

12 - Frekvenční metody



Michael Šebek
Automatické řízení 2019



Proč frekvenční metody?


- **Řídicích systémy** se posuzují z časových odezev na určité vstupní signály
- Naopak v **komunikačních systémech** častěji užívají frekvenční odezvu (signály většinou sinusovky nebo periodické)
- Přesto jsou frekvenční metody důležitým doplňkem, neboť z frekvenčních vlastností můžeme odhadnout časové
- Pracují s naměřenou frekvenční odezvou, nemusíme hledat model
- To je současně nevýhodou: frekvenční odezva se musí dát naměřit! Metody tedy obvykle fungují jen pro stabilní (a často minimálně fázové) soustavy. Naopak jim nevádí dopravní zpoždění.
- Často dávají více než jen test CL stability: dávají informaci o „velikosti“ stability či nestability
- Pro pouhý test CL stability se dnes (máme-li model) nepoužívají
- **Pro zkoumání stability neminimálně-fázových systémů nepoužívej Bodeho graf, ale jen Nyquistův**



Nyquistovo kritérium stability

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Z Cauchyho principu argumentu plyne pro řízení:

- Nyquistův graf otevřené smyčky **obkrouží** kritický bod -1 **ve směru hodinových ručiček** právě tolikrát, kolik je **počet ryze nestabilních CL pólů minus počet ryze nestabilních OL pólů**.
- Jinak řečeno: CL systém má právě tolik **ryze nestabilních pólů**, kolik je **počet ryze nestabilních OL pólů plus počet obkroužení** bodu -1 Nyquistovým grafem OL **po směru hodinových ručiček**.
- Obkroužení proti směru hodinových ručiček  se počítají záporně.

Nyquistovo kritérium stability

CL systém je stabilní  počet obkroužení kritického bodu -1 proti směru hodinových ručiček roven počtu ryze nestabilních OL pólů

Speciálně pro OL stabilní systém

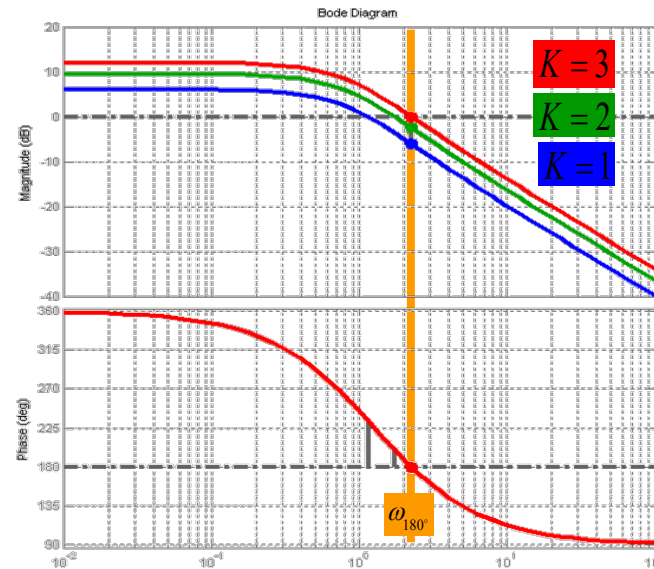
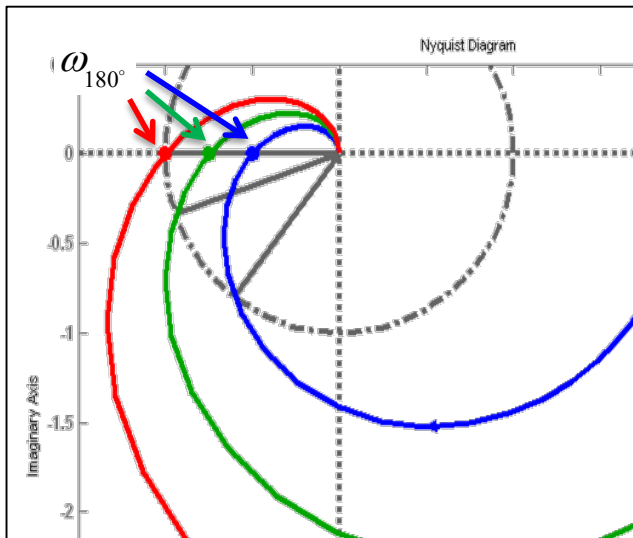
Je-li OL systém stabilní, pak je i CL systém stabilní 
Nyquistův OL graf neobkrouží kritický bod -1



