7 - Ustálený stav kmitavý a nekmitavý, sledování a zadržení poruchy

Michael Šebek

Automatické řízení 2019

10.03.2019

Zesílení a fyzikální realizovatelnost

Zesílení systému s přenosem $G(s)=b(s)/a(s)$ na frekvenci ω je $|G(j\omega)|$

Př. přenos $g(s)=\dfrac{s}{s+1}$ má na frekvenci $\omega=1\,\mathrm{rad}/s$ zesílení

$$|g(j1)|=\left|\frac{j}{1+j}\right|=\left|\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Zesílení pro vysoké frekvence

ukazuje chování systému v počátku (času)

Systémy se striktně ryzím přenosem vysoké frekvence nepřenášejí

$$\deg a(s)>\deg b(s)\Rightarrow\lim_{\omega\to\infty}|G(j\omega)|=0$$

- takové jsou všechny „fyzikální systémy“

Systémy s přenosem ryzím, ale ne striktně

$$\deg a(s)=\deg b(s)\Rightarrow\lim_{\omega\to\infty}|G(j\omega)|=|b_n/a_n|\neq 0,<\infty$$

- vf přenášejí - ve fyzikálním světě nejsou, jinde snad ano,
  také je můžeme dostat zjednodušením složitých ryzích přenosů

Systémy ostře neryzí nekonečné frekvence nekonečně zesilují

- nejsou fyzikálně realizovatelné - přesto se o to občas pokoušíme ☺

$$\deg a(s)<\deg b(s)\Rightarrow\lim_{\omega\to\infty}|G(j\omega)|=\infty$$

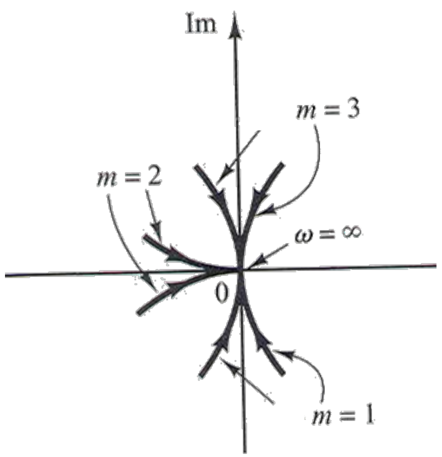
Chování „na počátku“ - řád a relativní řád

- Řád systému *n* = dimense stavového prostoru (matice), počet stavů
  Pokud nemá systém skryté módy (a má ryzí přenos)

$$G(s) = b(s)/a(s),\ \deg a(s) \geq \deg b(s) \quad \Rightarrow \quad n = \deg a(s)$$

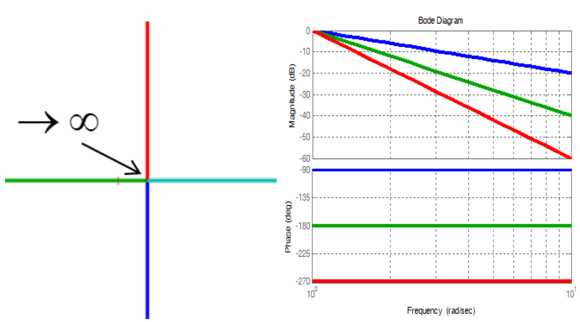
- U neryzích přenosů (systému) je definice složitější

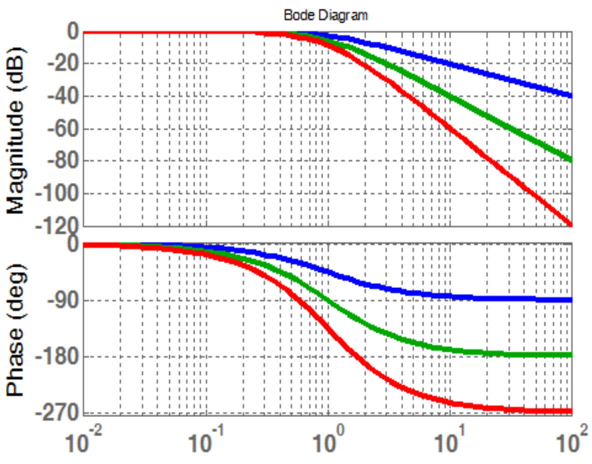
- Relativní řád $m = \deg a(s) - \deg b(s)$
- Pro vysoké frekvence se pro $m \geq 1$ systém chová jako $1/s^m$
  Nyquistův graf končí ($\omega \to \infty$) v počátku a tečna je příslušná osa



$$1/s^m : \left|1/\omega^m\right| = 1/\omega^m$$

$$\angle 1/(j\omega)^m = -m \times 90^\circ$$





DC gain - ustálené zesílení

- speciálně zesílení na nulové frekvenci (ustálené zesílení, DC zesílení) je

$$\left|G(j0)\right| = \lim_{\omega\to 0}\left|G(j\omega)\right| = \lim_{s\to 0} G(s)$$

