

# 7 - Ustálený stav kmitavý a nekmitavý, sledování a zadržení poruchy



Michael Šebek  
Automatické řízení 2018



# Zesílení a fyzikální realizovatelnost

- zesílení systému na frekvenci  $\omega$  je  $|G(j\omega)|$  - viz amplitudový Bodeho graf

Přenos  $g(s) = \frac{s}{s+1}$  má na frekvenci  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  zesílení

$$|g(j1)| = \left| \frac{j}{1+j} \right| = \left| \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

- důležité je **zesílení pro vysoké frekvence**  $\omega \rightarrow \infty$   
neboť ukazuje na o chování systému v počátku (času)
- systém se **striktně ryzím přenosem** vysoké frekvence nepřenáší

$$G(s) = b(s)/a(s), \quad \deg a(s) > \deg b(s) \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0$$

takové jsou všechny „fyzikální systémy“

- systémy s

$$\deg a(s) = \deg b(s) \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = |b_n/a_n| \neq 0, < \infty$$

- vf přenáší - ve fyzikálním světě nejsou, jinde snad ano,  
také je můžeme dostat zjednodušením složitých ryzích přenosů
- systémy ostře neryzí nekonečné frekvence nekonečně zesilují
- nejsou fyzikálně realizovatelné - přesto se o to občas pokoušíme 😊

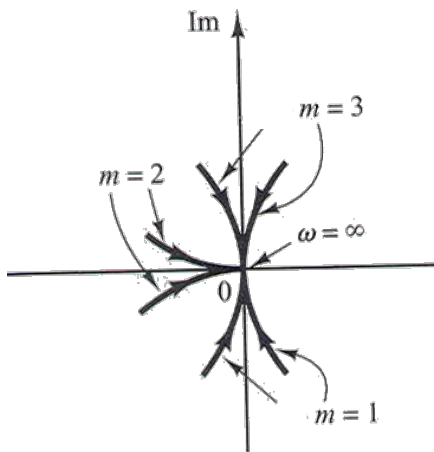


# Chování „na počátku“: Řád a relativní řád

- **Řád systému**  $n = \text{dimense stavového prostoru (matice), počet stavů}$   
Pokud nemá systém skryté módy (a má ryzí přenos)

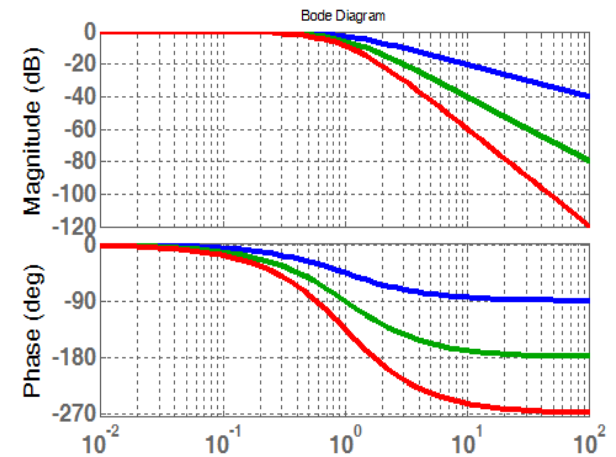
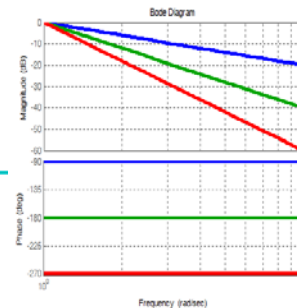
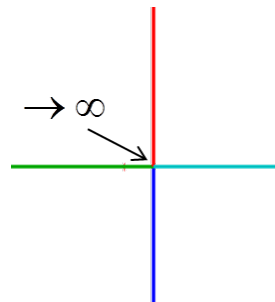
$$G(s) = b(s)/a(s), \text{deg } a(s) \geq \text{deg } b(s) \quad \longrightarrow \quad n = \text{deg } a(s)$$