Amplitudová bezpečnost – Gain Margin

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Verze pro **stabilní OL** přenos, který dá po uzavření smyčky (CL) **stabilní systém**, tedy OL graf **neobkrouží kritický bod**. Co se stane, když zvětšujeme zesílení?
- Fáze zůstává stejná, amplituda roste ➡ „rezerva“ v zesílení klesá, až klesne na nulu, graf $L(j\omega)$ protne kritický bod a CL systém je na mezi stability

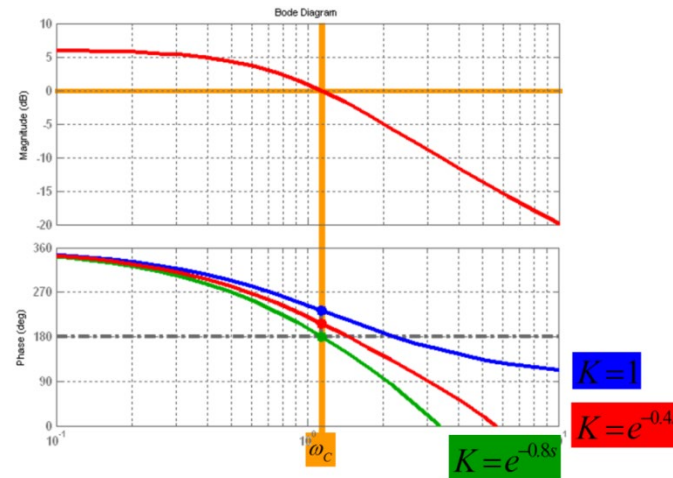
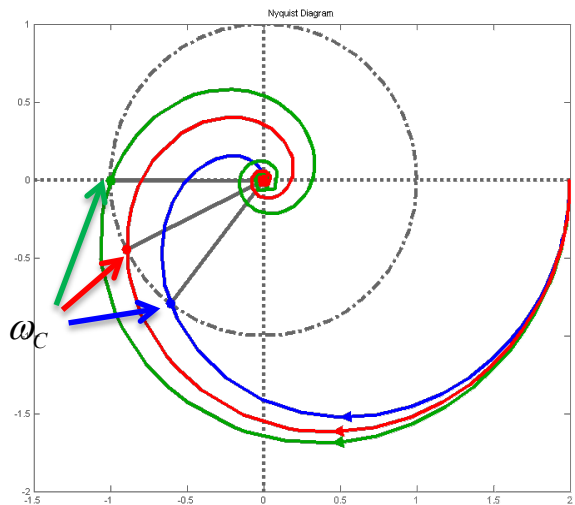


- Označíme (phase crossover) frekvenci $\omega_{180^\circ} : \angle L(j\omega_{180^\circ}) = -180^\circ$
- Definujeme amplitudovou bezpečnost (Gain Margin): $GM = 1/|L(j\omega_{180^\circ})|$
- GM říká, kolikrát se ještě může zvětšit OL zesílení, než CL ztratí stabilitu



