12 - Frekvenční metody

Michael Šebek

Automatické řízení 2016

Proč frekvenční metody?

- Řídicích systémy se posuzují z časových odezev na určité vstupní signály
- Naopak v komunikačních systémech častěji užívají frekvenční odezvu (signály většinou sinusovky nebo periodické)
- Přesto jsou frekvenční metody důležitým doplňkem, neboť z frekvenčních vlastností můžeme odhadnout časové
- Pracují s naměřenou frekvenční odezvou, nemusíme hledat model
- To je současně nevýhodou: frekvenční odezva se musí dát naměřit! Metody tedy obvykle fungují jen pro stabilní (a často minimálně fázové) soustavy. Naopak jim nevadí dopravní zpoždění.
- Často dávají více než jen test CL stability: dávají informaci o „velikosti“ stability či nestability
- Pro pouhý test CL stability se dnes (máme-li model) nepoužívají
- Pro zkoumání stability neminimálně-fázových systémů nepoužívej Bodeho graf, ale jen Nyquistův

Nyquistovo kritérium stability

Z Cauchyho principu argumentu plyne pro řízení:

- Nyquistův graf otevřené smyčky obkrouží kritický bod -1 ve směru hodinových ručiček právě tolikrát, kolik je počet ryze nestabilních CL pólů minus počet ryze nestabilních OL pólů.
- Jinak řečeno: CL systém má právě tolik ryze nestabilních pólů, kolik je počet ryze nestabilních OL pólů plus počet obkroužení bodu -1 Nyquistovým grafem OL po směru hodinových ručiček.
- Obkroužení proti směru hodinových ručiček se počítají záporně.

Nyquistovo kritérium stability

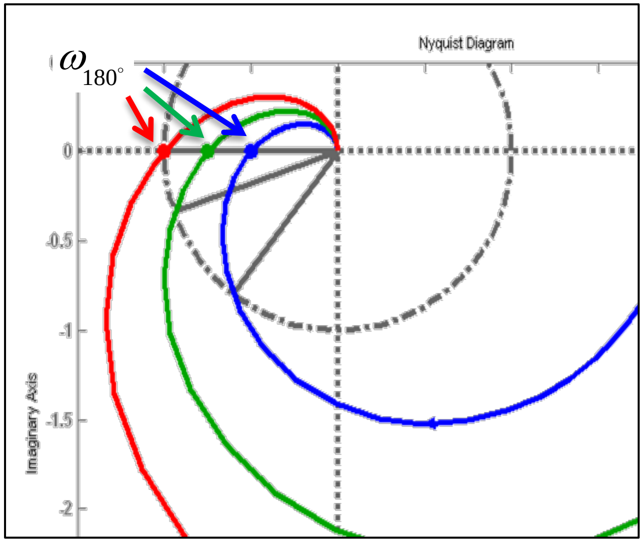
CL systém je stabilní $\Longleftrightarrow$ počet obkroužení kritického bodu -1 proti směru hodinových ručiček roven počtu ryze nestabilních OL pólů

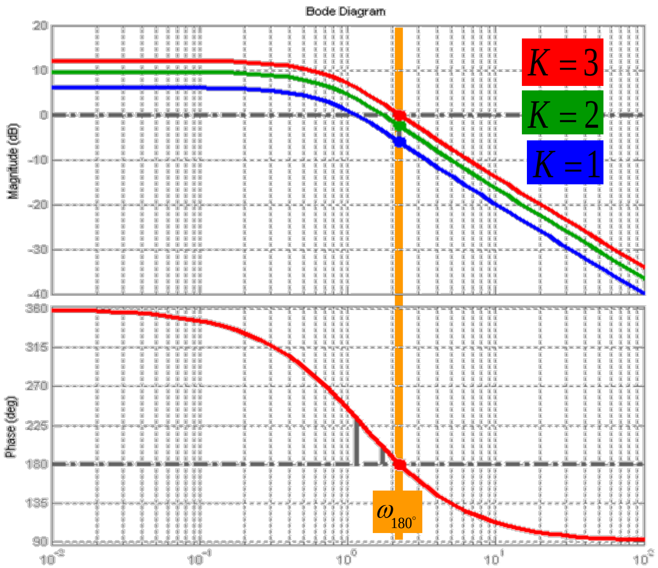
Speciálně pro OL stabilní systém

Je-li OL systém stabilní, pak je i CL systém stabilní $\Longleftrightarrow$ Nyquistův OL graf neobkrouží kritický bod -1

