

11 - Regulátory



Michael Šebek
Automatické řízení 2017

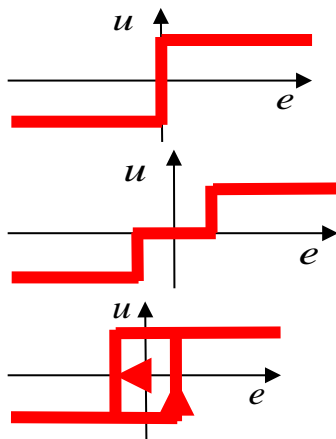


Nejjednodušší regulátory

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- v jistém smyslu nejjednodušší regulátor je On-Off (Bang-bang)
- má jen dvě možné výstupní hodnoty
- vždy použije maximální korektivní akci
- je to vlastně nelinearita typu

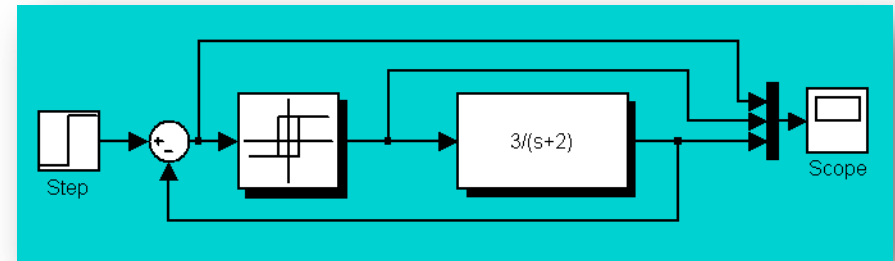
$$u = \begin{cases} u_{\max}, & \text{if } e > 0 \\ u_{\min}, & \text{if } e < 0 \end{cases}$$



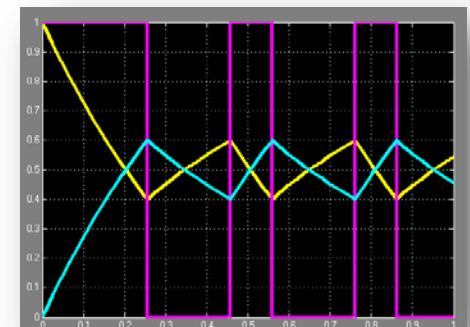
signum

pásmo
necitlivosti

hystereze



- udrží výstup poblíž požadované hodnoty, ale vede na oscilace (sign funguje jen když má soustava velké zpoždění)
- tento regulátor řídicí zásahy „přehání“ (nejsou totiž úměrné velikosti odchytky)
- to napraví **proporcionální** regulátor





Proporcionálně - Integroační - Derivační: PID

- PID regulátor znáte z cvičení: má tři členy – tzv. školní verze:

$$\overset{\text{P}}{u(t)} = k_P e(t) + \overset{\text{I}}{k_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + \overset{\text{D}}{k_D} \dot{e}(t)$$

$$\overset{\text{P}}{\frac{U(s)}{E(s)}} = \overset{\text{I}}{D_C(s)} = k_P + \frac{k_I}{s} + \overset{\text{D}}{k_D s}$$

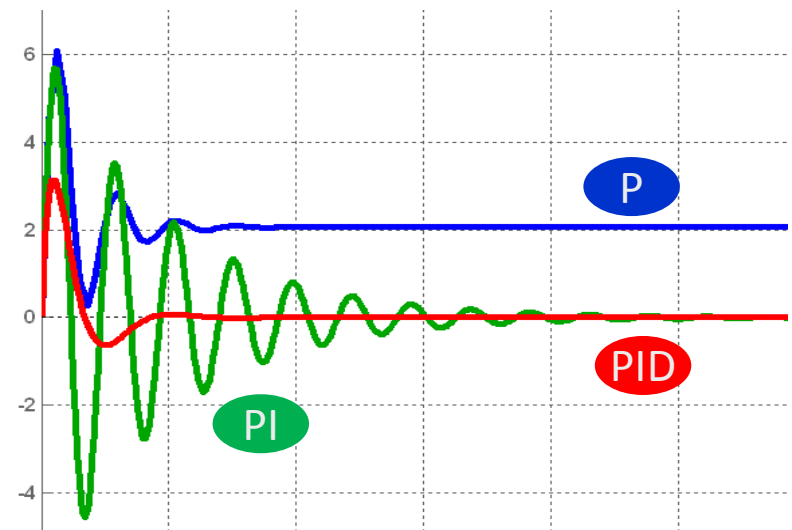
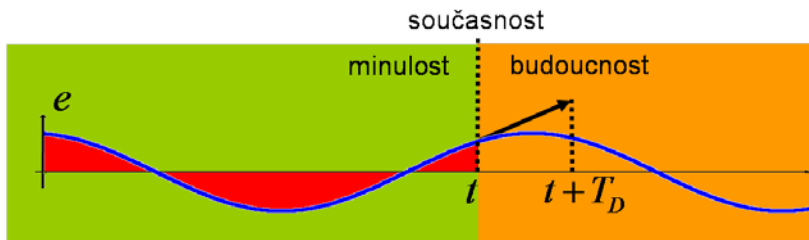
- při řízení průmyslových procesů se také užívá označení