Fázová bezpečnost – Phase Margin

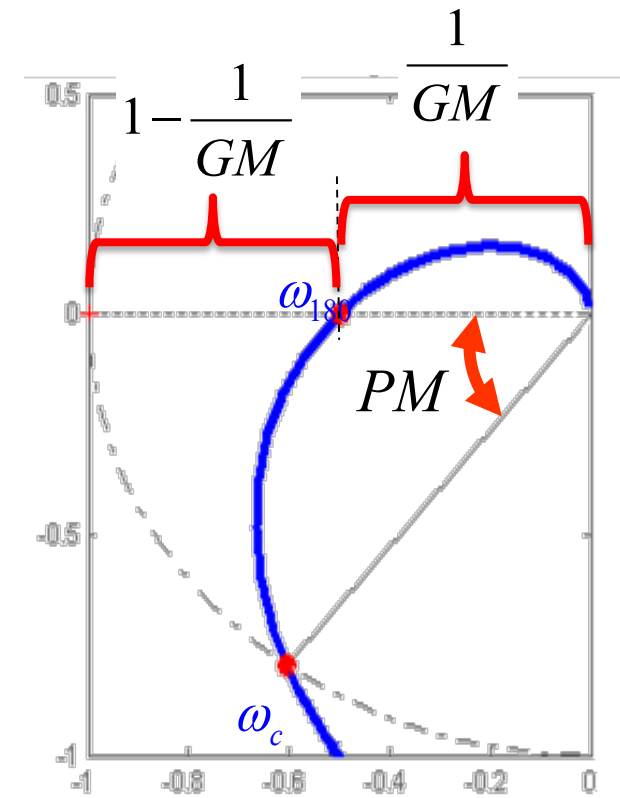
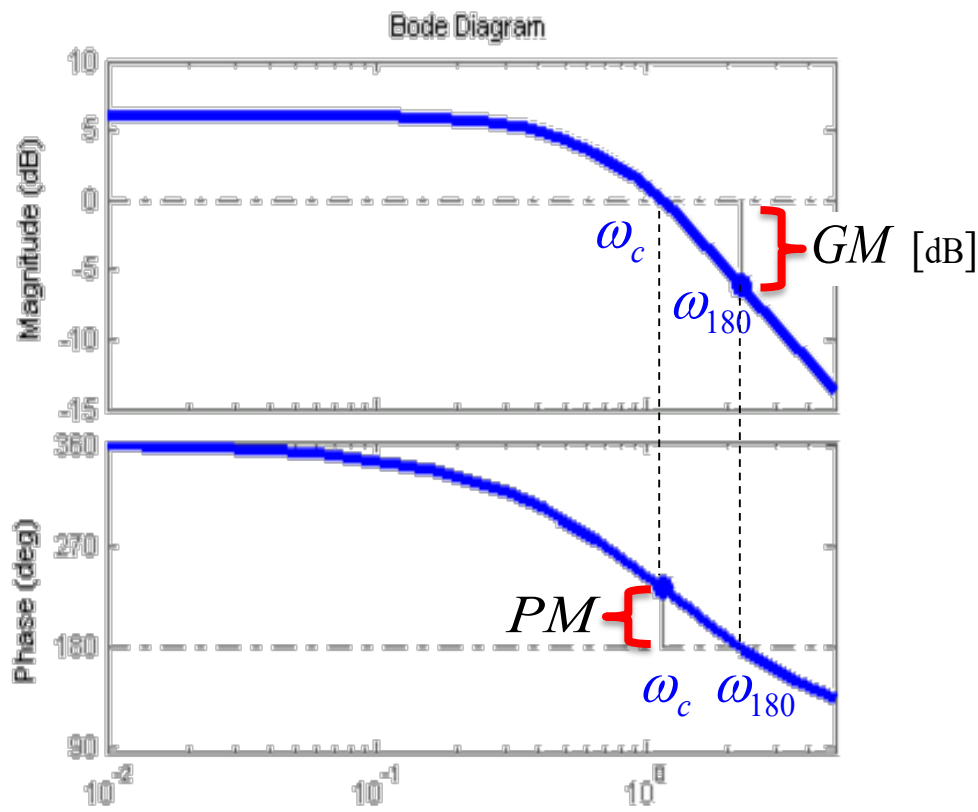
- Co se stane, když (za stejných podmínek) naopak zmenšujeme fázi např. přidáním dopravního zpoždění (při stejném zesílení)?
- amplituda zůstává stejná, fáze roste ➡ „rezerva“ ve fázi klesá, až klesne na nulu, graf $L(j\omega)$ protne kritický bod a CL je na mezi stability



- Označíme přechodovou (gain crossover) frekvenci $\omega_c : |L(j\omega_c)| = 1 = 0 \text{ dB}$
- Definujeme fázovou bezpečnost (Phase Margin): $PM = -180^\circ + \angle L(j\omega_c)$
- Říká, o kolik ještě můžeme zmenšit fázi (zvětšit negativní fázi = zpoždění)
- Někdy vyjadřujeme přímo v dopravním zpoždění $\theta_{\max} = PM_{\text{rad}} / \omega_c = (\pi/180) PM_{\text{deg}} / \omega_c$

