

14 - Moderní frekvenční metody



Michael Šebek
Automatické řízení 2018

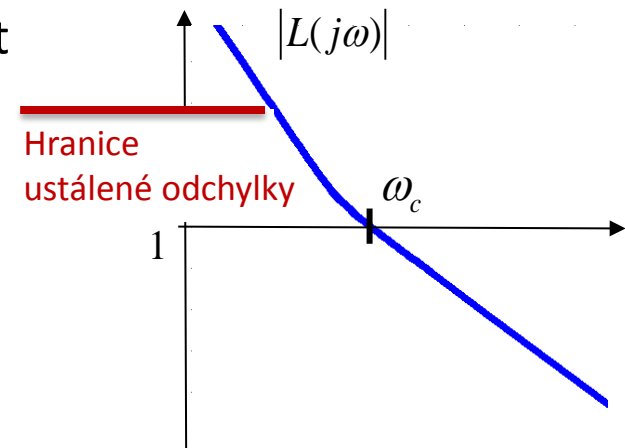


Loop shaping: Chování pro nízké frekvence

- Tvar OL frekvenční charakteristiky $L(s)=KD(s)G(s)$ určuje chování, ustálenou odchylku a dynamickou odezvu
- ZV dále redukuje vliv šumu měření, změny parametrů a dalších neurčitostí
- Pro odchylku platí $e(j\omega) = S(j\omega)r(j\omega) - S(j\omega)d(j\omega) + T(j\omega)n(j\omega)$ a z toho
 $|e(j\omega)| \leq |S(j\omega)||r(j\omega)| + |S(j\omega)||d(j\omega)| + |T(j\omega)||n(j\omega)|$ z trojúhelníkové nerovnosti
- Pro nízké frekvence je typicky $|r(j\omega)| \geq 0, |d(j\omega)| \geq 0, |n(j\omega)| \approx 0$
a proto musíme zajistit $|S(j\omega)| \approx 0 \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1$
- Z toho plyne hranice pro velmi nízké frekvence
- Pro přijatelnou regulační odchylku musíme stanovit dolní mez pro zesílení při velmi nízkých frekvencích

$$|L(j\omega)| \gg 1 \quad \rightarrow \quad |T(j\omega)| \cong 1, |S(j\omega)| \cong 0$$

$$|e(j\omega)| \leq 0 \times |r(j\omega)| + 0 \times |d(j\omega)| + \underbrace{1}_{=0} |n(j\omega)|$$





Loop Shaping - Chování pro vysoké frekvence

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

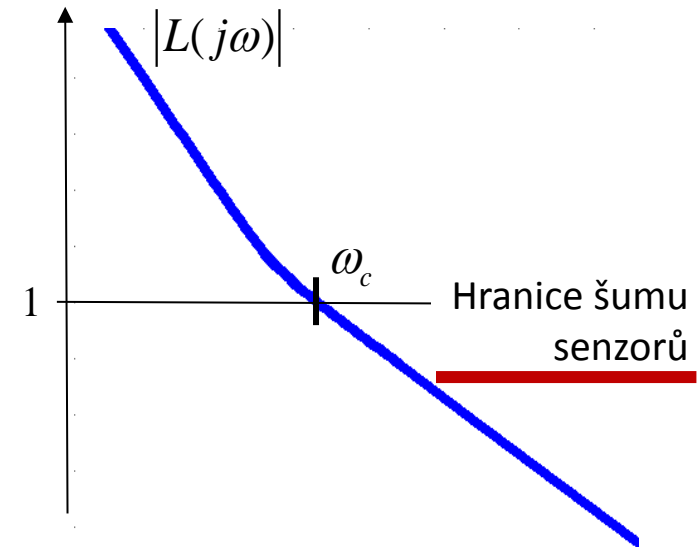
Pro vysoké frekvence

$$|r(j\omega)| \approx 0, |n(j\omega)| \geq 0$$

- šumy mívají vyšší frekvence

Návrh pro potlačení vlivu šumu senzorů

- stanovení horní meze pro zesílení při vysokých frekvencích



$$|L(j\omega)| \ll 1 \quad \rightarrow \quad |T(j\omega)| \cong 0, |S(j\omega)| \cong 1$$

$$|e(j\omega)| \leq |S(j\omega)| |r(j\omega)| + |S(j\omega)| |d(j\omega)| + |T(j\omega)| |n(j\omega)|$$

$$|e(j\omega)| \leq 1 \times |r(j\omega)| + 1 \times |d(j\omega)| + 0 \times |n(j\omega)|$$

