčky

- Pro $\quad G(s)=\dfrac{b(s)}{a(s)},K(s)=\dfrac{q(s)}{p(s)}\quad$ je $\quad L(s)=G(s)K(s)=\dfrac{b(s)q(s)}{a(s)p(s)}$
- a tedy

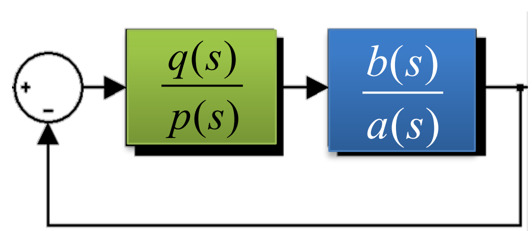
$$S(s)=\frac{1}{1+L(s)}=\frac{a(s)p(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}$$

$$T(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{b(s)q(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}$$

- Všimněte si, že oba přenosy (a všechny další v CL) mají stejný jmenovatel:

charakteristický polynom uzavřené smyčky

$$c(s)=a(s)p(s)+b(s)q(s)$$



- Naučte se ho nazpaměť!