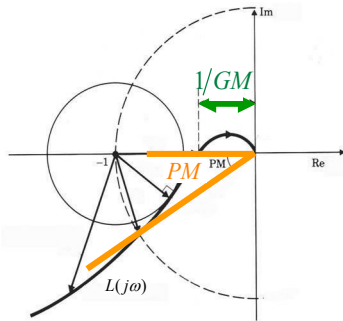


- GM je ochrana proti neurčitosti v zesílení: typicky $GM > 2$ (6dB)
- PM je ochrana proti neurčitosti dopravního zpoždění: typicky $PM > 30^\circ$



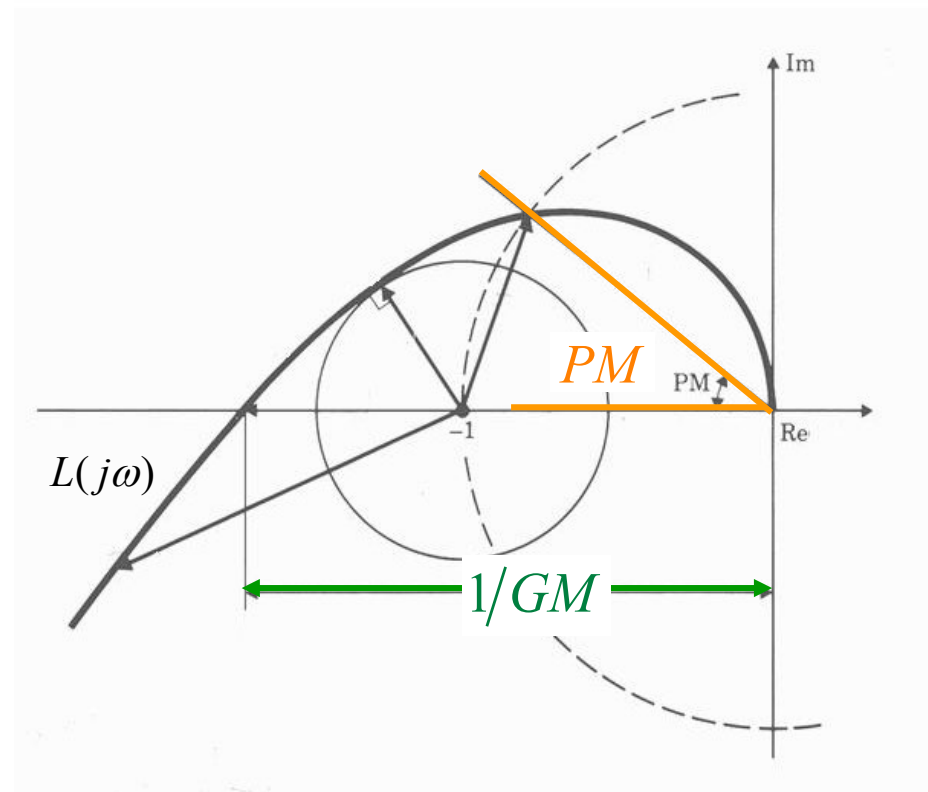


Obrácený případ



- Kromě uvedených případů to může být i opačně (nestabilní OL, stabilní CL):

- Pokud graf protne reálnou osu nalevo od -1, definujeme podobně dolní GM
- pak GM říká, kolikrát můžeme zesílení „beztrestně“ zmenšit
- podobně, protne-li graf jednot. kružnici v horní polorovině, odměříme PM „nahoru“
- Pak PM říká, o kolik můžeme fázi „beztrestně“ zvětšit





- Pokud graf protne zápornou reálnou osu „vícekrát na jedné straně“ uvažujeme to protnutí nejbližší bodu -1
- Pokud ji protne na obou stranách, definujeme GM intervalem (K_{\min}, K_{\max})