$$\overset{\text{P}}{D_C(s)} = k_P \left[1 + \frac{\overset{\text{I}}{1}}{\overset{\text{I}}{T_I} s} + \overset{\text{D}}{T_D} s \right]$$

kde T_I je „časová integrační konstanta“ [s]

kde T_D je „časová derivační konstanta“ [s]

- PID využívá znalosti současných, minulých i budoucích (extrapolovaných) hodnot odchylky



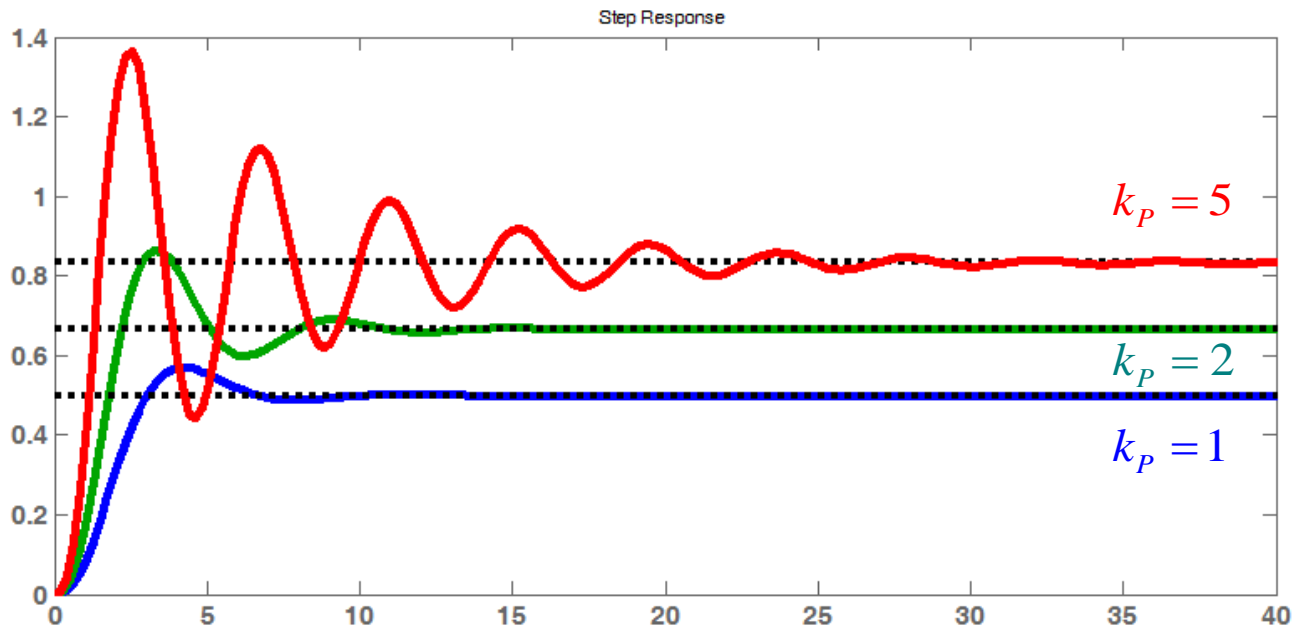


P regulátor

$$u(t) = k_p e(t)$$

V literatuře o regulátorech se referenci často říká **set point** takže $r = y_{ref} = y_{sp}$