Amplitudová bezpečnost – Gain Margin

- Verze pro stabilní OL přenos, který dá po uzavření smyčky (CL) stabilní systém, tedy OL graf neobkrouží kritický bod. Co se stane, když zvětšujeme zesílení?
- Fáze zůstává stejná, amplituda roste ➡ „rezerva" v zesílení klesá, až klesne na nulu, graf $L(j\omega)$ protne kritický bod a CL systém je na mezi stability

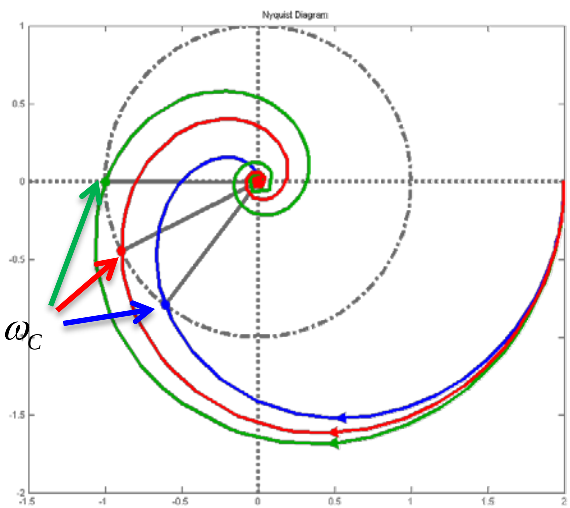


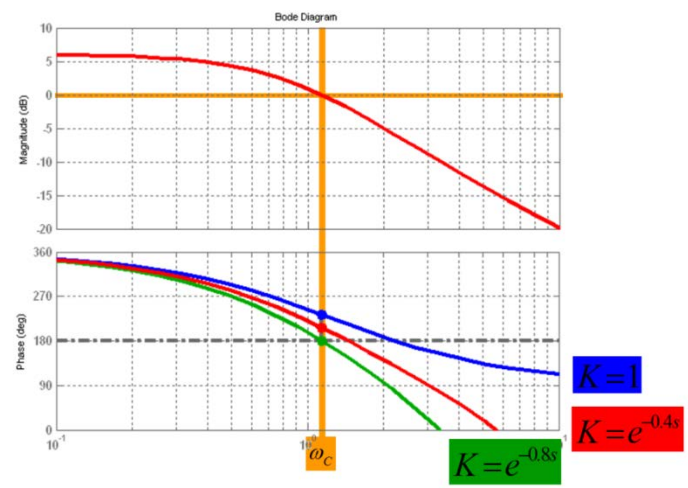


- Označíme (phase crossover) frekvenci $\omega_{180^\circ} : \angle L(j\omega_{180^\circ}) = -180^\circ$
- Definujeme amplitudovou bezpečnost (Gain Margin): $\boxed{GM = 1/\left|L(j\omega_{180^\circ})\right|}$
- GM říká, kolikrát se ještě může zvětšit OL zesílení, než CL ztratí stabilitu

Fázová bezpečnost – Phase Margin

- Co se stane, když (za stejných podmínek) naopak zmenšujeme fázi např. přidáním dopravního zpoždění (při stejném zesílení)?
- amplituda zůstává stejná, fáze roste ➡ „rezerva" ve fázi klesá, až klesne na nulu, graf $L(j\omega)$ protne kritický bod a CL je na mezi stability



