

# 8 - Geometrické místo kořenů aneb Root Locus



Michael Šebek  
Automatické řízení 2018



- Walter R. Evans, AIEE Transactions, 1948
- Metoda **root locus** neboli **geometrické místo kořenů** vykresluje polohu pólů uzavřené smyčky v závislosti na jednom reálném parametru
- Obvykle je parametrem zesílení ZV regulátoru  $K$
- Vychází z přenosu uzavřené smyčky

$$T(s) = \frac{KL(s)}{1 + KL(s)} \quad , \text{ kde buď } L(s) = G(s) \text{ nebo } L(s) = D(s)G(s)$$

- Póly toho přenosu (klasicky) vyjadřujeme jako kořeny jmenovatele, tj. řešení pro  $s$  tzv. **Evansovy rovnice**

$$1 + KL(s) = 0$$

- Když vyjádříme  $L(s) = b(s)/a(s)$  , má rovnice tvar  $a(s) + Kb(s) = 0$
- Evans odvodil jednoduchá pravidla, jak vykreslit polohu pólů pro „všechny“ hodnoty parametru, což bylo velmi důležité v době, kdy přesné vykreslení poloh bylo prakticky nemožné. Dnes to umíme, ale
- metoda napomáhá představě, jak se póly pohybují při změně parametru a je základem metod sofistikovanějších



- Polohy kořenů polynomu jsou spojité funkce koeficientů, pokud se nemění stupeň - v tom případě kořen(y) „přeskakují přes nekonečno“
- Podle VF zesílení otevřené smyčky musíme rozlišovat

## Kladný RL

- Kdy je  $K b_m / a_n \geq 0$  a tedy  $\lim_{s \rightarrow \infty} KL(s) \geq 0$
- obvykle je  $b_m / a_n \geq 0, K \geq 0$ , ale pozor na případy s  $b_m / a_n < 0$
- To je klasický případ a obvykle se uvažuje, není-li uvedeno jinak
- Právě pro něj platí klasická pravidla z učebnic
- Často si uživatel / autor toto omezení ani neuvědomí

## Záporný RL

- Kdy je  $K b_m / a_n \leq 0$  a tedy  $\lim_{s \rightarrow \infty} KL(s) \leq 0$
- platí pro něj obdobná, ale mnohdy „opačná“ pravidla
- Můžeme ho nahradit kladným pro  $-KL(s)$

## Úplný RL

- Kladný a záporný dohromady
- Vykazuje hezké symetrie, mnohé objasňuje, řeší problém úplně, ale nikdo ho nepoužívá, neboť ho nezná



# Pět jednoduchých pravidel pro kladný RL

1. **Počet větví:** Počet větví RL se rovná počtu pólů otevřené smyčky.
2. **Symetrie:** Graf RL je osově symetrický podle reálné osy
3. **Segmenty na reálné ose:** Pokud je segment grafu RL na reálné ose, tak vždy leží nalevo od lichého počtu reálných OL pólů a nul.
4. **Počáteční a koncové body:** Graf začíná pro  $K = 0$  v (konečných a nekonečných) OL pólech a končí pro  $K = \infty$  v (koneč. a nekoneč.) OL nulách
5. **Chování v nekonečnu:** Pokud má  $L(s)$   $n-m$  nul v nekonečnu, tak
  - graf RL má právě tolik větví směřujících do nekonečna.
  - Ty se asymptoticky blíží přímkám, které protínají reálnou osu v bodě

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{konečných pólů} - \sum \text{konečných nul}}{\text{počet konečných pólů} - \text{počet konečných nul}}$$

- a svírají s ní úhel (v rad a v kladném smyslu k ose)

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\text{počet konečných pólů} - \text{počet konečných nul}}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

kde  $k$  vezmeme tolik, až se vyčerpá počet větví jdoucích do  $\infty$ .



# Složitější pravidla pro kladný RL

6. **Body rozpojení a spojení na reálné ose:** vypočteme pomocí nulových bodů derivace  $-(1/L(\sigma))'$ ,  $\sigma \in R$
7. **Body přechodu imaginární osy:** (póly na mezi stability) zjistíme z Routhovy tabulky (s neurčitým  $K$ ). Pro systém s nižším řádem můžeme též řešit dosazením  $s = j\omega$  do  $c(s)$  a řešením rovnice  $c(j\omega) = 0$ .