- Větší k_p zmenšuje ustálenou odchylku,
- ale často (ne vždy) výstup rozkmitává a vede až ke ztrátě stability



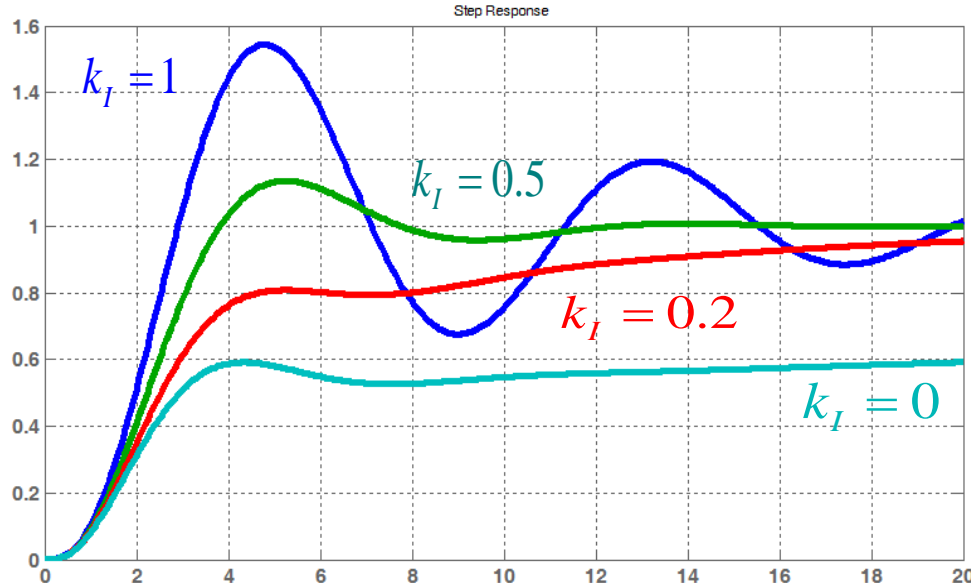
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$
$$u(s) = k_p e(s)$$
$$y_{sp}(s) = \frac{1}{s}$$



I složka

$$u(t) = k_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (+ e(0))$$

- v ustáleném stavu je odchylka na skok vždy nulová
- pro větší k_I se odchylka blíží k nule rychleji, ale více kmitá - to platí ale často, ale ne vždy



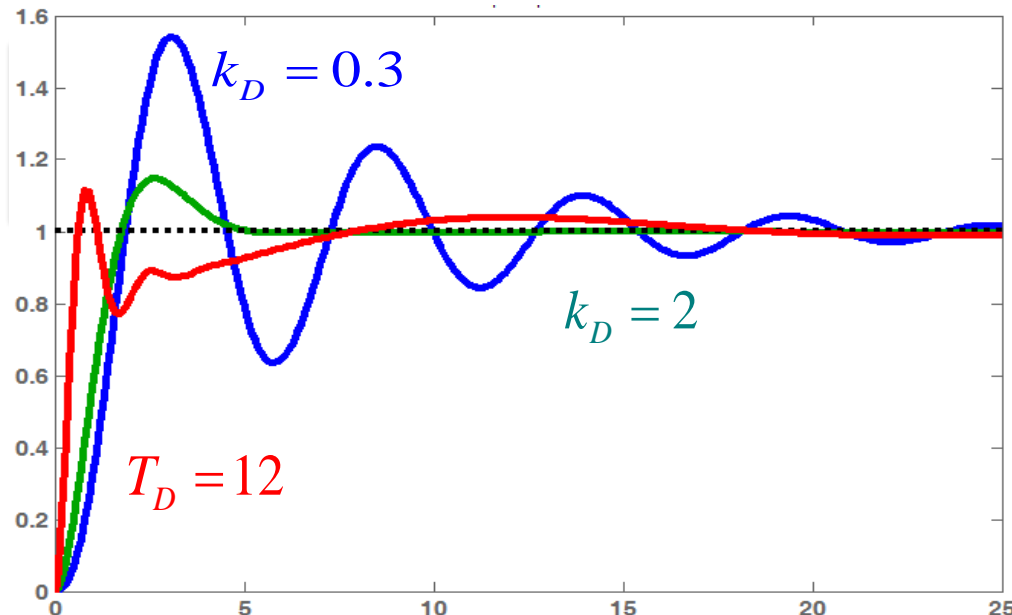
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$
$$u(s) = \left(1 + k_I \frac{1}{s} \right) e(s)$$
$$y_{sp}(s) = \frac{1}{s}$$