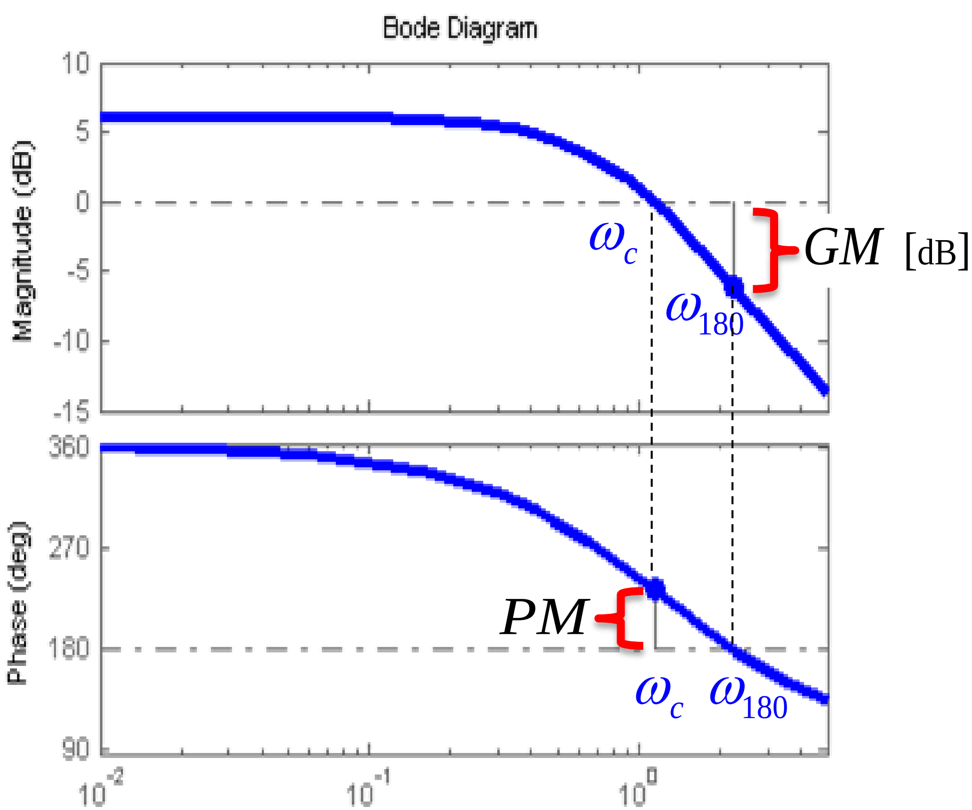


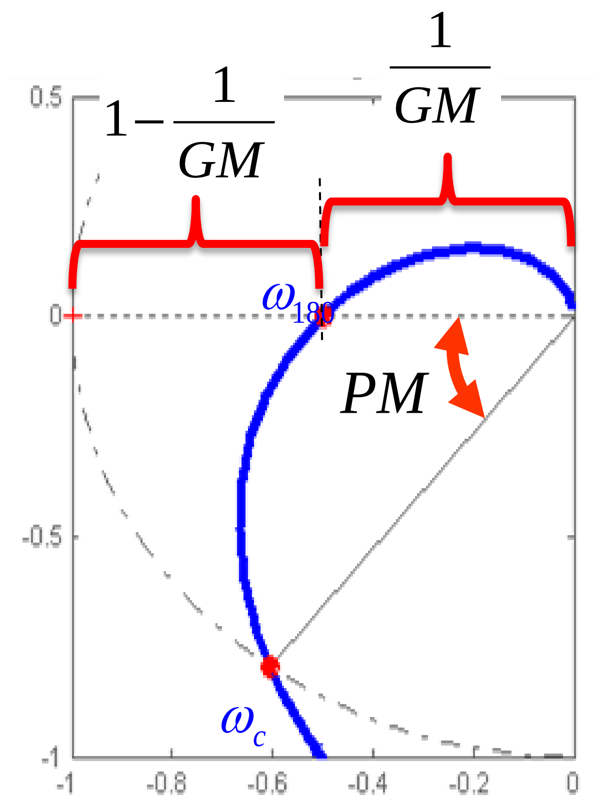
- Označíme přechodovou (gain crossover) frekvenci $\omega_C : |L(j\omega_C)| = 1 = 0\,\mathrm{dB}$
- Definujeme fázovou bezpečnost (Phase Margin): $\boxed{PM = -180^\circ + \angle L(j\omega_C)}$

  Říká, o kolik ještě můžeme zmenšit fázi (zvětšit negativní fázi = zpoždění)
- Někdy vyjadřujeme přímo v dopravním zpoždění $\theta_{\max} = \mathrm{PM}_{\mathrm{rad}}/\omega_c = (\pi/180)\mathrm{PM}_{\mathrm{deg}}/\omega_c$