Obojí vede na složité rovnice a nestojí za námahu, lépe graf rovnou vykreslit.

V případě skutečné potřeby lze vypočítat jinak - ukážeme později.

Ve starších učebnicích ještě najdete:

8. Úhly odchodu RL z komplexních pólů
9. Úhly příchodu RL ke komplexním nulám a
10. Úhly opuštění reálné osy
11. Pravidla pro kreslení a kalibraci

Jejich význam je dnes pramalý, sloužila v minulosti spíš „hezkému kreslení“

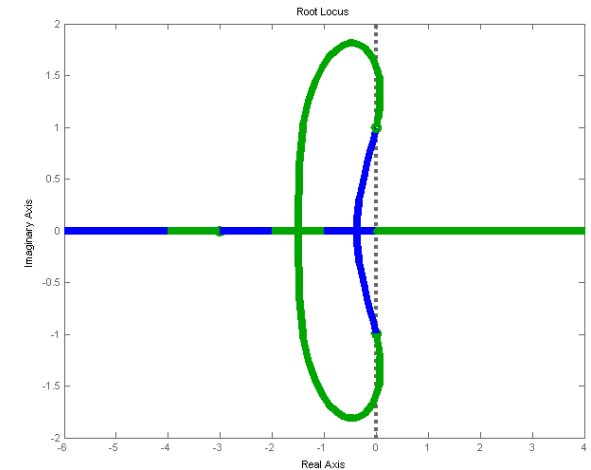
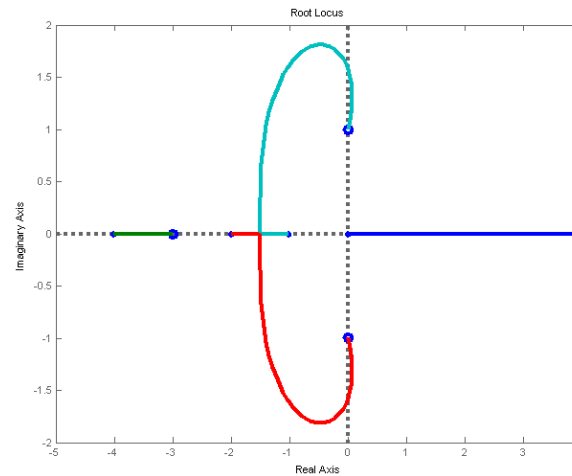
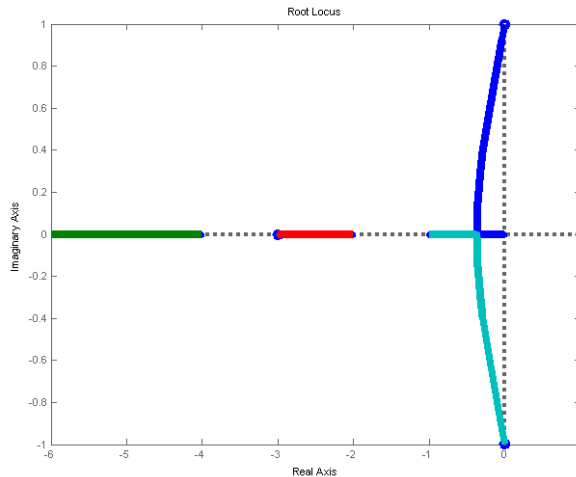


# Pravidla pro záporný RL

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Pravidla pro  $K \in (-\infty, 0]$  jsou obdobná/komplementární
- nebudeme je probírat
- raději ale použijeme pravidla pro kladný RL po záměně  $L(s) \rightarrow -L(s)$

```
>> L=(s+3)*(s^2+1)/s/(s+4)/(s+1)/(s+2)
      L = 3 + s + 3s^2 + s^3 / 8s + 14s^2 + 7s^3 + s^4
>> rlocus(tf(L))
>> rlocus(tf(-L))
>> rlocus(tf(L),tf(-L))
```





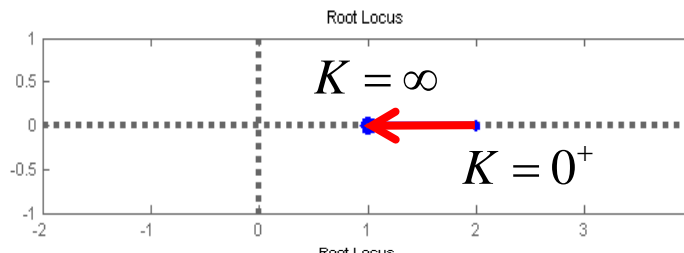
- Úplný RL dostaneme pro neomezené  $K \in R$
- Jeho graf vznikne složením grafů kladného a záporného RL.