D složka

$$u(t) = k_D \dot{e}(t)$$

- při konstantním e je nulová
- vylepšuje dynamiku
- se zvětšováním k_D tlumení nejprve roste a pak zase klesá
- to platí ale často, ale ne vždy



$$C(s) = 3 + \frac{1.5}{s} + k_D s$$
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$
$$y_{sp}(s) = \frac{1}{s}$$



Kdy můžeme použít PID regulátor

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- K řízení většiny průmyslových procesů (i mnoha jiných systémů) překvapivě stačí PID, pokud nejsou požadavky na chování příliš vysoké

Kdy postačí PI

- Všechny stabilní procesy můžeme řídit regulátorem I při mírných požadavcích na chování, nemusí-li být řízení přesné
- Složka P ještě chování vylepší
- Proto je nejužívanějším regulátorem PI (i pro soustavy s integrální akcí), plně vyhovuje pro soustavy (skoro) 1. řádu
- Derivační složka se užívá méně často – mnohdy je vypnuta

Kdy je užitečná D složka:

- Např. pro dvojitý integrátor, málo tlumenou soustavu,
- Pro soustavy (skoro) 2. řádu stačí PID (zanedbáme-li saturace, robust.)

Složitější řízení je potřeba:

- složitější soustavy (vyšších řádů, se zpožděním,..)
- větší nároky na řízení (přesné, optimální), robustnost, ...



Obecný regulátor prvního řádu

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

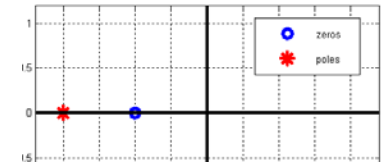
Obecný regulátor 1. řádu

- má přenos s reálnou nulou $-z$ a reálným pólem $-p$
- může být realizován pasivními obvody
- Převažuje vliv toho, co je dominantní = více napravo

$$D_C(s) = k \frac{s + z}{s + p}$$

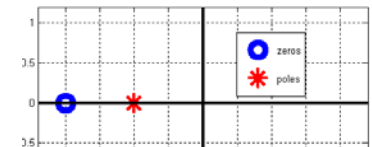
Regulátor typu Lead (s fázovým předstihem)

- převažuje vliv nuly $p > z$ neboli $-p < -z$
- aproximuje PD regulátor, blíží se mu s rostoucím p
- zrychluje odezvu, snižuje T_r a $\%OS$, výstup vede vstup
- název podle frekvenční charakteristiky: lead (kladný fázový posuv)



Regulátor Lag (s fázovým zpožděním)

- převažuje vliv pólu $p < z$ neboli $-p > -z$
- aproximuje PI regulátor - je to realistický PI!
- vylepšuje ustálenou přesnost, výstup se opoždí za vstupem
- název dle frekvenční charakteristiky: lag (fázové zpoždění)



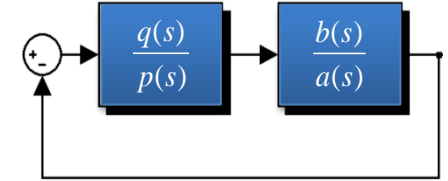
Různé kombinace (už vyššího řádu):

- kaskáda lead-lag, notch

$$D_C(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}{(s + \omega_o)^2}$$



- Když soustava ani regulátor nemají skryté módy, je CL charakter. polynom $c(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s)$ a jeho kořeny = CL póly



- Při umístění pólů: volíme $c(s)$ a řešíme rovnice pro neznámý regulátor

Příklady pro různé soustavy a regulátory

- 1. řád + P: 1 rovnice, 1 neznámá: umístí 1 pól libovolně
- 1. řád + PI: 2 rovnice, 2 neznámé: libovolně 2 póly
- 2. řád + PI: 3 rovnice, 2 neznámé: 2 póly libovolně, třetí „vyjde“
- 2. řád + PID: 3 rov., 3 neznámé: 3 póly libovolně (neboť PID není ryzí)

Pravidla

- PI regulátor libovolně umístí póly pro soustavu 1. řádu
- PID regulátor libovolně umístí póly pro striktně ryzí soustavu 2. řádu

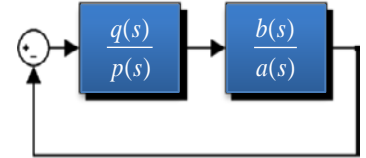
Soustava vyššího řádu než 2 ?