Definice

- Pro CL stabilní $L(s) = L_0(s)$
- zůstane CL stabilní pro všechna

$$L(s) = kL_0(s)$$

$$k_{\min} < k < k_{\max}$$

- ale bude nestabilní pro

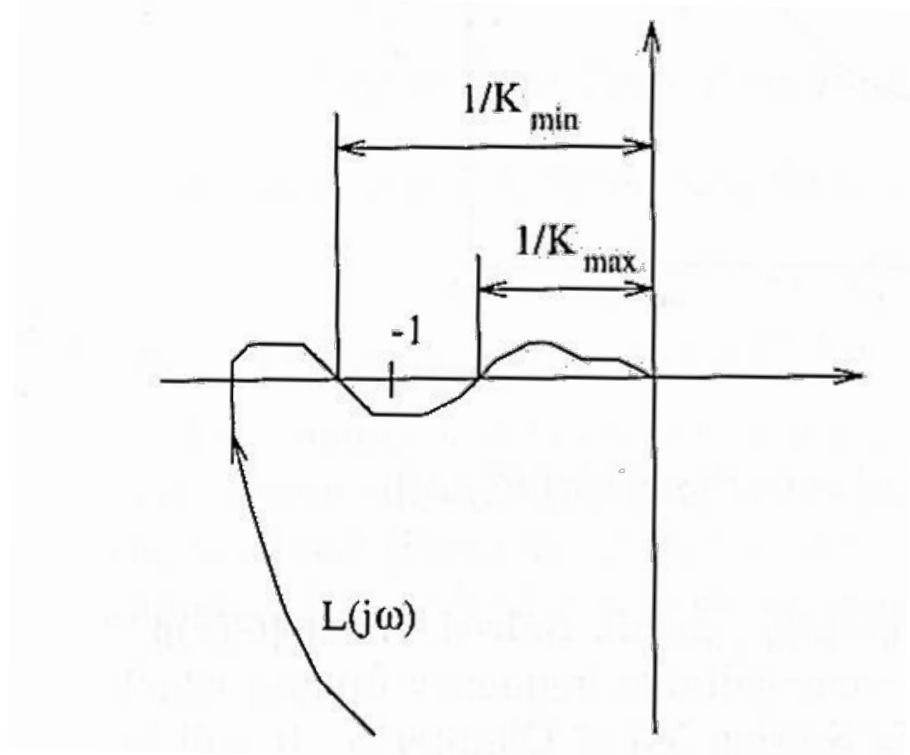
$$L(s) = k_{\min} L_0(s)$$

a

$$L(s) = k_{\max} L_0(s)$$

- Přitom $0 \leq k_{\min} \leq 1$

$$1 \leq k_{\max} \leq \infty$$





- pokud graf protne jednotkovou kružnici „vícekrát na jedné straně“ uvažujeme to protnutí nejbližší bodu -1
- Pokud ji protne na obou stranách definujeme PM intervalem $(\phi_{\min}, \phi_{\max})$

Definice

- Pro CL stabilní při $L(s) = L_0(s)$
- zůstane CL stabilní pro všechna

$$L(s) = e^{-j\phi} L_0(s)$$

$$\phi_{\min} < \phi < \phi_{\max}$$

- ale bude nestabilní pro

$$L(s) = e^{-j\phi_{\min}} L_0(s)$$

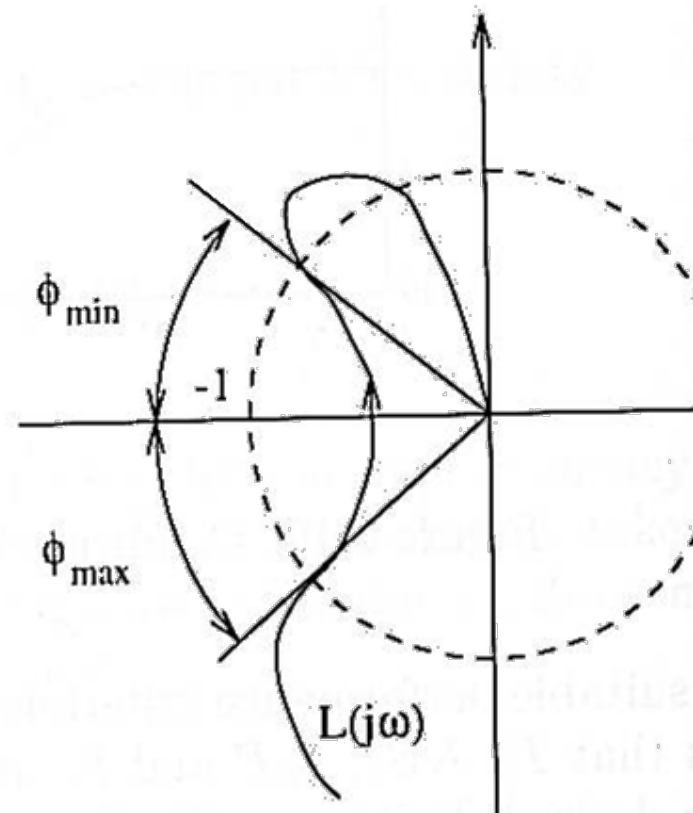
a

$$L(s) = e^{-j\phi_{\max}} L_0(s)$$

- Přitom

$$-\pi \leq \phi_{\min} \leq 0$$

$$0 \leq \phi_{\max} \leq \pi$$





Co je špatného na klasických pojmech ?