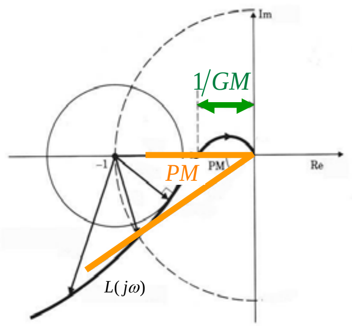
Shrnutí

- GM je ochrana proti neurčitosti v zesílení: typicky GM > 2 (6dB)
- PM je ochrana proti neurčitosti dopravního zpoždění: typicky PM >30°

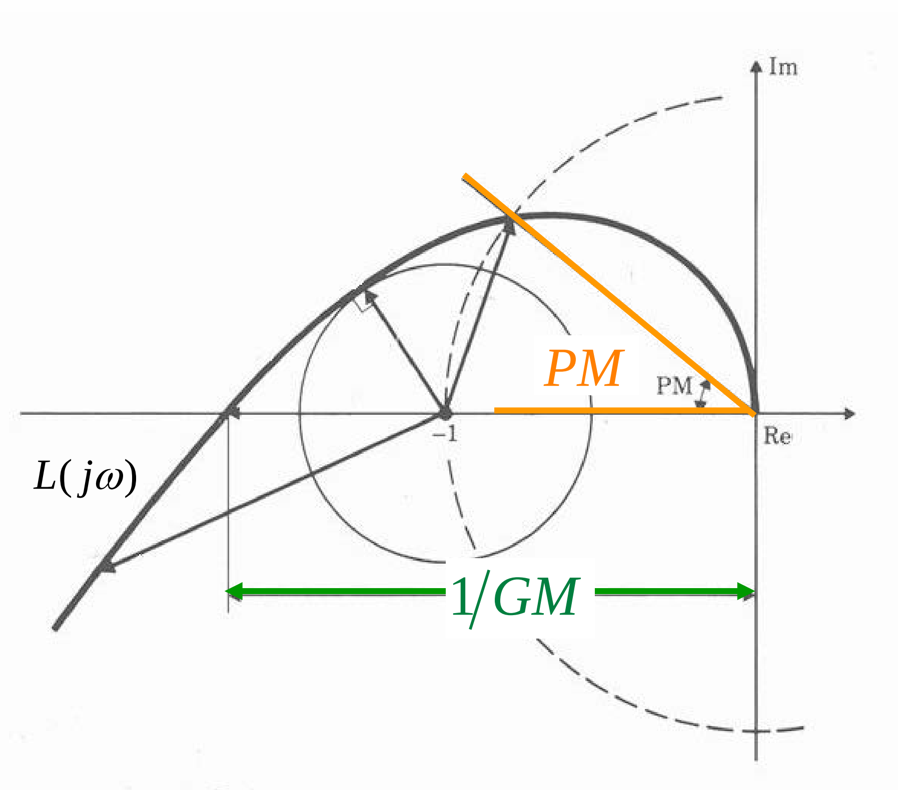




Obrácený případ



- Kromě uvedených případů to může být i opačně (nestabilní OL, stabilní CL):



- Pokud graf protne reálnou osu nalevo od -1, definujeme podobně dolní GM
- pak GM říká, kolikrát můžeme zesílení „beztrestně“ zmenšit
- podobně, protne-li graf jednot. kružnici v horní polorovině, odměříme PM „nahoru“
- Pak PM říká, o kolik můžeme fázi „beztrestně“ zvětšit

GM obecný případ

- Pokud graf protne zápornou reálnou osu „vícekrát na jedné straně“ uvažujeme to protnutí nejbližší bodu -1
- Pokud ji protne na obou stranách, definujeme GM intervalem $\left(K_{\min}, K_{\max}\right)$