- U neryzích přenosů (systému) je definice složitější
- **Relativní řád**  $m = \text{deg } a(s) - \text{deg } b(s)$
- Pro vysoké frekvence se pro  $m \geq 1$  systém chová jako  $1/s^m$   
Nyquistův graf končí ( $\omega \rightarrow \infty$ ) v počátku a tečna je příslušná osa



$$1/s^m : |1/\omega^m| = 1/\omega^m$$

$$\angle 1/(j\omega)^m = -m \times 90^\circ$$





- speciálně zesílení na nulové frekvenci (ustálené zesílení, DC zesílení) je

$$|G(j0)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

- tedy chování systému „v nekonečnu“ (v ustáleném stavu) je dáno „chováním přenosu“ v počátku
- Ale pozor: **Přenos musí být stabilní, jinak se výstup vůbec neustálí**

## Pro stavový model

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned} \rightarrow G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \rightarrow G(0) = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

## Pro vnější model

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \rightarrow G(0) = \frac{b(0)}{a(0)} = \frac{b_0}{a_0} = \begin{cases} 0 \dots b_0 = 0, a_0 \neq 0 \\ \pm\infty \dots a_0 = 0, b_0 \neq 0 \\ c \neq 0, \neq \pm\infty \dots a_0 \neq 0, b_0 \neq 0 \end{cases}$$



- Při zkoumání ustáleného stavu rozlišujeme typ systému podle existence pólu  $s = 0$  a jeho násobnosti

- Systém bez pólu v  $s = 0$  je **typu 0** („statický“)

$$f_0(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2)\dots}{(s + p_1)(s + p_2)\dots}, \quad p_i, z_i \neq 0 \quad \lim_{s \rightarrow 0} f_0(s) = f_0(0) = k \frac{z_1 z_2 \dots}{p_1 p_2 \dots} = K_{\text{Bode}}$$

- Systém s jednonásobným pólem v  $s = 0$  je **typu 1** (astatický 1. řádu)

$$f_1(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2)\dots}{s(s + p_1)(s + p_2)\dots}, \quad p_i, z_i \neq 0 \quad |f_1(0)| = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s f_1(s) = K_{\text{Bode}}$$

- Systém s dvojnásobným pólem v  $s = 0$  je **typu 2** (astatický 2. řádu)

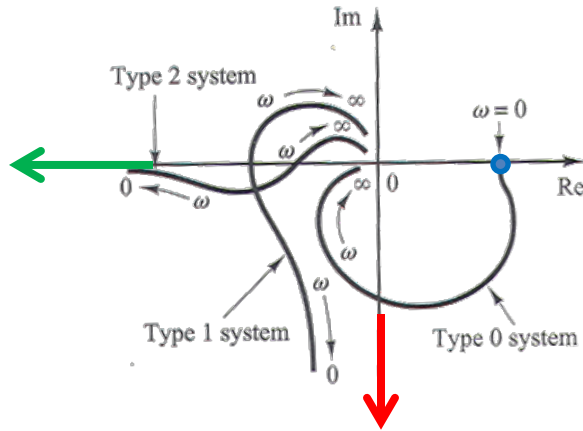
$$f_2(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2)\dots}{s^2(s + p_1)(s + p_2)\dots}, \quad p_i, z_i \neq 0 \quad |f_2(0)| = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s f_2(s) = \infty,$$

- ...  $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 f_2(s) = K_{\text{Bode}}$



# Typ systému (astatismus) ve frekvenční oblasti

- Systém typu  $l$  se pro malé frekvence chová jako  $K_{\text{Bode}}/s^l$



$\omega \rightarrow 0^+$  :

$$g(j\omega) \approx K_{\text{Bode}} / (j\omega)^l$$

$$|g(j\omega)| \approx |K_{\text{Bode}} / (j\omega)^l| = |K_{\text{Bode}}| / |\omega|^l$$

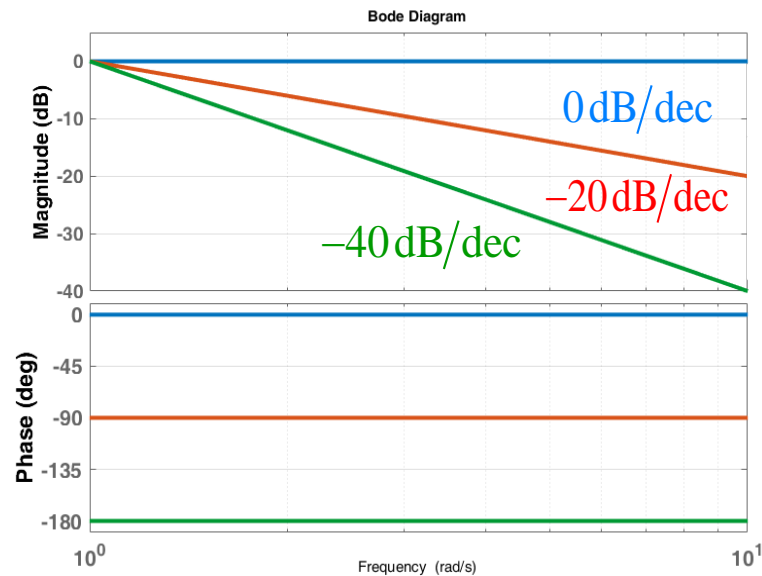
$$\angle g(j\omega) \approx -90^\circ \times l \times \text{sign}(K_{\text{Bode}})$$