Když má i porucha vysoké frekvence, je to problém



Loop Shaping - Neurčitost

Další hranice pro vysoké frekvence

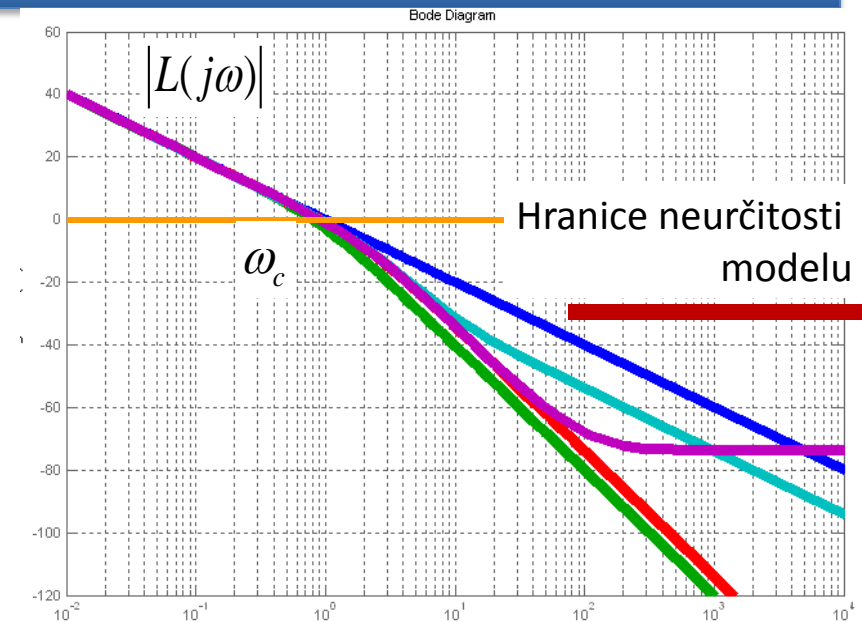
Potlačení vlivu neurčitosti v soustavě
= stanovení horní meze vf zesílení

Neurčitost je typicky větší na vf.
typicky zanedbáním dynamiky vyšších řádů

Kdybychom s dynamikou vyšších řádů počítali, bude návrh složitý
Raději ji zahrneme do neurčitosti a detaily ignorujeme!

Návrh musí zajistit, aby $|L(j\omega)|$ pro vf. nepřekročila hranici $1 = 0\text{dB}$
pak nezáleží na fázi

Jinak bychom s ní museli počítat a návrh by byl složitý





A teď obojí současně
Dolní mez pro v_f

$$|L(j\omega)| > W_1 \quad \omega \in \langle 0, \omega_{nf} \rangle$$
$$\Rightarrow S(j\omega) < \frac{1}{W_1}, T(j\omega) \cong 1$$

Př.: Když požadujeme, aby výstup sledoval sinusový vstupní signál s frekvencí $\omega \in [\omega_{vf}, \infty)$ a s odchylkou ne větší než 1%, volíme $W_1 = 100$