- tedy chování systému „v nekonečnu“ (v ustáleném stavu) je dáno „chováním přenosu“ v počátku
- Ale pozor: Přenos musí být stabilní, jinak se výstup vůbec neustálí

Pro stavový model

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)\\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned} \to G(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \to G(0) = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Pro vnější model

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \to G(0) = \frac{b(0)}{a(0)} = \frac{b_0}{a_0} = \begin{cases} 0 \ldots b_0 = 0, a_0 \neq 0 \\ \pm\infty \ldots a_0 = 0, b_0 \neq 0 \\ c \neq 0, \neq \pm\infty \ldots a_0 \neq 0, b_0 \neq 0 \end{cases}$$

Typ systému neboli astatismus

- Při zkoumání ustáleného stavu rozlišujeme typ systému podle existence pólu $s=0$ a jeho násobnosti

- Systém bez pólu v $s=0$ je typu 0 („statický“)

$$f_0(s)=k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots}{(s+p_1)(s+p_2)\dots},\quad p_i,z_i\neq 0 \qquad \lim_{s\to 0} f_0(s)=f_0(0)=k\frac{z_1z_2\dots}{p_1p_2\dots}=K_{\text{Bode}}$$

- Systém s jednonásobným pólem v $s=0$ je typu 1 (astatický 1. řádu)

$$f_1(s)=k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots}{s(s+p_1)(s+p_2)\dots},\quad p_i,z_i\neq 0 \qquad \left|f_1(0)\right|=\infty,\quad \lim_{s\to 0} sf_1(s)=K_{\text{Bode}}$$

- Systém s dvojnásobným pólem v $s=0$ je typu 2 (astatický 2. řádu)

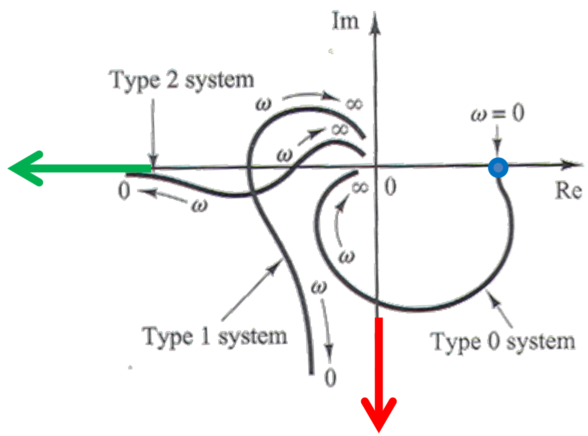
$$f_2(s)=k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots}{s^2(s+p_1)(s+p_2)\dots},\quad p_i,z_i\neq 0 \qquad \left|f_2(0)\right|=\infty,\quad \lim_{s\to 0} sf_2(s)=\infty,$$

$$\lim_{s\to 0} s^2 f_2(s)=K_{\text{Bode}}$$

- ...

Typ systému (astatismus) ve frekvenční oblasti

- Systém typu l se pro malé frekvence chová jako K_{Bode}/s^l



$$\omega \to 0^+ :$$

$$g(j\omega) \approx K_{\text{Bode}}/(j\omega)^l$$

$$|g(j\omega)| \approx |K_{\text{Bode}}/(j\omega)^l| = |K_{\text{Bode}}|/|\omega|^l$$

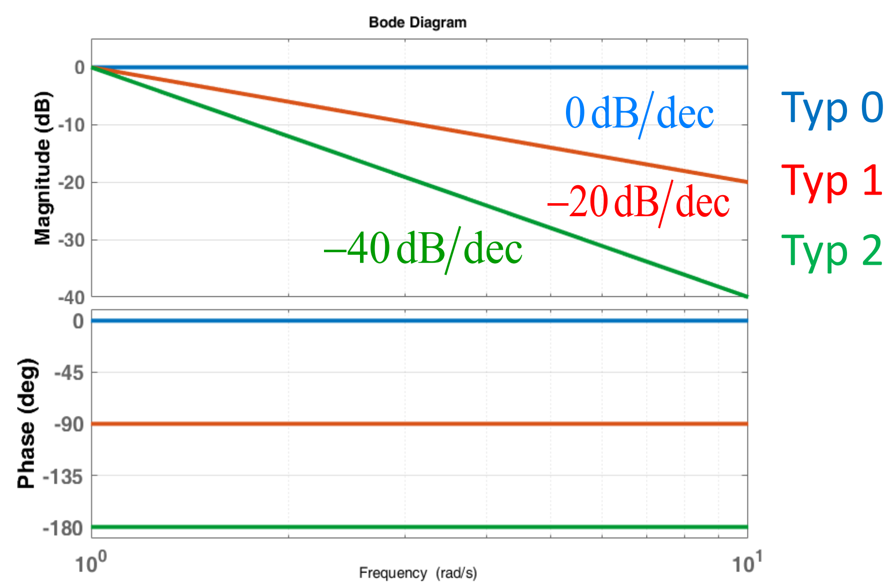
$$\angle g(j\omega) \approx -90^\circ \times l \times \text{sign}(K_{\text{Bode}})$$