Nedostatky klasických pojmů:

- GM má smysl, když je změna (neurčitost) jen v zesílení
- PM má smysl, když je změna (neurčitost) jen ve fázi
- Ale co když je neurčitost v zesílení i fázi současně?

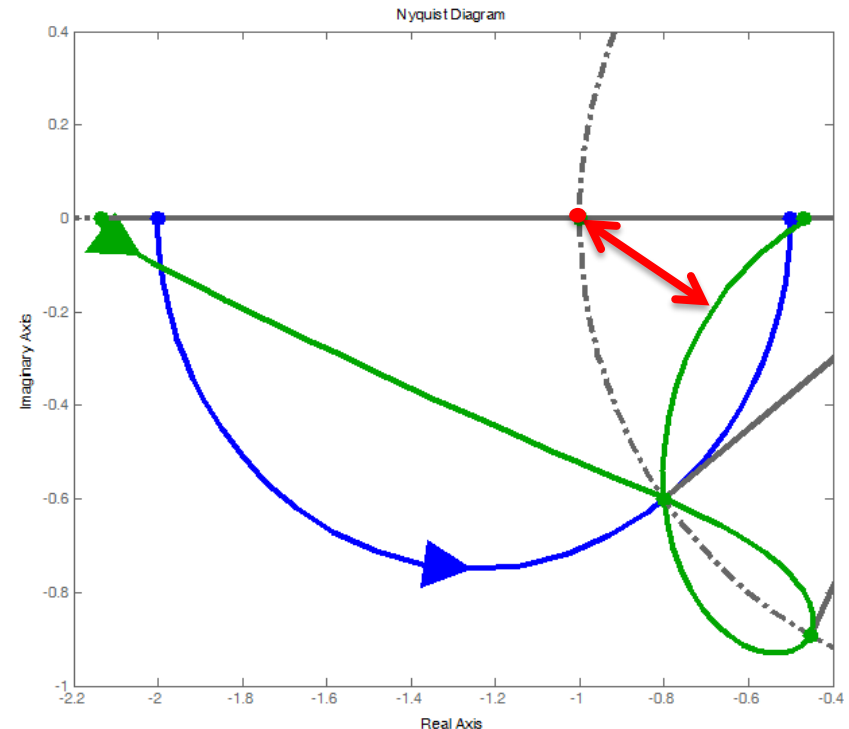
Realističtější případ změny (neurčitosti) :

- v zesílení i fázi současně

$$L(s) = kL_0(s)e^{-j\phi}$$

$$k \in [k_{\min}, k_{\max}], \phi \in [\phi_{\min}, \phi_{\max}]$$

- přestože GM i PM jsou O.K., současná změna fáze i zesílení může být problém !
- je proto lepší použít vzdálenost grafu od kritického bodu
- tedy moderní přístup s tzv. normou H_∞





Frekvenční odezva uzavřené smyčky

Vztah mezi OL a CL frekvenční charakteristikou

- CL přenos je

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

- přibližně platí

$$|T(s)| \approx \begin{cases} 1 & \text{pro } |L(s)| \text{ velké} \\ |L(s)| & \text{pro } |L(s)| \text{ malé} \end{cases}$$