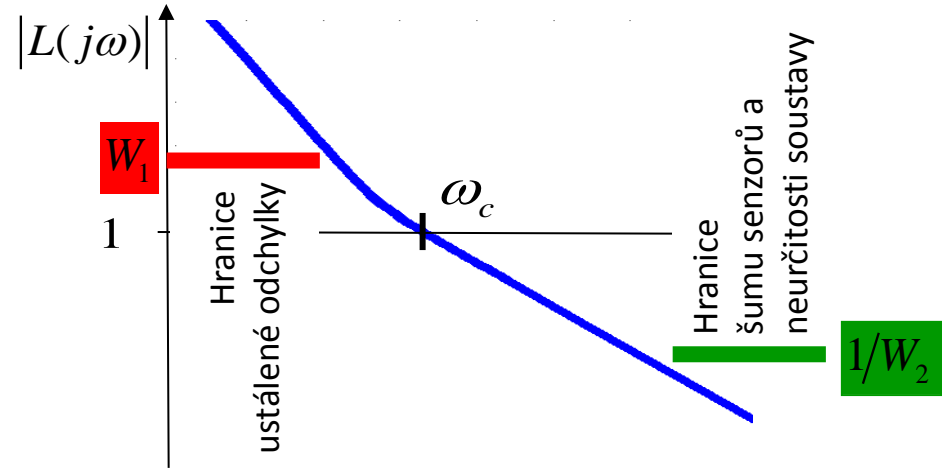
Horní mez zesílení pro v_f

Př.: pro přijatelné potlačení šumů a robustní stabilitu při rozumné chybě modelu

Pro střední frekvence

se snažíme dosáhnout

- ω_c blízko požadované šířky pásma
- v okolí ω_c směrnici -1 (-20dB/dek) pro dobré PM ($\approx 90^\circ$) a tedy tlumení



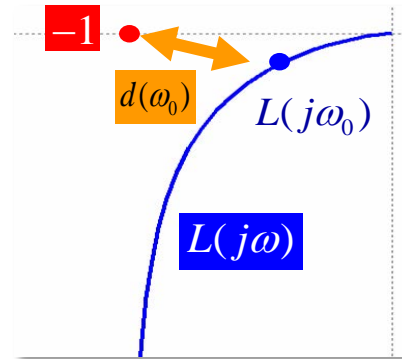
$$|L(j\omega)| > \frac{1}{W_2} \quad \omega \in [\omega_{vf}, \infty)$$
$$\Rightarrow S(j\omega) \cong 1, T(j\omega) > \frac{1}{W_2}$$



Citlivost v Nyquistově grafu

- pro pevnou frekvenci ω_0 je vzdálenost bodu $L(j\omega_0)$ na Nyquistově grafu od kritického bodu **-1** rovna převrácené hodnotě velikosti citlivosti v ω_0

$$\begin{aligned}d(\omega_0) &= |-1 - L(j\omega_0)| = |1 + L(j\omega_0)| \\ &= \frac{1}{1/|1 + L(j\omega_0)|} = \frac{1}{|S(j\omega_0)|}\end{aligned}$$

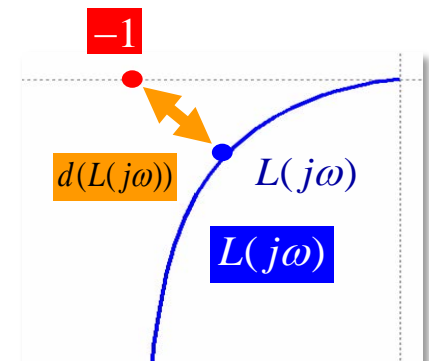


$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

- Vzdálenost celého grafu $L(j\omega)$ od bodu **-1** je

$$d(L(j\omega)) = \min_{\omega \in [0, \infty)} d(\omega_0) = \frac{1}{\max_{\omega \in [0, \infty)} |S(j\omega_0)|} = \frac{1}{M_S}$$