asymptota pro nízké frekvence

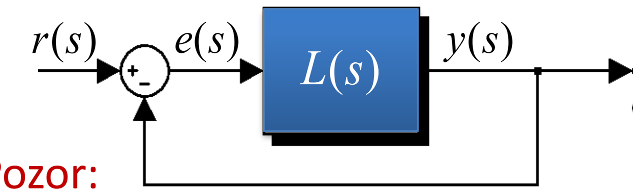
$$f_{0,\text{asymp}}(s) = K_{\text{Bode}}$$

$$f_{1,\text{asymp}}(s) = \frac{K_{\text{Bode}}}{s}$$

$$f_{2,\text{asymp}}(s) = \frac{K_{\text{Bode}}}{s^2}$$



Odchylka pro jednotkovou ZV



Pozor:
Uzavřená smyčka musí být stabilní!
Jinak by se odezva vůbec neustálila.

- odchylka pro strukturu s jednotkovou ZV

$$e(s) = S(s)r(s) = \frac{1}{1+L(s)}r(s)$$

- ustálená hodnota odchylky je

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} se(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+L(s)}r(s)$$

- speciálně ustálená odezva na skok je

$$e_{\text{step,ss}} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+L(s)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} L(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

konstanta (odchylky) polohy

- ustálená odezva na skok je nulová jen když $K_p = \lim\limits_{s\to 0} L(s) = \infty$
- tj. když přenos soustavy + regulátoru
  má aspoň jeden pól v nule

$$L(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots}{s^n(s+p_1)(s+p_2)\ldots}, \quad n \geq 1$$

- tedy když soustava má astatismus (typ) alespoň 1
  a „umí skok sama vygenerovat“

Odchylka pro jednotkovou ZV

- ustálená odezva na rampu je

konstanta rychlosti

$$e_{\text{ramp,ss}} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+L(s)}\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sL(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sL(s)} = \frac{1}{K_v}$$

- ustálená odezva na rampu je nulová tedy když přenos má aspoň dva póly v nule

$$\Leftrightarrow \quad K_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \infty$$

$$L(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots}{s^n(s+p_1)(s+p_2)\ldots}, \quad n \geq 2$$

umí rampu generovat

- pro ***n*** = 1 je odchylka konečná ale nenulová
- pro ***n*** = 0 je nekonečná
- ustálená odezva na parabolu je

konstanta zrychlení

$$e_{\text{parabola,ss}} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+L(s)}\frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2L(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2L(s)} = \frac{1}{K_a}$$

- ustálená odezva na parabolu je nulová tedy když ***n*** ≥ 3 , tj. přenos má aspoň tři póly v nule

$$\Leftrightarrow \quad K_a = \lim_{s\to 0} s^2L(s) = \infty$$

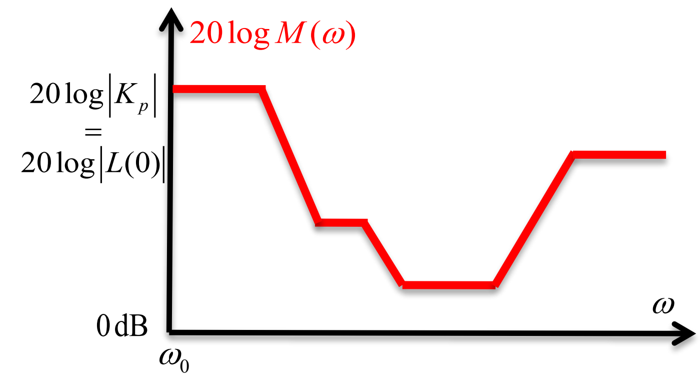
umí parabolu generovat

- pro ***n*** = 2 je tu odchylka konečná ale nenulová
- pro ***n*** ≤ 1 je nekonečná
- konstanty se někdy používají ke specifikaci návrhu