- Např. pro

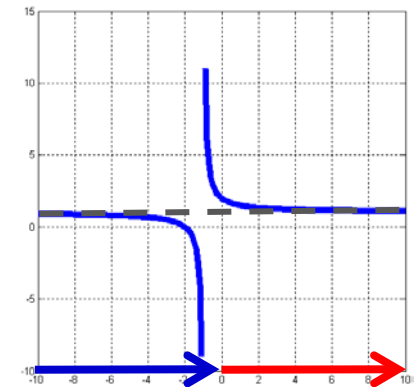
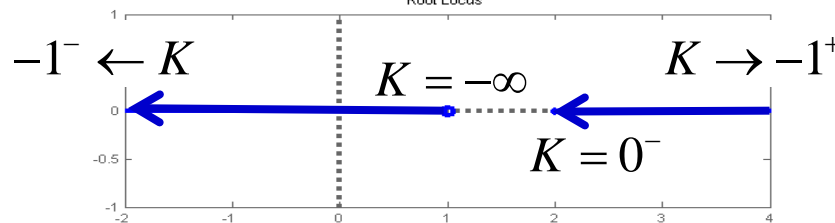
$$L(s) = \frac{s-1}{s-2}, p(s) = (s-2) + K(s-1) = (K+1)s - (2+K)$$

$$s_1 = \frac{2+k}{1+k}$$

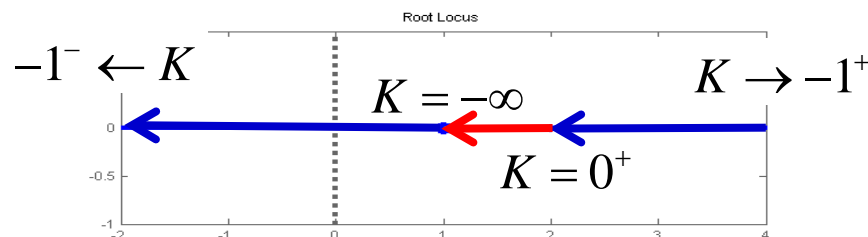
- je kladný RL



- záporný RL



- a úplný RL





- Tvar úplného RL je invariantní vůči lineární zlomkové (Möbiově) transformaci

$$K = \frac{\alpha + \beta K'}{\gamma + \delta K'}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{R}, \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \neq 0$$

- Graf má vždy (nejméně) 2 reálné asymptoty ( $0^\circ$  a  $180^\circ$ ), jinak řečeno
- obsahuje vždy celou reálnou osu: pro každé reálné  $\sigma$  jsou  $d(\sigma)$  i  $n(\sigma)$  také reálné a rovnice  $K = -a(\sigma)/b(\sigma)$  má řešení, a to  $a(\sigma) + Kb(\sigma) = 0$  (pokud je náhodou  $\sigma$  nulou  $b(s)$ , platí to v limitě), takže toto  $\sigma$  leží na grafu RL
- Pro striktně ryzí přenos s  $n_r = n - m > 0$  má vždy  $2(n - m)$  asymptot, z toho dvě na reálné ose (v případě  $n - m = 1$  jsou to asymptoty jediné)
- každá asymptota záporného RL pŕlí úhel mezi sousedními asymptotami kladného RL
- „kladné“ asymptoty mají úhly  $\theta_{a-pos} = (2k + 1)\pi/n_r, k = 0, \pm 1, \dots$
- „záporné“ asymptoty mají úhly  $\theta_{a-neg} = 2k\pi/n_r, k = 0, \pm 1, \dots$





## Motivace

- Pro  $L(s) = G(s) = 1/s^2$  je RL na obrázku a výsledný systém zřejmě osciluje pro každé  $K > 0$ .
- Zkusme přidat dynamický kompenzátor (tzv. ideální PD regulátor)