tedy rovna převrácené hodnotě špičky citlivosti M_S

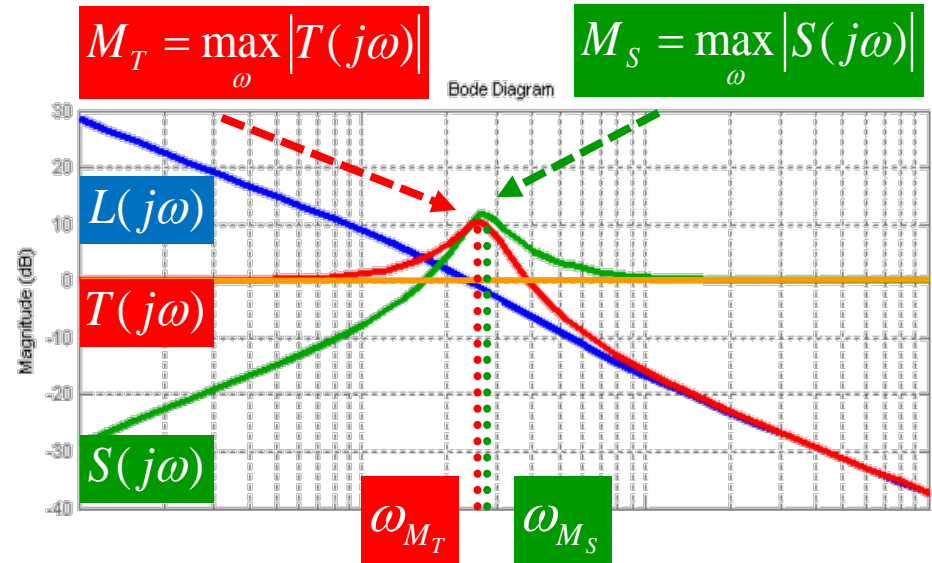


- čím větší je špička citlivost, tím blíže je $L(j\omega)$ bodu nestability



- Typicky požadujeme:
 - $M_S < 2$ (6 dB)
 - $M_T < 1.25$ (2 dB)
- větší hodnoty (> 4) znamenají špatné chování i robustnost
- Liší se nejvýše o 1:

$$|M_S - M_T| \leq 1$$
- Souvislost s GM a PM je vidět ze vzorečků



$$GM > 1 \Rightarrow GM \geq \frac{M_S}{M_S - 1}, GM \geq 1 + \frac{1}{M_T}$$

$$PM \geq 2 \arcsin \left(\frac{1}{2M_S} \right) \geq \frac{1}{M_S}$$

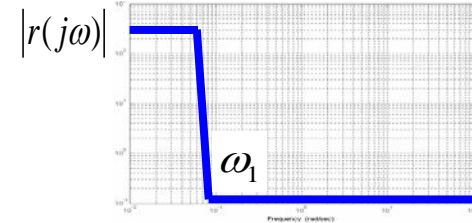
$$GM < 1 \Rightarrow GM \leq \frac{M_S}{M_S + 1}, GM \leq 1 - \frac{1}{M_T}$$

$$PM \geq 2 \arcsin \left(\frac{1}{2M_T} \right) \geq \frac{1}{M_T}$$



Požadavky na chování frekvenčně

Požadavek na chování: Velikost odchylky menší než hodnota e_b pro všechny referenční sinusovky s frekvencí $0 \leq \omega_0 \leq \omega_1$ a amplitudou $|r(j\omega_0)|$



vyjádříme jako $|e(j\omega)| = |S(j\omega)| |r(j\omega)| \leq e_b$, protože $e(j\omega) = S(j\omega)r(j\omega)$

Abychom pokaždé nemuseli definovat zvlášť spektrum referenčního signálu a požadavek na odchylku, normalizujeme problém zavedením **váhové funkce chování** (performance frequency function), která vyjadřuje, jak jsou naše požadavky na chování systému rozloženy podle frekvencí - je to reálná funkce frekvence