- složitější regulátor (později): řád n „potřebuje“ regulátor řádu $n-1$
- zjednodušíme model soustavy pro návrh nebo vyšlý regulátor
- umístíme jen některé z pólů - a doufáme, že vyjdou v CL dominantní?



Umístění pólů: Soustava 1. řádu a P regulátor

- Soustava $\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{K}{s+z}$ a regulátor $\frac{q(s)}{p(s)} = k_p$



- Požadovaná poloha CL pólů dána požadovaným CL charakteristickým polynomem

$$c(s) = s + v$$

- Rovnice má tvar $a(s)p(s) + b(s)q(s) = c(s)$

- Řešení $(s+z)1 + Kk_p = s+v$

$$s + (Kk_p + z) = s + v$$

$$Kk_p + z = v$$

$$k_p = (v_0 - z)/K$$

1 rovnice pro 1 neznámou

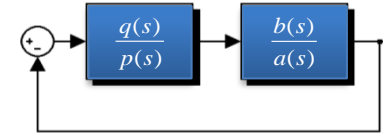
pro každou zvolenou polohu existuje řešení a to právě jedno

P regulátorem můžeme libovolně nastavit pól pro soustavu 1. řádu



Umístění pólů: Soustava 1. řádu a PI regulátor

- Soustava $\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{K}{z+s}$ a regulátor $\frac{q(s)}{p(s)} = k_p + \frac{k_I}{s} = \frac{k_p s + k_I}{s}$



- Požadovaná poloha pólů dána požadovaným CL charakteristickým polynomem

$$c(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

- Rovnice má tvar $a(s)p(s) + b(s)q(s) = c(s)$

- Řešení $(z+s)s + K(k_p s + k_I) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$

$$s^2 + (Kk_p + z)s + Kk_I = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$Kk_p + z = 2\zeta\omega_0$$

$$k_p = (2\zeta\omega_0 - z)/K$$



$$Kk_I = \omega_0^2$$

$$k_I = \omega_0^2/K$$

2 rovnice pro
2 neznámé



pro každou zvolenou polohu
existuje řešení a to právě jedno

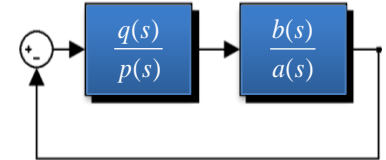
PI regulátorem
můžeme libovolně
nastavit 2 póly pro
soustavu 1. řádu



Umístění pólů: Soustava 2. řádu a PI regulátor

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{K}{(z_1 + s)(z_2 + s)}$$

$$\frac{q(s)}{p(s)} = k_p + \frac{k_I}{s} = \frac{k_p s + k_I}{s}$$



- CL charakteristický polynom je stupně 3 a nemůže být vybrán libovolně
- zvolíme ho tedy ve tvaru $c(s) = (s + \alpha\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$ kde za parametr považujeme i ω_0
- Rovnice má tvar

2 neznámé parametry
3 rovnice
Volba nemůže být libovolná

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = c(s)$$

$$(z_1 + s)(z_2 + s)s + K(k_p s + k_I) = (s + \alpha\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$$

$$s^3 + (z_1 + z_2)s^2 + (z_1 z_2 + Kk_p)s + Kk_I = s^3 + (\alpha\omega_0 + 2\zeta\omega_0)s^2 + (\alpha 2\zeta\omega_0^2 + \omega_0^2)s + \alpha\omega_0^3$$

$$s^2 : \quad z_1 + z_2 = \alpha\omega_0 + 2\zeta\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = (z_1 + z_2) / (\alpha + 2\zeta)$$

$$s^1 : \quad z_1 z_2 + Kk_p = \alpha 2\zeta\omega_0^2 + \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad k_p = (\alpha 2\zeta\omega_0^2 + \omega_0^2 - z_1 z_2) / K$$

$$s^0 : \quad Kk_I = \alpha\omega_0^3 \quad \Rightarrow \quad k_I = \alpha\omega_0^3 / K$$

- zapamatujte si postup, vzorečky nemusíte!