- protože je typicky

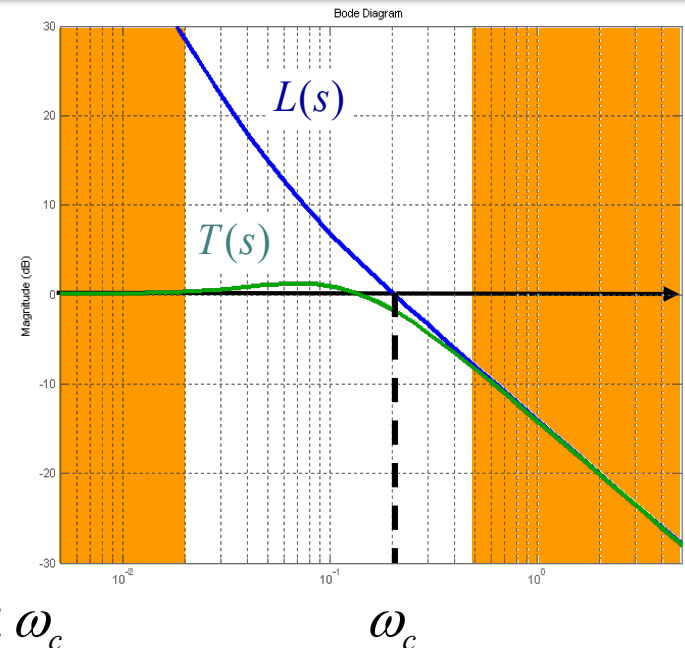
$$|L(s)| \begin{cases} \text{velké pro malé frekvence } \omega \ll \omega_c \\ \text{malé pro velké frekvence } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

- je také typicky

$$|T(s)| \approx \begin{cases} 1 & \text{pro malé frekvence } \omega \ll \omega_c \\ |L(s)| & \text{pro velké frekvence } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

- Podobně

$$|S(s)| = \frac{1}{1 + L(s)} \approx \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$





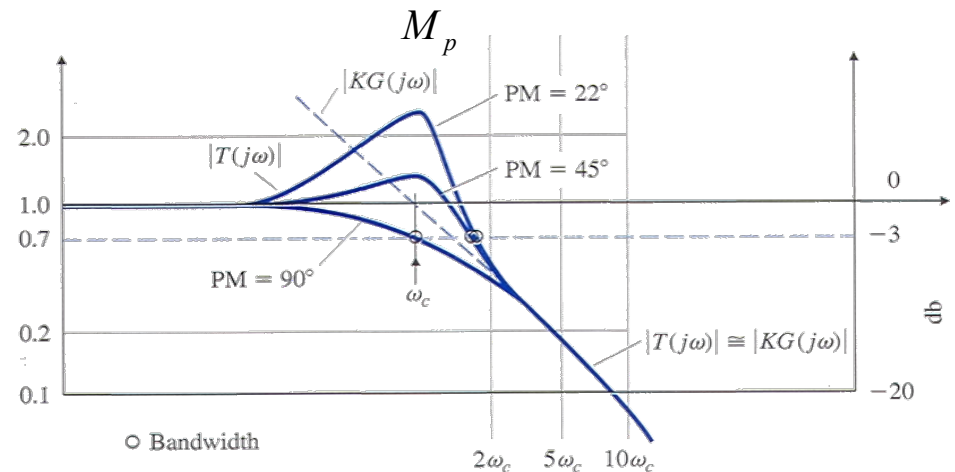
Pásmo kolem přechodové frekvence

- v pásmu kolem ω_c je $|L(s)| \approx 1$ a $|T(s)|$ může být různé
- velikost $|T(s)|$ souvisí s PM
- PM=90° $\rightarrow \angle L(j\omega_c) = -90^\circ, L(j\omega_c) = -j \rightarrow |T(j\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \approx 0.7 < 1 \rightarrow M_p, \text{dB} < 0$
- PM=45° $\rightarrow \angle L(j\omega_c) = -135^\circ, L(j\omega_c) = -\sqrt{2} - j\sqrt{2} \rightarrow |T(j\omega_c)| \approx 1.36 > 1 \rightarrow M_p, \text{dB} > 0$
- Pro 2. řád bez nul se dá odvodit

$$PM = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}, \zeta \leq \sqrt{2}/2 \approx 0.707$$

$$M_p = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$



- pro $\zeta > \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ špička není – Pozor, neplést s překmitem!
- návrháři raději užívají PM, protože neurčitost způsobená nelinearitami a zpožděními spíše ovlivňuje fázi