$$W_1(\omega) = \frac{|r(j\omega)|}{e_b}$$

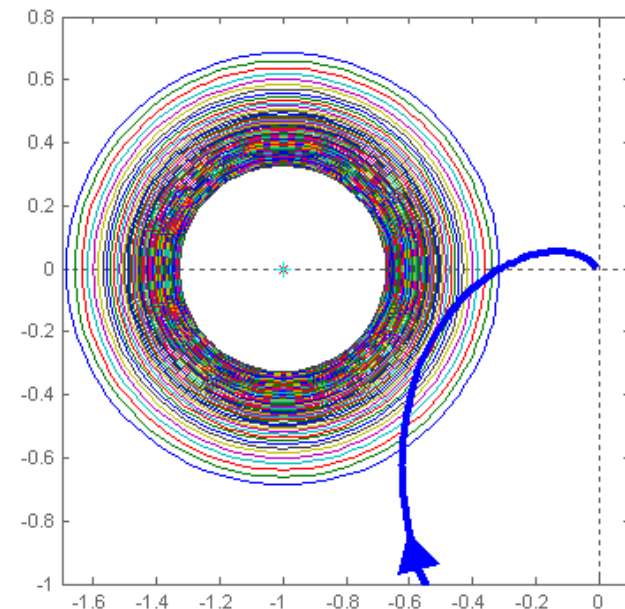
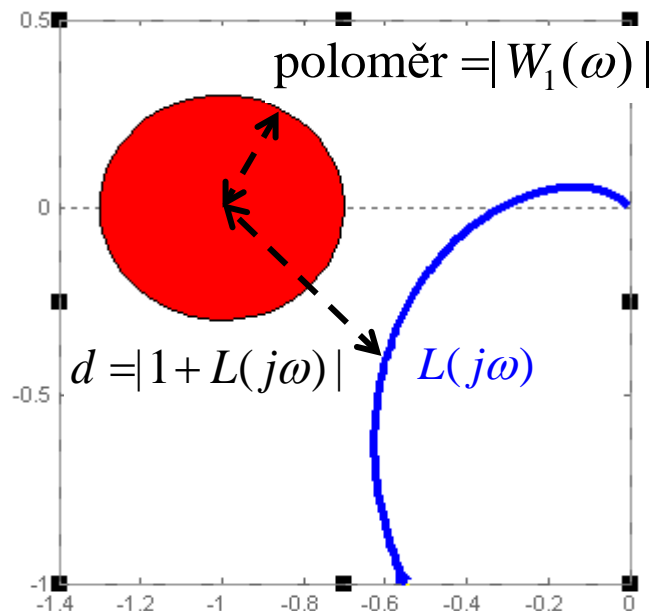
S její pomocí můžeme požadavek přepsat do elegantního tvaru

$$\forall \omega: |S(j\omega)| W_1(\omega) \leq 1$$

- Pro návrh často užíváme $W_1(\omega) = W_1(j\omega)$



- Protože $\forall \omega \in [0, \infty]: |S(j\omega)|W_1(\omega) \leq 1 \Leftrightarrow W_1(\omega) < |1 + L(j\omega)|$
- Můžeme požadavek na chování interpretovat graficky:
Pro žádné ω nesmí bod OL frekvenční charakteristiky $L(j\omega)$ ležet v kruhu o poloměru $W_1(\omega)$ se středem v kritickém bodu -1
- Pozor: platí to zvlášť po jednotlivých frekvencích ω

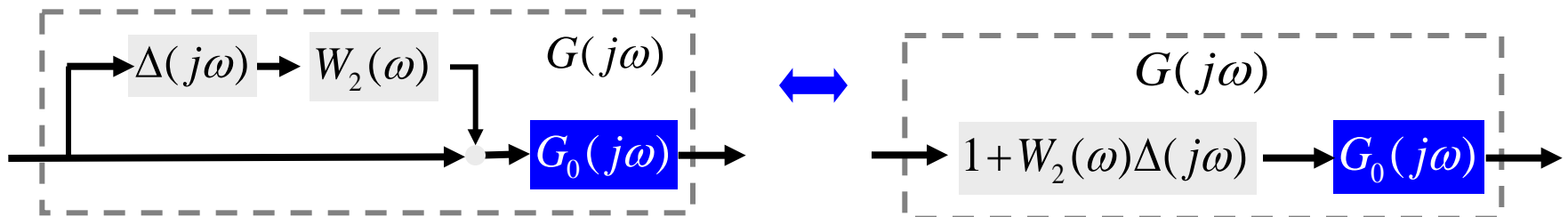




Multiplikativní neurčitost

$$G(j\omega) = G_0(j\omega) [1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]$$