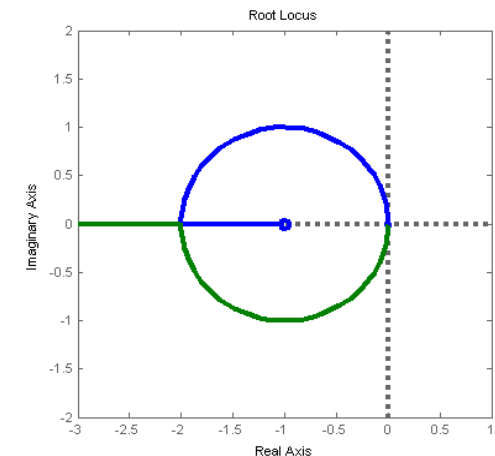
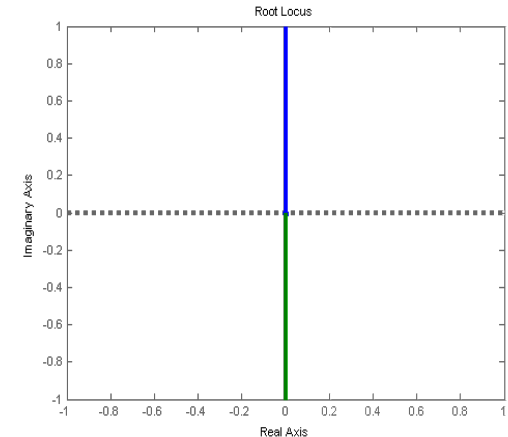
$$D(s) = 1 + s$$

- Zřejmě tím přenosu otevřené smyčky

$$L(s) = \frac{1 + s}{s^2}$$

přibyla stabilní nula a RL se změnilo na →

- Výsledek kompenzace: přidání stabilní nuly posunulo graf RL do levé poloroviny





# Dynamická kompenzace

- Zkusme teď přidat kompenzaci s nulou i pólem

$$D(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

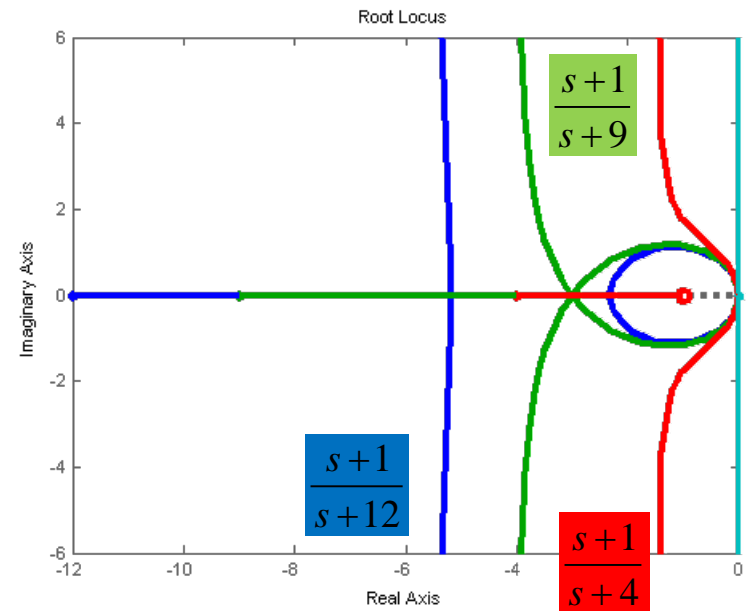
tzv. lead regulátor (realizovatelný PD regulátor)

- Tím v

$$L(s) = \frac{s + z}{(s + p)s^2}$$

přibyla stabilní nula a stabilní pól.

- Výsledek závisí na poloze nuly a pólu: pokud je pól daleko od nuly, tvar RL v okolí počátku neovlivní
- Čím je blíže, tím více je ovlivňuje: Jak se pól blíží, tlačí stávající RL doprava, tj. k pomalejší odezvě.





