# 7 - Ustálený stav kmitavý a nekmitavý, sledování a zadržení poruchy

Michael Šebek

Automatické řízení 2017

13-3-17

# Frekvenční odezva, charakteristika, přenos



- Má-li stabilní LTI systém $y(s) = G(s)u(s)$ na vstupu $u(t) = a\sin\omega t$, pak po odeznění přechodového jevu má na výstupu sinusový signál

$$y_{ss}(t) = a\left|G(j\omega)\right|\sin(\omega t + \varphi)$$

- který má stejnou frekvenci $\omega$, amplitudu zesílenou $\left|G(j\omega)\right|$-krát a fázový posun

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} g(j\omega)}{\operatorname{Re} g(j\omega)}$$

- Na výstupu stabilního LTI systému jsou v ustáleném stavu stejné frekvence jako na vstupu proto má smysl frekvenční charakteristika (přenos)

$$G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}$$

- Při přechodu jsou na výstupu i vlastní frekvence generované systémem
- Nestabilní systém se neustálí, frekvenční odezvu nejde změřit a fakticky nemá smysl. Přesto se hodí ji používat, formálně definovanou jako $G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}$
- Nelineární systém může mít i v ustáleném stavu na výstupu nové frekvence, které vstup nemá - pojem frekvenční odezva tu nemá vůbec žádný smysl

# Zesílení a fyzikální realizovatelnost

- zesílení systému na frekvenci $\omega$ je $|G(j\omega)|$
- speciálně zesílení na nulové frekvenci (ustálené zesílení, DC zesílení) je

$$|G(j0)| = \lim_{\omega\to 0}|G(j\omega)| = \lim_{s\to 0} G(s)$$

- chování systému „v nekonečnu“ (v ustáleném stavu) je tedy dáno „chováním přenosu“ v počátku
- důležité je i zesílení pro $\omega\to\infty$ (rozhoduje o chování systému v počátku)
- systém se striktně ryzím přenosem vysoké frekvence nepřenášejí

$$G(s) = b(s)/a(s), \qquad \deg a(s) > \deg b(s) \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty}|G(j\omega)| = 0$$

  takové jsou všechny „fyzikální systémy“
- systémy s $$\deg a(s) = \deg b(s) \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty}|G(j\omega)| = |b_n/a_n| \neq 0, < \infty$$

  je přenášejí: ve fyzikálním světě nejsou, jinde snad ano, také je můžeme dostat zjednodušením složitých ryzích přenosů
- systémy ostře neryzí nekonečné frekvence nekonečně zesilují

$$\deg a(s) < \deg b(s) \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty}|G(j\omega)| = \infty$$

- nejsou fyzikálně realizovatelné - přesto se o to občas pokoušíme ☺

# Řád a relativní řád

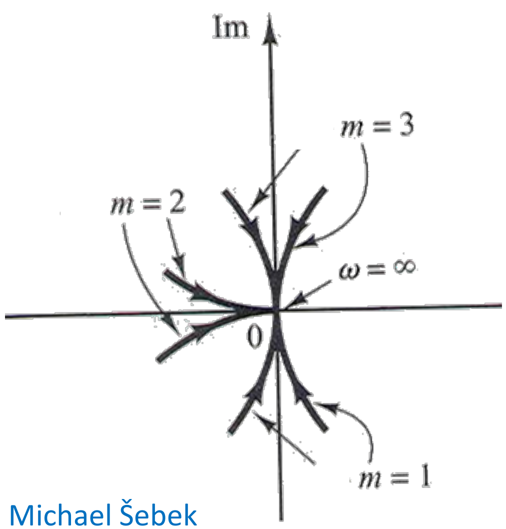
- Řád systému *n* = dimense stavového prostoru (matice), počet stavů
- Pokud nemá systém skryté módy (a má ryzí přenos)