- $\Delta(j\omega)$ komplexní funkce, jakákoli, jediné omezení reprezentuje amplitudu a fázi neurčitosti $|\Delta(j\omega)| \leq 1$
- $W_2(\omega)$ pevná váhová funkce
- G_0 nominální model
- předpokládáme jen, že všechny soustavy v $G(j\omega)$ mají stejný počet nestabilních pólů neboli také
- $G(s)$ a $G_0(s)$ mají stejný počet nestabilních pólů pro všechny $\Delta(j\omega)$
- abychom mohli použít Nyquistovo kritérium
- požadavek trochu umělý, ale kritický, **bez něj většina nástrojů neplatí**





Váhová funkce neurčitosti W_2

- popisuje rozložení neurčitosti podle frekvencí
- je vlastně normalizovaná perturbace přenosu

$$G(j\omega) = G_0(j\omega) [1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]$$

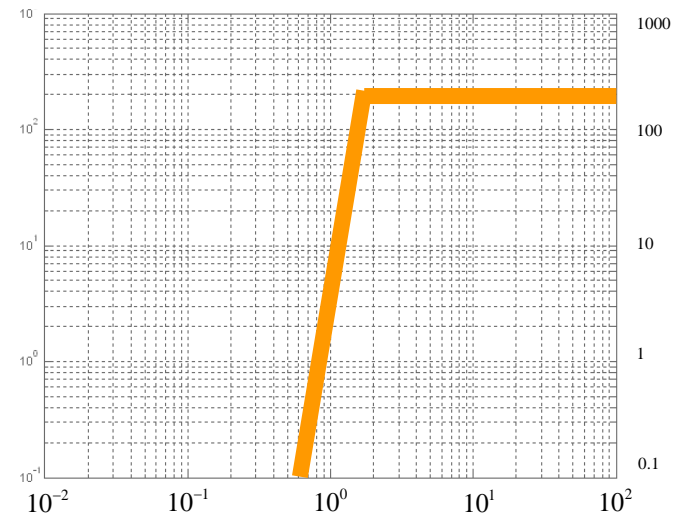
$$|\Delta(j\omega)| \leq 1$$

$$\frac{G(j\omega)}{G_0(j\omega)} - 1 = \frac{G(j\omega) - G_0(j\omega)}{G_0(j\omega)} = W(\omega)\Delta(j\omega)$$

$$\left| \frac{G(j\omega) - G_0(j\omega)}{G_0(j\omega)} \right| \leq W_2(\omega) \quad \forall \omega$$

Typicky je

- malá pro nízké frekvence (tam známe model velmi přesně)
- a velká pro vyšší frekvence (parazitní a nemodelované jevy)
- typický průběh je