- měnící se parametr nemusí být jen OL zesílení, ale jakýkoli jiný parametr
- takové úlohy převedeme na klasický případ

## Příklad

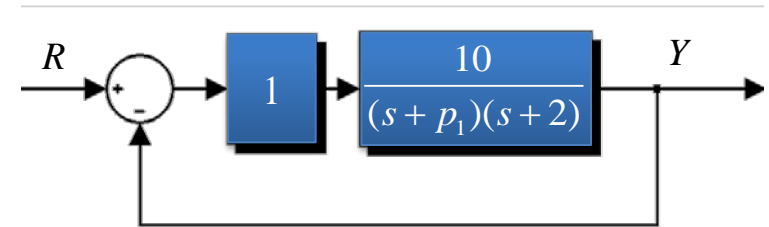
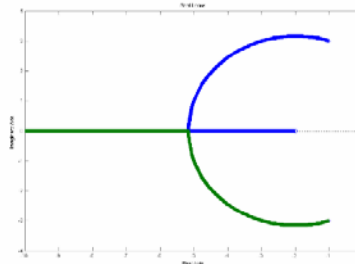
- zkoumejme vliv polohy OL pólu  $p_1$  na polohu CL pólů

- CL charakteristický polynom

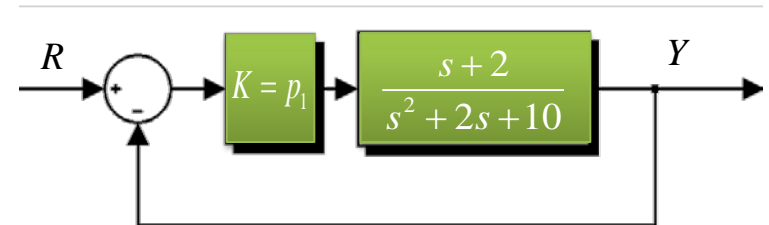
$$c(s) = s^2 + (p_1 + 2)s + 2p_1 + 10 \quad \longrightarrow \quad c(s) = s^2 + 2s + 10 + p_1(s + 2)$$

- změnu kořenů tohoto polynomu s měnícím se  $p_1$  budeme zkoumat jako RL fiktivního systému s

$$L(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 10}$$



převedeme na tvar





- Pro polynom  $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, a_n \geq 0$  definujeme Hurwitzovu matici jako  $n \times n$  matici

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_n & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

- Obecněji ji můžeme zavést i pro  $a_n = 0$

- Hurwitzova matice je indikátorem stability polynomu (jak?)
- A také indikátorem existence kořenu(ů) na imaginární ose

**Lemma** (Orladno):

- Má-li  $p$  dvojici kořenů symetrických dle imaginární osy, je  $H$  singulární
- Má-li  $p$  kořen na imaginární ose, pak je  $H$  singulární



# Detekce kořenů na imaginární ose

- Pokud má polynom  $p(s, K) = a(s) + Kb(s)$  kořen na imaginární ose, je matice  $H(p(s), K) = H(a(s)) + KH(b(s))$  singulární

- Hledáme tedy  $K$  pro která  $\det H(p(s), K) = 0$

$$\begin{aligned}\det H(p(s), K) &= \det(H(a(s)) + KH(b(s))) \\ &= K \det(H(a(s))) \det\left(\frac{1}{K}I - (-H^{-1}(a(s))H(b(s)))\right) \\ &= K \det(H(a(s))) \det(\lambda I - M), \quad \lambda = 1/K\end{aligned}$$

- pokud existuje  $H^{-1}(a(s))$ , můžeme nuly vypočítat jako vlastní čísla

$$M = -H^{-1}(a(s))H(b(s))$$

- pokud inverze neexistuje, postupujeme metodou zobecněných vlastních čísel
- jsou na to funkce v Matlabu a PolTbx (**roots**)



# Detekce meze aperiodicity = dvojnásobných kořenů

- RL opouští/vrací se (na) reálnou osu v místě, kde má polynom dvojnásobný (reálný) kořen

- Polynom

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

má dvojnásobný kořen, právě když jeho derivace

$$p'(s) = n a_n s^{n-1} + (n-1) a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_1$$

má stejný kořen.

- Stačí tedy detekovat společné kořeny  $p(s)$  a  $p'(s)$
- Dělá se to pomocí singularity matice resultantu /diskriminantu těchto polynomů definované dále
- Polynom  $p(s, K) = a(s) + Kb(s)$  má dvojnásobné kořeny, když

$$\det R(p(s), p'(s)) = \det R(a(s) + Kb(s), a'(s) + Kb'(s)) = 0$$



- Maticce resultantu / diskriminantu se definuje

$$R(p(s), p'(s)) = D(p(s)) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 & 0 \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

- Je to  $(2n-1) \times (2n-1)$  Sylvestrova matice polynomů  $p(s), p'(s)$