Ustálená odchylka z frekvenční odezvy

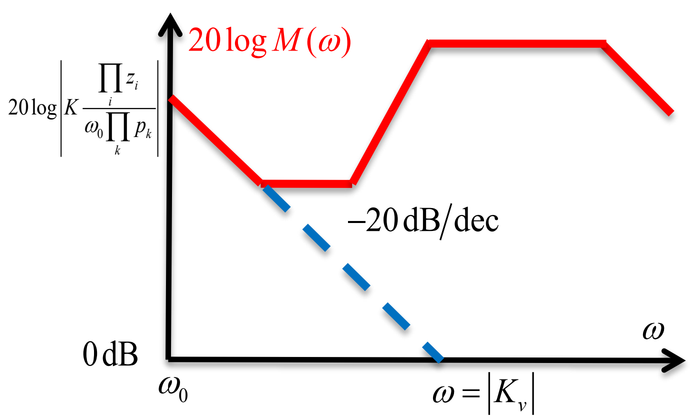
- Typ 0 (bez astatismu): počáteční hodnota (asymptota pro nízké frekvence)

$$K_p = \lim_{s \to 0} L(s) \Rightarrow e_{\text{step,ss}} = \frac{1}{1+K_p}$$



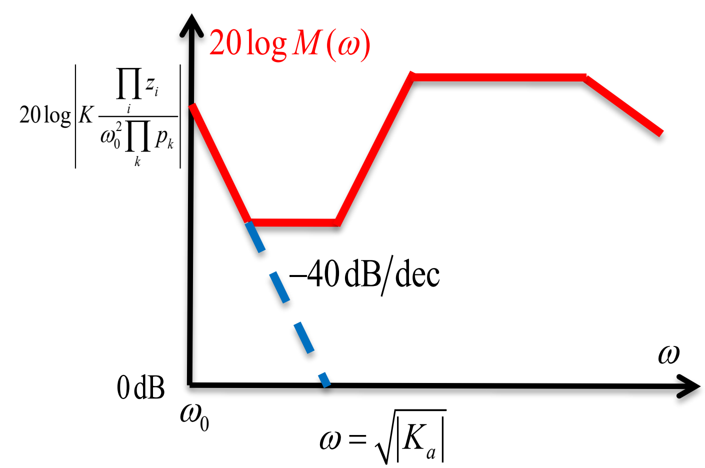
- Typ 1 (astatismus 1. řádu)

$$K_v = \lim_{s \to 0} sL(s) \Rightarrow e_{\text{ramp,ss}} = \frac{1}{K_v}$$



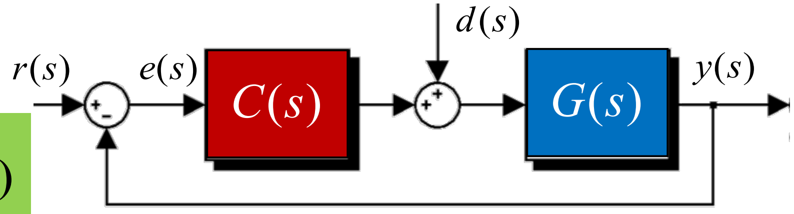
- Typ 2 (astatismus 2. řádu)

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 L(s) \Rightarrow e_{par,ss} = \frac{1}{K_a}$$



Ustálená odchylka s poruchou při jednotkové ZV

- Při typické struktuře s jednotkou ZV je přenos ref. a poruchy na odchylku



$$e(s)=\frac{1}{1+G(s)C(s)}r(s)-\frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}d(s)$$

- Vliv reference už známe, zkoumejme teď odchylku způsobenou poruchou
- Pro stabilní smyčku je její ustálená hodnota

$$e_d(s)=-\frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}d(s)$$

$$e_{d,ss}=\lim_{s\to 0} s e_d(s)=-\lim_{s\to 0}\frac{sG(s)}{1+G(s)C(s)}d(s)$$

- pro skokovou poruchu $d(s)=1/s$ to je

$$e_{d,step}(\infty)=-\lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}=-\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\left(1/G(s)\right)+\lim\limits_{s\to 0}\left(C(s)\right)}$$

- Malou odchylku zajistíme „velkým“ C a/nebo „malým“ G
- Odchylka je nulová když má regulátor pól v 0 nebo soustava nulu v 0
- Pozor: pól soustavy v 0 tady nepomůže!

$$e_{r,step}(\infty)=e_{d,step}(\infty)=0$$

- Ale když má soustava nulu v 0, nejde dát reg. pól v 0, takže nelze současně ↑