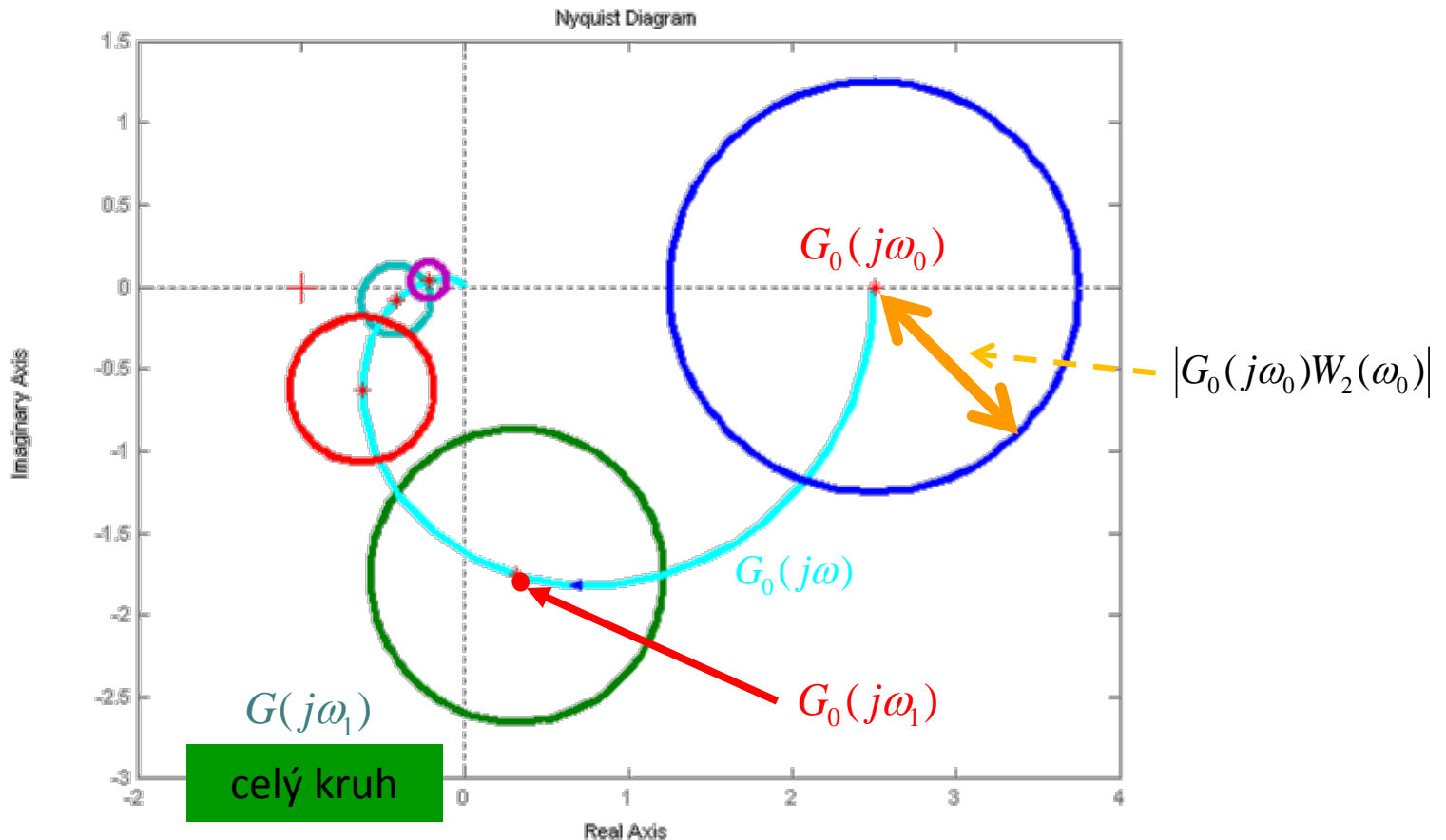




Nyquistův graf neurčitého systému

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

$$G(j\omega) = G_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)], |\Delta(j\omega)| \leq 1$$





Soustava s multiplikativní neurčitostí
je

$$G(j\omega) = G_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)], |\Delta(j\omega)| \leq 1$$

nominálně stabilní $\iff G_0(j\omega)$ je stabilní

robustně stabilní $\iff G(j\omega)$ je stabilní pro každé $|\Delta(j\omega)| \leq 1$
tj. když je stabilní každá z nekonečné množiny soustav

- Podobně pro otevřenou smyčku $L_0(j\omega) = D(j\omega)G_0(j\omega)$

$$L(j\omega) = D(j\omega)G(j\omega) = L_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)] = L_0(j\omega) + L_0(j\omega)W_2(\omega)\Delta(j\omega)$$

- i pro uzavřenou smyčku

$$S_0(j\omega) = \frac{1}{1 + L_0(j\omega)}, S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)} = \frac{1}{1 + L_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]}$$

$$T_0(j\omega) = \frac{L_0(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)}, T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} = \frac{L_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]}{1 + L_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]}$$