Jak je to přesně: Polynom 3. stupně má 4 koeficienty! Ale jeden z nich můžeme zvolit bez změny dynamiky

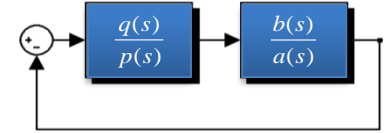


Umístění pólů: Soustava 2. řádu a PID regulátor

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

$$\frac{q(s)}{p(s)} = k_P + \frac{k_I}{s} + k_Ds = \frac{k_Ds^2 + k_Ps + k_I}{s}$$



- CL char. polynom je stupně 3 a 3. parametr může být vybrán libovolně
- polynom zvolíme ve tvaru $c(s) = \beta(s + \alpha\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2)$
a rovnice má tvar

$$(s^2 + a_1s + a_0)s + (b_1s + b_0)(k_Ds^2 + k_Ps + k_I) = \beta(s + \alpha\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2)$$

- porovnáním koeficientů u 3. mocniny dostaneme „vyrovnávací faktor“
 $\beta = 1 + b_1k_D$
- porovnáním dalších dostaneme 3 rovnice pro 3 neznámé parametry

$$a_1 + b_1k_P + b_0k_D = (\alpha\omega_0 + 2\zeta\omega_0)(1 + b_1k_D)$$

$$a_0 + b_1k_I + b_0k_P = (1 + 2\alpha\zeta)\omega_0^2(1 + b_1k_D)$$

$$b_0k_I = \alpha\omega_0^3(1 + b_1k_D)$$

Je to takhle možné
jen proto, že
PID regulátor
není ryzí systém

- soustavu vyřešíme a dostaneme k_D, k_P, k_I



Umístění dominantních pólů

- Umístíme jen některé CL póly, ty ostatní „vyjdou.“
- K tomu stačí jednoduchý regulátor

Bude ten umístěný pól dominantní?

Regulátor I

- Pro I regulátor $\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{k_I}{s}$ a obecnou soustavu $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$
- je CL charakteristický polynom $c(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s) = a(s)s + b(s)k_I$
- protože regulátor má jen jeden parametr, dokáže umístit jen jeden CL pól
- chtějme ho tedy umístit do pozice $s = -h, h > 0$
- až se nám to podaří, bude $s = -h$ kořenem CL charakteristického polynomu takže musí platit $c(-h) = a(-h)(-h) + b(-h)k_I = 0$
- řešením této rovnice pro hledaný parametr dostaneme

$$k_I = \frac{ha(-h)}{b(-h)} = \frac{h}{G(-h)}$$



- Vztah $u(s) = k_P \left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right] e(s)$ popisuje školní verzi PID regulátoru

HandbookOfPIDs.pdf

- Praktické realizace obsahují různé modifikace – desítky různých verzí

- Např.

$$u(s) = k \left[(by_{sp}(s) - y(s)) + \frac{1}{T_I s} (y_{sp}(s) - y(s)) - \frac{T_D s}{1 + T_D s / N} y(s) \right]$$

Oddělujeme odezvu od reference a poruchy, vlastně umísťujeme CL nuly

derivaci filtrujeme a umísťujeme jen v ZV, aby nereagovala přímo na referenci

derivuje jen na nízkých frekvencích na vysokých je omezena

$$\frac{T_D s}{1 + T_D s / N}$$

$\approx T_D s$

$\approx N \in [3, 20]$

- Nebo v průmyslu častá interagující forma

$$u(s) = k'_P \left(1 + \frac{1}{T'_I s} \right) (1 + T'_D s) e(s)$$

- Zapojíme do série zpoždění 1. řádu
- Zařadíme nelinearitu $Ke|e|$ nebo pásmo necitlivosti a mnohé další

tzv. „high frequency roll-off“