Definice

- Pro CL stabilní $L(s) = L_0(s)$
- zůstane CL stabilní pro všechna

$$L(s) = kL_0(s)$$

$$k_{\min} < k < k_{\max}$$

- ale bude nestabilní pro

$$L(s) = k_{\min} L_0(s)$$

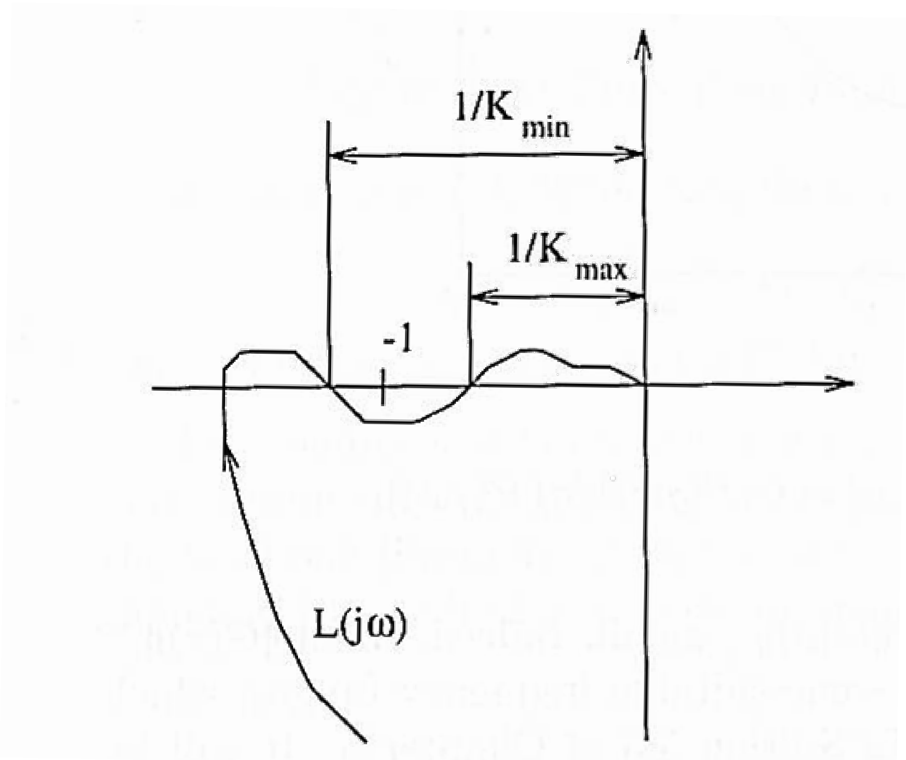
a

$$L(s) = k_{\max} L_0(s)$$

- Přitom

$$0 \le k_{\min} \le 1$$

$$1 \le k_{\max} \le \infty$$



PM obecný případ

- pokud graf protne jednotkovou kružnici „vícekrát na jedné straně“ uvažujeme to protnutí nejbližší bodu -1
- Pokud ji protne na obou stranách definujeme PM intervalem $(\phi_{\min}, \phi_{\max})$

Definice

- Pro CL stabilní při $L(s) = L_0(s)$
- zůstane CL stabilní pro všechna

$$L(s) = e^{-j\phi} L_0(s)$$

$$\phi_{\min} < \phi < \phi_{\max}$$

- ale bude nestabilní pro

$$L(s) = e^{-j\phi_{\min}} L_0(s)$$

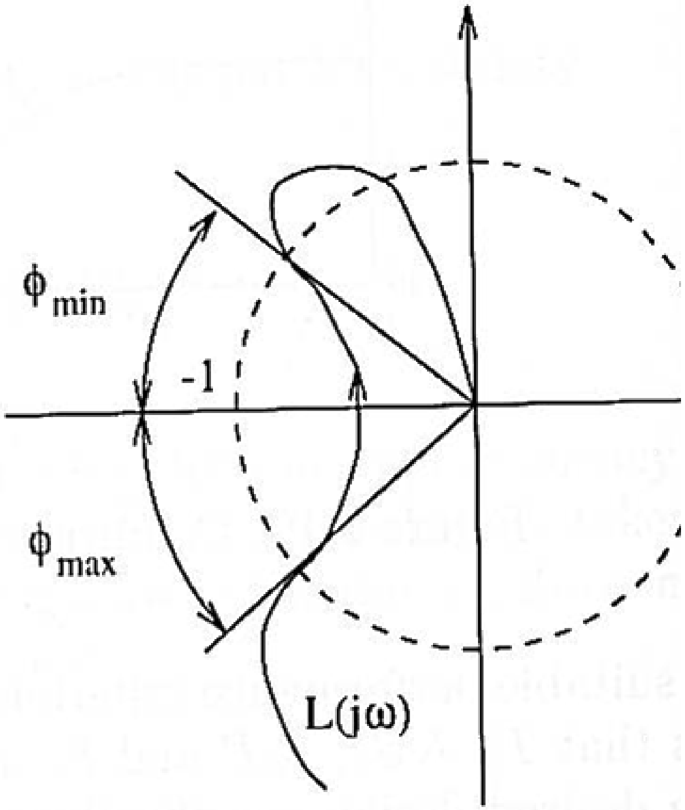
a

$$L(s) = e^{-j\phi_{\max}} L_0(s)$$

- Přitom

$$-\pi \le \phi_{\min} \le 0$$

$$0 \le \phi_{\max} \le \pi$$



Co je špatného na klasických pojmech ?