$$G(s)=b(s)/a(s),\ \deg a(s)\geq \deg b(s) \quad \Rightarrow \quad n=\deg a(s)$$

- U neryzích přenosů (systému) je definice složitější
- Relativní řád

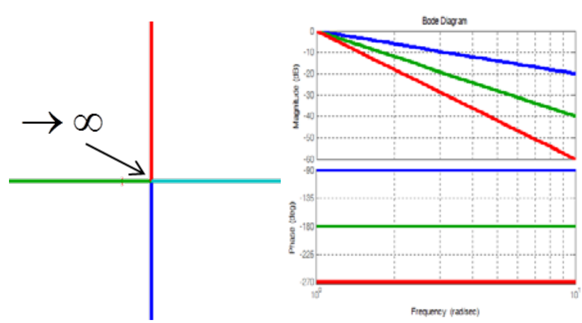
$$m=\deg a(s)-\deg b(s)$$

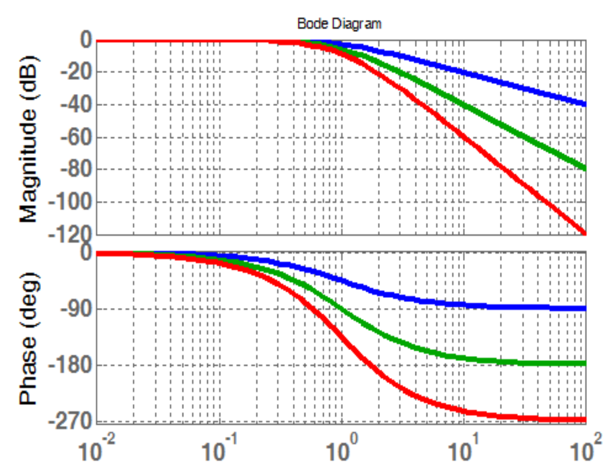
- Pro vysoké frekvence se pro $m\geq 1$ systém chová jako $1/s^m$
  Nyquistův graf končí ( $\omega\to\infty$ ) v počátku a tečna je příslušná osa




$$1/s^m : \left|1/\omega^m\right| = 1/\omega^m$$

$$\angle 1/(j\omega)^m = -m\times 90^\circ$$



# Typ systému neboli astatismus

- Při zkoumání ustáleného stavu rozlišujeme typ systému podle existence pólu $s=0$ a jeho násobnosti

- Systém bez pólu v $s=0$ je typu 0 („statický“)

$$F(s)=k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots},\quad p_i,z_i\neq 0$$

- Systém s jednonásobným pólem v $s=0$ je typu 1 (astatický 1. řádu)

$$F(s)=k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots}{s(s+p_1)(s+p_2)\ldots},\quad p_i,z_i\neq 0$$

- Systém s dvojnásobným pólem v $s=0$ je typu 2 (astatický 2. řádu)

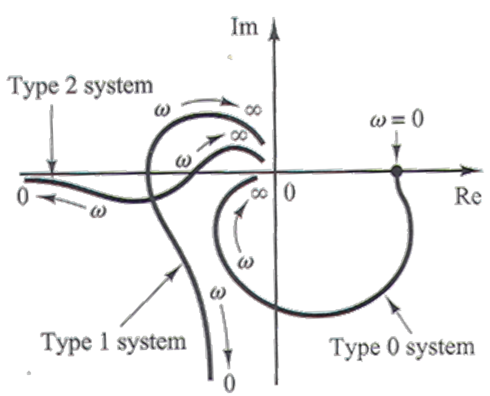
$$F(s)=k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots}{s^2(s+p_1)(s+p_2)\ldots},\quad p_i,z_i\neq 0$$

- atd.

# Typ systému (astatismus) ve frekvenční oblasti

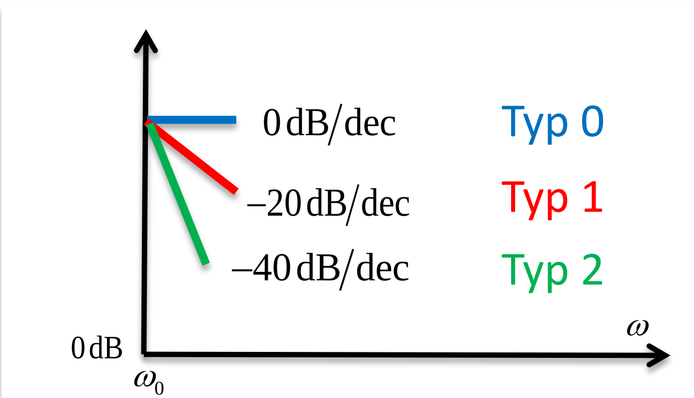


- Systém typu $l$ se pro malé frekvence chová jako $k/s^l$




$$\omega \to 0 : G(j\omega) \approx k/(j\omega)^l$$

$$\lim_{\omega \to 0+} \angle g(j\omega) = -90^\circ \times l \times \mathrm{sign}(k)$$




asymptota pro nízké frekvence

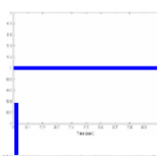
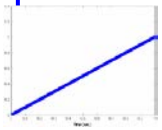
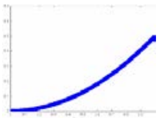
# Typické referenční signály pro analýzu