asymptota pro nízké frekvence

$$f_{0,\text{asympt}}(s) = K_{\text{Bode}}$$

$$f_{1,\text{asympt}}(s) = \frac{K_{\text{Bode}}}{s}$$

$$f_{2,\text{asympt}}(s) = \frac{K_{\text{Bode}}}{s^2}$$



Typ 0

Typ 1

Typ 2



# Odchylka pro jednotkovou ZV

- odchylka pro strukturu s jednotkovou ZV

$$e(s) = S(s)r(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$

- ustálená hodnota odchylky je

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + L(s)} r(s)$$

- speciálně ustálená odezva na skok je

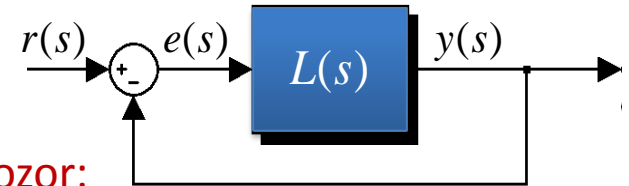
$$e_{\text{step,ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

konstanta  
(odchylky)  
polohy

- ustálená odezva na skok je nulová jen když  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \infty$
- tj. když přenos soustavy + regulátoru má aspoň jeden pól v nule

$$L(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)\dots}{s^n (s + p_1)(s + p_2)\dots}, \quad n \geq 1$$

- tedy když soustava má astatismus (typ) alespoň 1 a „umí skok sama vygenerovat“



**Pozor:**  
Uzavřená smyčka musí být stabilní!  
Jinak by se odezva vůbec neustálila.



# Odchylka pro jednotkovou ZV

- ustálená odezva na rampu je

$$e_{\text{ramp,ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+L(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+sL(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sL(s)} = \frac{1}{K_v}$$

konstanta rychlosti

- ustálená odezva na rampu je nulová  
tedy když přenos  
má aspoň dva póly v nule

$$\iff K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \infty$$

$$L(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots}{s^n(s+p_1)(s+p_2)\dots}, \quad n \geq 2$$

umí rampu generovat

- pro  $n = 1$  je odchylka konečná ale nenulová
- pro  $n = 0$  je nekonečná
- ustálená odezva na parabolu je

$$e_{\text{parabola,ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+L(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2+s^2L(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2L(s)} = \frac{1}{K_a}$$

konstanta zrychlení

- ustálená odezva na parabolu je nulová  
tedy když  $n \geq 3$ , tj. přenos má aspoň tři póly v nule
- pro  $n = 2$  je tu odchylka konečná ale nenulová
- pro  $n \leq 1$  je nekonečná
- konstanty se někdy používají ke specifikaci návrhu