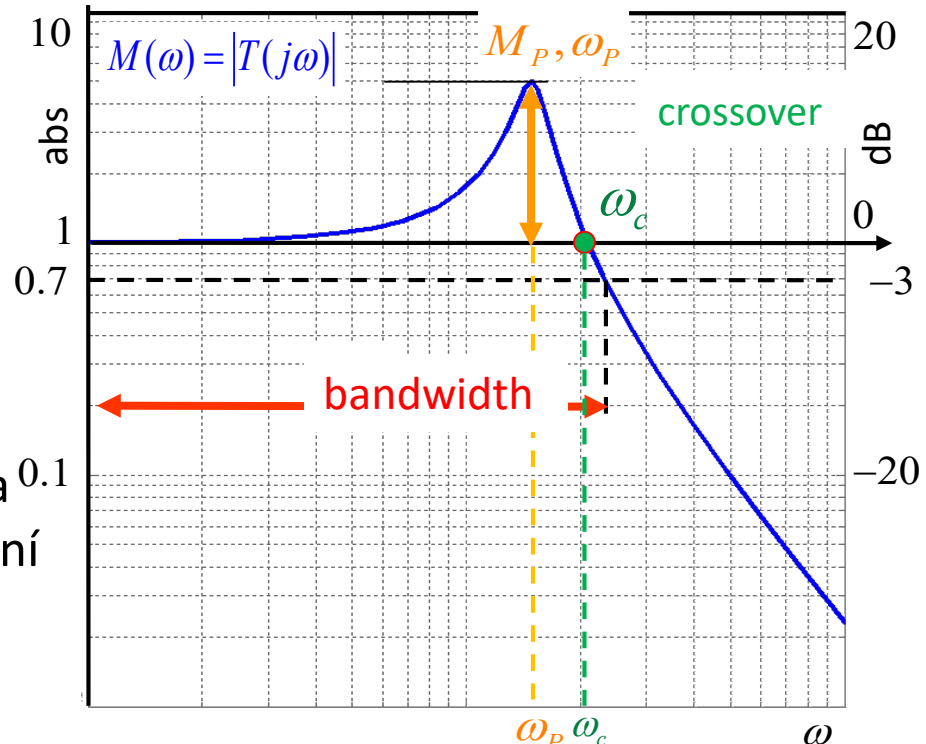


Šířka pásma a přechodová frekvence

- přirozenou frekvenční specifikací je šířka pásma = maximální frekvence, při které výstup rozumně sleduje sinusový vstup
- řízené systémy bývají dolní propusti: výstup dobře sleduje vstup pro malé ω ($|T| \approx 1$), ale ne pro velké ($|T| \ll 1$)
- v klasickém řízení je šířka pásma dána frekvencí, na které má výstup poloviční energii než vstup $y^2 = 0.5u^2$
- Z toho

$$|Y(j\omega)| = \sqrt{1/2} |U(j\omega)| = 0.707 |U(j\omega)| \Leftrightarrow |Y(j\omega)|_{\text{dB}} = |U(j\omega)|_{\text{dB}} - 3 \text{ dB}$$

- šířka pásma rozhoduje o rychlosti odezvy
- Větší šířka \rightarrow rychlejší náběh, ale větší citlivost na šum a variaci parametrů.
- Menší šířka pásma \rightarrow pomalejší odezvu, ale obvykle robustnější systém

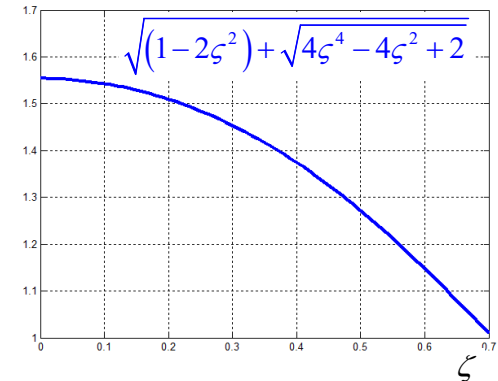




- pro 2. řád můžeme odvodit (z $M(\omega_{BW}) = 1/\sqrt{2}$)

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

- Někdy velmi přibližně bereme $\omega_{BW} \approx \omega_n$ (Pozor CL!) ale přesně to platí jen pro $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.7$
- Platí také $\omega_c \leq \omega_{BW} \leq 2\omega_c$
- Předchozího vzorce můžeme spojit se známými



$$T_s \doteq \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad \longrightarrow \quad \omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \quad \longrightarrow \quad \omega_{BW} = \frac{1.8}{T_r} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \longrightarrow \quad \omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} \quad \longleftarrow$$