- Kromě přechodového jevu nás zajímá i chování systému v ustáleném stavu
- Např. při řízení polohy (polohování) nebo při sledování referenčního signálu (servo, tracking problem)

- Základní mírou kvality sledování je ustálená odchylka, tedy rozdíl mezi vstupem a výstupem pro $t \to \infty$ při předepsaném referenčním signálu

Typické testovací referenční signály jsou

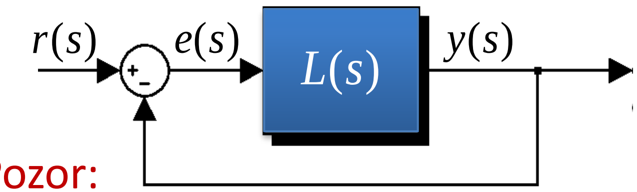
| Tvar | Název | Fyzikální interpretace | funkce | L-obraz |
|---|---|---|---|---|
|  | skok | konstantní poloha | $1 \times 1(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
|  | rampa | konstantní rychlost | $t \times 1(t)$ | $\frac{1}{s^2}$ |
|  | parabola | konstantní zrychlení | $\frac{1}{2} t^2 \times 1(t)$ | $\frac{1}{s^3}$ |

# Odchylka pro jednotkovou ZV



- odchylka pro strukturu s jednotkovou ZV

$$e(s) = S(s)r(s) = \frac{1}{1+L(s)}r(s)$$




Pozor:
Uzavřená smyčka musí být stabilní!
Jinak by se odezva vůbec neustálila.

- ustálená hodnota odchylky je

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} se(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+L(s)}r(s)$$

- speciálně ustálená odezva na skok je

$$e_{\text{step,ss}} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+L(s)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} L(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

konstanta (odchylky) polohy

- ustálená odezva na skok je nulová jen když $K_p = \lim\limits_{s\to 0} L(s) = \infty$
- tj. když přenos soustavy + regulátoru má aspoň jeden pól v nule

$$L(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots}{s^n(s+p_1)(s+p_2)\ldots}, \quad n \ge 1$$

- tedy když soustava má astatismus (typ) alespoň 1 a „umí skok sama vygenerovat“

# Odchylka pro jednotkovou ZV



- ustálená odezva na rampu je

konstanta rychlosti

$$e_{\text{ramp,ss}} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+L(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+sL(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sL(s)} = \frac{1}{K_v}$$

- ustálená odezva na rampu je nulová tedy když přenos má aspoň dva póly v nule $\Leftrightarrow$ $K_v = \lim\limits_{s\to 0} sL(s) = \infty$

$$L(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots}{s^n (s+p_1)(s+p_2)\ldots}, \quad n \geq 2$$

umí rampu generovat

- pro ***n*** = 1 je odchylka konečná ale nenulová
- pro ***n*** = 0 je nekonečná
- ustálená odezva na parabolu je

konstanta zrychlení

$$e_{\text{parabola,ss}} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+L(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2L(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2L(s)} = \frac{1}{K_a}$$

- ustálená odezva na parabolu je nulová tedy když ***n*** ≥ 3 , tj. přenos má aspoň tři póly v nule $\Leftrightarrow$ $K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2L(s) = \infty$

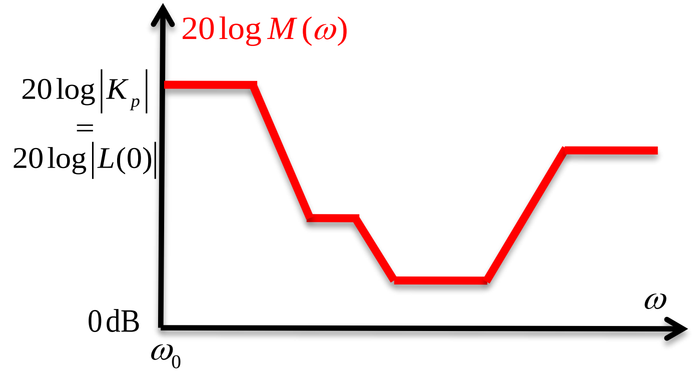
umí parabolu generovat

- pro ***n*** = 2 je tu odchylka konečná ale nenulová
- pro ***n*** ≤ 1 je nekonečná
- konstanty se někdy používají ke specifikaci návrhu