$$\iff K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2L(s) = \infty$$

umí parabolu generovat

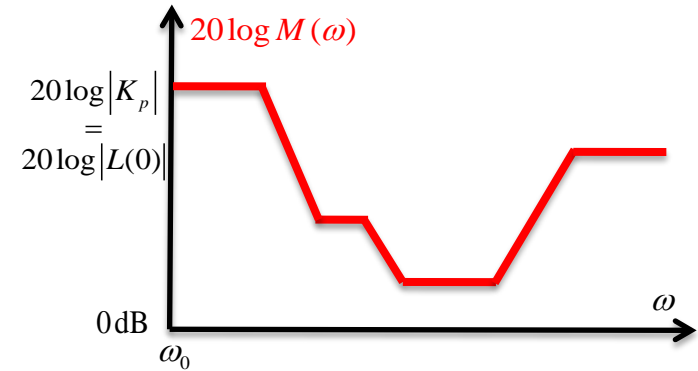




# Ustálená odchylka z frekvenční odezvy

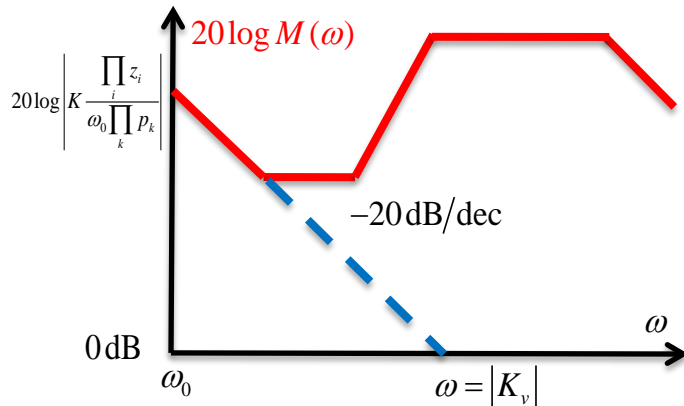
- **Typ 0** (bez astatismu): počáteční hodnota (asymptota pro nízké frekvence)

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) \Rightarrow e_{\text{step,ss}} = \frac{1}{1 + K_p}$$



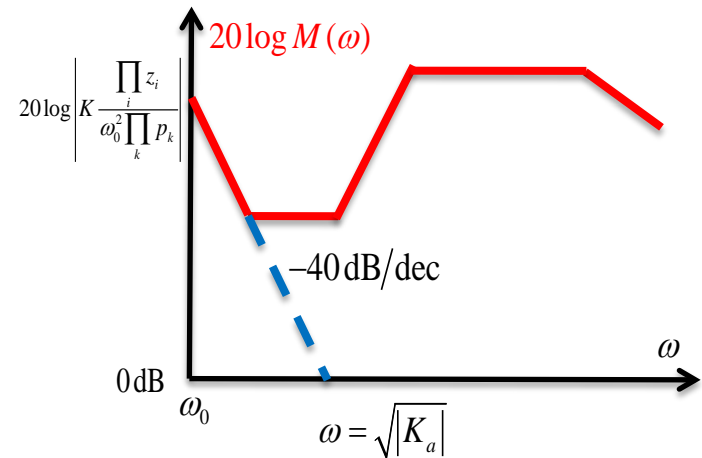
- **Typ 1** (astatismus 1. řádu)

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) \Rightarrow e_{\text{ramp,ss}} = \frac{1}{K_v}$$



- **Typ 2** (astatismus 2. řádu)

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s) \Rightarrow e_{\text{par,ss}} = \frac{1}{K_a}$$

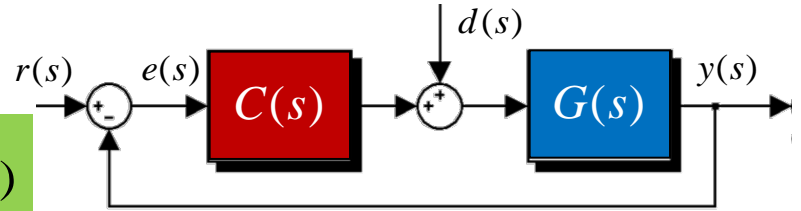




# Ustálená odchylka s poruchou při jednotkové ZV

- Při typické struktuře s jednotkou ZV je přenos ref. a poruchy na odchylku

$$e(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} r(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} d(s)$$



- Vliv reference už známe, zkoumejme teď odchylku způsobenou poruchou
- Pro stabilní smyčku je její ustálená hodnota

$$e_{d,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s e_d(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG(s)}{1 + G(s)C(s)} d(s)$$

$$e_d(s) = - \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} d(s)$$

- pro skokovou poruchu  $d(s) = 1/s$  to je

$$e_{d,step}(\infty) = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} = - \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} (1/G(s)) + \lim_{s \rightarrow 0} (C(s))}$$

- Malou odchylku zajistíme „velkým“  $C$  a/nebo „malým“  $G$
- Odchylka je nulová když má regulátor pól v 0 nebo soustava nulu v 0
- Pozor: pól soustavy v 0 tady nepomůže!
- Ale když má soustava nulu v 0, nejde dát reg. pól v 0, takže nelze současně ↑

$$e_{r,step}(\infty) = e_{d,step}(\infty) = 0$$