Nedostatky klasických pojmů:

- GM má smysl, když je změna (neurčitost) jen v zesílení
- PM má smysl, když je změna (neurčitost) jen ve fázi
- Ale co když je neurčitost v zesílení i fázi současně?

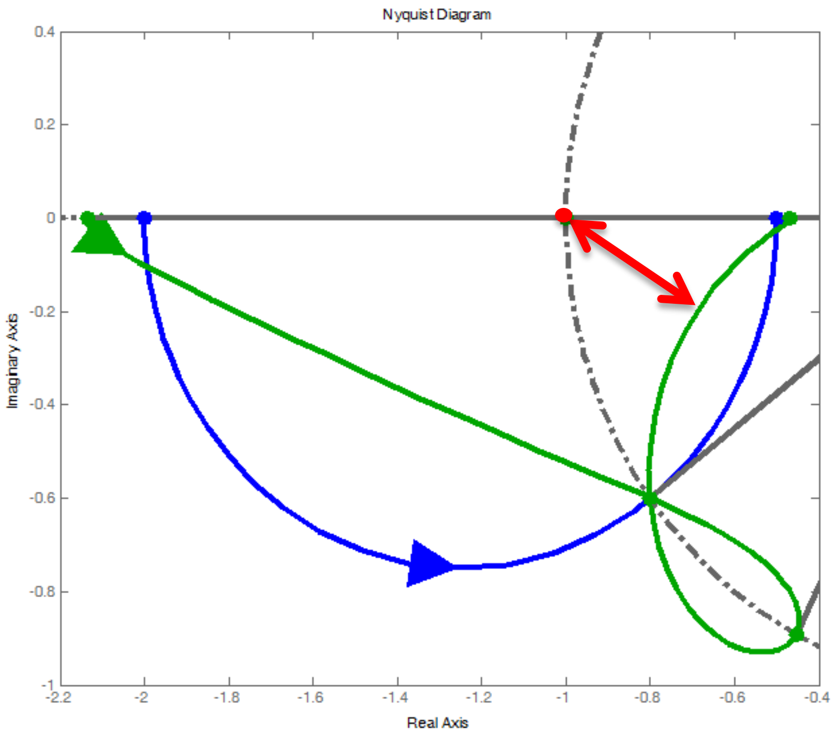
Realističtější případ změny (neurčitosti) :

- v zesílení i fázi současně

$$L(s) = kL_0(s)e^{-j\phi}$$

$$k \in [k_{\min}, k_{\max}],\ \phi \in [\phi_{\min}, \phi_{\max}]$$

- přestože GM i PM jsou O.K., současná změna fáze i zesílení může být problém !
- je proto lepší použít vzdálenost grafu od kritického bodu
- tedy moderní přístup s tzv. normou H_∞



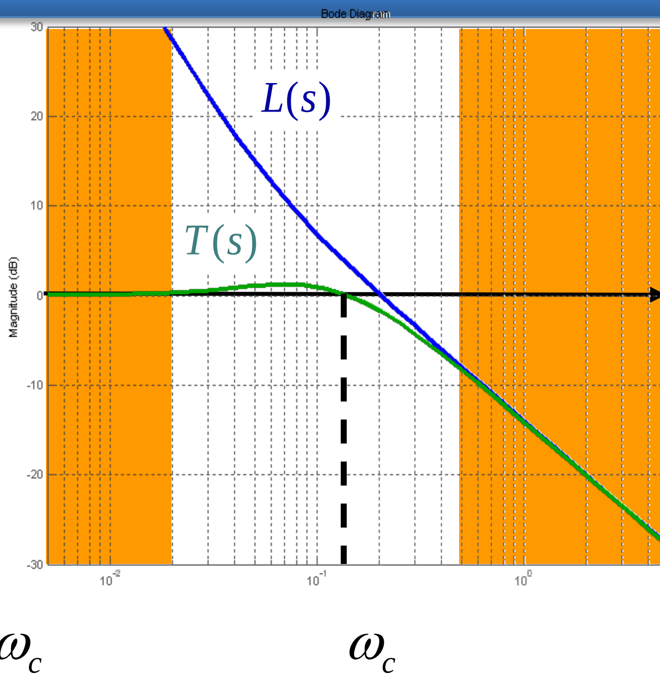
Vztah mezi OL a CL frekvenční charakteristikou