# Ustálená odchylka z frekvenční odezvy

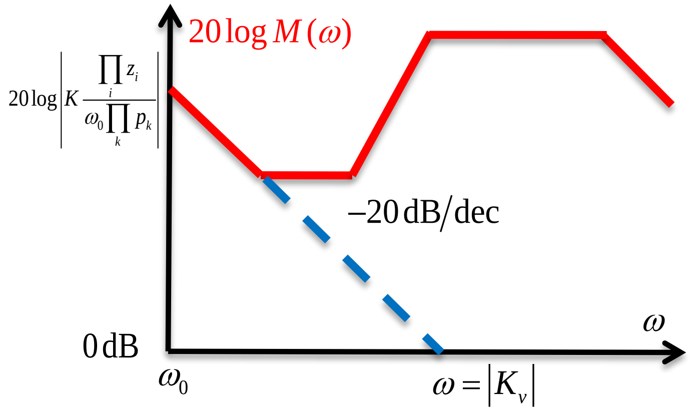
- Typ 0 (bez astatismu): počáteční hodnota (asymptota pro nízké frekvence)

$$K_p = \lim_{s\to 0} L(s) \Rightarrow e_{\text{step,ss}} = \frac{1}{1+K_p}$$



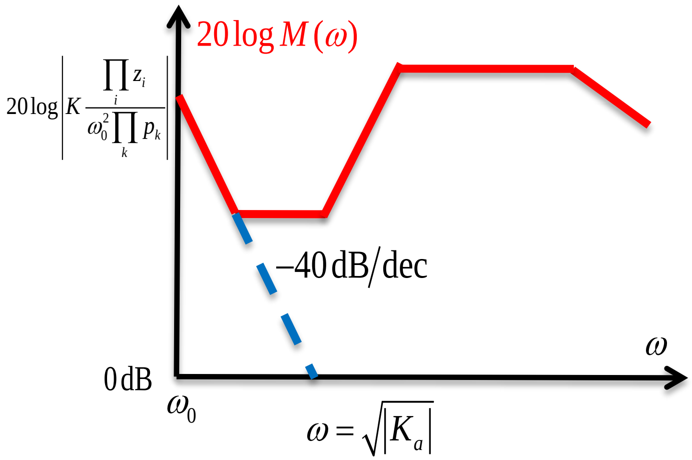

- Typ 1 (astatismus 1. řádu)

$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s) \Rightarrow e_{\text{ramp,ss}} = \frac{1}{K_v}$$




- Typ 2 (astatismus 2. řádu)

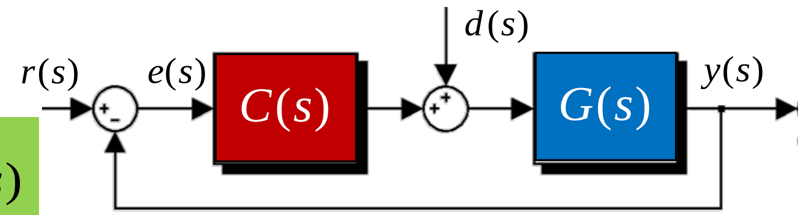
$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 L(s) \Rightarrow e_{par,ss} = \frac{1}{K_a}$$



# Ustálená odchylka s poruchou při jednotkové ZV



- Při typické struktuře s jednotkou ZV je přenos ref. a poruchy na odchylku




$$e(s)=\frac{1}{1+G(s)C(s)}r(s)-\frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}d(s)$$

- Vliv reference už známe, zkoumejme teď odchylku způsobenou poruchou
- Pro stabilní smyčku je její ustálená hodnota

$$e_d(s)=-\frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}d(s)$$

$$e_{d,ss}=\lim_{s\to 0} s e_d(s)=-\lim_{s\to 0}\frac{sG(s)}{1+G(s)C(s)}d(s)$$

- pro skokovou poruchu $d(s)=1/s$ to je

$$e_{d,step}(\infty)=-\lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}=-\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}(1/G(s))+\lim\limits_{s\to 0}(C(s))}$$

- Malou odchylku zajistíme „velkým“ $C$ a/nebo „malým“ $G$
- Odchylka je nulová když má regulátor pól v 0 nebo soustava nulu v 0
- Pozor: pól soustavy v 0 tady nepomůže!
- Ale když má soustava nulu v 0, nejde dát reg. pól v 0, takže nelze současně ↑

$$e_{r,step}(\infty)=e_{d,step}(\infty)=0$$