- CL přenos je

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

- přibližně platí

$$|T(s)| \approx \begin{cases} 1 & \text{pro } |L(s)| \text{ velké} \\ |L(s)| & \text{pro } |L(s)| \text{ malé} \end{cases}$$



- protože je typicky

$$|L(s)| \begin{cases} \text{velké pro malé frekvence } \omega \ll \omega_c \\ \text{malé pro velké frekvence } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

- je také typicky

$$|T(s)| \approx \begin{cases} 1 & \text{pro malé frekvence } \omega \ll \omega_c \\ |L(s)| & \text{pro velké frekvence } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

- Podobně

$$|S(s)| = \frac{1}{1+L(s)} \approx \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Pásmo kolem přechodové frekvence

- v pásmu kolem ω_c je $|L(s)| \approx 1$ a $|T(s)|$ může být různé
- velikost $|T(s)|$ souvisí s PM

PM=90° ➡ $\angle L(j\omega_c) = -90^\circ, L(j\omega_c) = -j$ ➡ $|T(j\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \approx 0.7 < 1$ ➡ $M_{p,\mathrm{dB}} < 0$

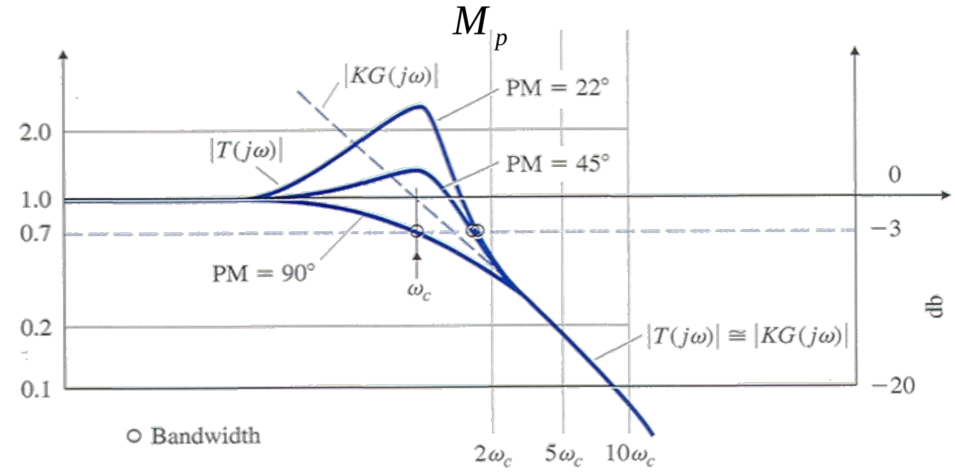
PM=45° ➡ $\angle L(j\omega_c) = -135^\circ, L(j\omega_c) = -\sqrt{2} - j\sqrt{2}$ ➡ $|T(j\omega_c)| \approx 1.36 > 1$ ➡ $M_{p,\mathrm{dB}} > 0$

- Pro 2. řád bez nul se dá odvodit

$$PM = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}}$$

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

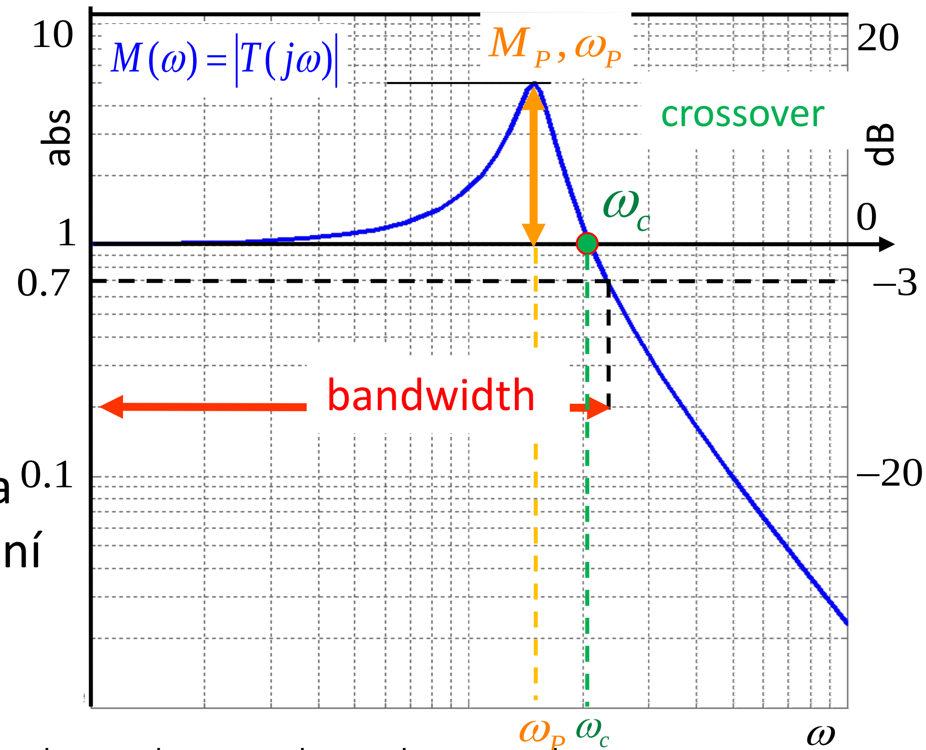
$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$



- návrháři raději užívají PM, protože neurčitost způsobená nelinearitami a zpožděními spíše ovlivňuje fázi

Šířka pásma a přechodová frekvence

- přirozenou frekvenční specifikací je šířka pásma = maximální frekvence, při které výstup rozumně sleduje sinusový vstup
- řízené systémy bývají dolní propusti: výstup dobře sleduje vstup pro malé ω $\left(|T|\approx 1\right)$, ale ne pro velké $\left(|T|<<1\right)$
- v klasickém řízení je šířka pásma dána frekvencí, na které má výstup poloviční energii než vstup $y^2 = 0.5u^2$
- Z toho



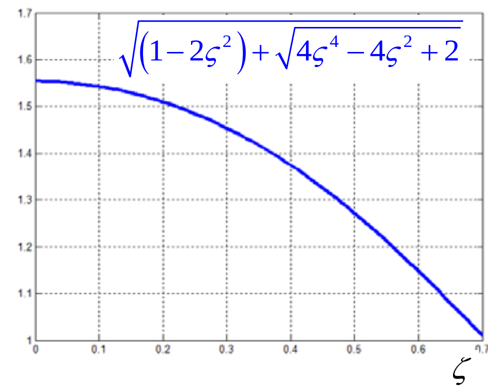
$$|Y(j\omega)| = \sqrt{1/2}\,|U(j\omega)| = 0.707\,|U(j\omega)| \;\Leftrightarrow\; |Y(j\omega)|_{\text{dB}} = |U(j\omega)|_{\text{dB}} - 3\,\text{dB}$$

- šířka pásma rozhoduje o rychlosti odezvy
- Větší šířka → rychlejší náběh, ale větší citlivost na šum a variaci parametrů.
- Menší šířka pásma → pomalejší odezvu, ale obvykle robustnější systém

Vzorečky

- pro 2. řád můžeme odvodit (z $M(\omega_{BW}) = 1/\sqrt{2}$)

$$\boxed{\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{\left(1-2\varsigma^2\right) + \sqrt{4\varsigma^4 - 4\varsigma^2 + 2}}}$$



- Někdy velmi přibližně bereme $\omega_{BW} \approx \omega_n$ (Pozor CL!) ale přesně to platí jen pro $\zeta = 1/\sqrt{2} \cong 0.7$
- Platí také $\omega_c \le \omega_{BW} \le 2\omega_c$
- Předchozího vzorce můžeme spojit se známými

$$T_s \doteq \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_{BW} = \frac{4}{T_S \varsigma} \sqrt{\left(1-2\varsigma^2\right) + \sqrt{4\varsigma^4 - 4\varsigma^2 + 2}}$$

$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_{BW} = \frac{1.8}{T_r} \sqrt{\left(1-2\varsigma^2\right) + \sqrt{4\varsigma^4 - 4\varsigma^2 + 2}}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{\left(1-2\varsigma^2\right) + \sqrt{4\varsigma^4 - 4\varsigma^2 + 2}}$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$