Nutná a postačující podmínka robustní stability

$$|T_0(j\omega)|W_2(\omega) < 1, \forall \omega$$

- protože typicky W_2 je velké pro velké ω ,
- musí být $|T_0(j\omega)|$ malé pro vysoké frekvence
- Protože je $S_0 + T_0 = 1$, musí být pro vysoké frekvence $|S_0(j\omega)| \approx 1$

$$T_0(j\omega) = \frac{L_0(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)}$$

$$L_0(j\omega) = D(j\omega)G_0(j\omega)$$

Přibližné vyjádření pomocí OL přenosu

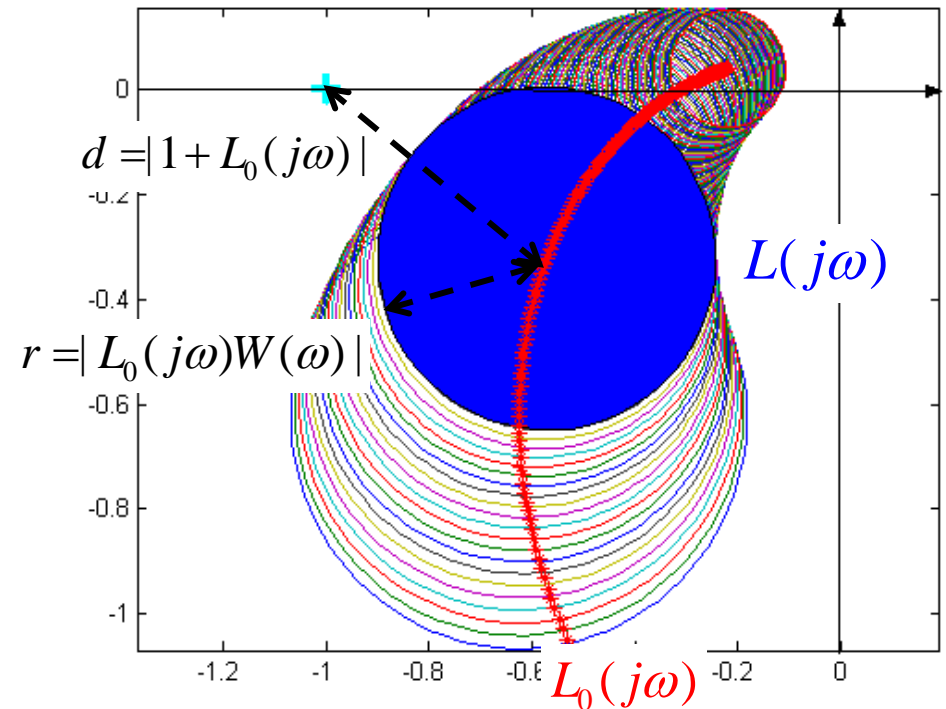
- pro vysoké frekvence je $L_0(j\omega) = D(j\omega)G_0(j\omega)$ malé, proto $T_0(j\omega) \approx L_0(j\omega)$
- a podmínka robustní stability se redukuje na

$$|T_0(j\omega)|W_2(\omega) < 1 \quad \forall \omega \quad \rightarrow \quad |L_0(j\omega)| < \frac{1}{W_2(\omega)} \quad \forall \omega$$



$$|T_0(j\omega)|W_2(\omega) < 1 \quad \forall \omega \Leftrightarrow |W(\omega)L_0(j\omega)/(1+L_0(j\omega))| < 1 \quad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow |W(\omega)L_0(j\omega)| < |1+L_0(j\omega)| \quad \forall \omega$$



Grafická interpretace:

- obálka Nyquistových grafů nesmí obsahovat kritický bod -1



Omezení pro návrh: Efekt vodní postele I.

- Při návrhu může nastat efekt přelévání: abychom někdy zmenšili $S(\omega)$, musíme ji jinde zvětšit. Toto přelévání nastává vždy.
- Když je relativní řád $L(s) \geq 2$, když tj. $L(s)$ má aspoň o 2 póly více než nul, musí citlivost splňovat **Bodeho integrální omezení ve tvaru**

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_0^{n_p} \operatorname{Re} p_{\text{unstable},i}$$

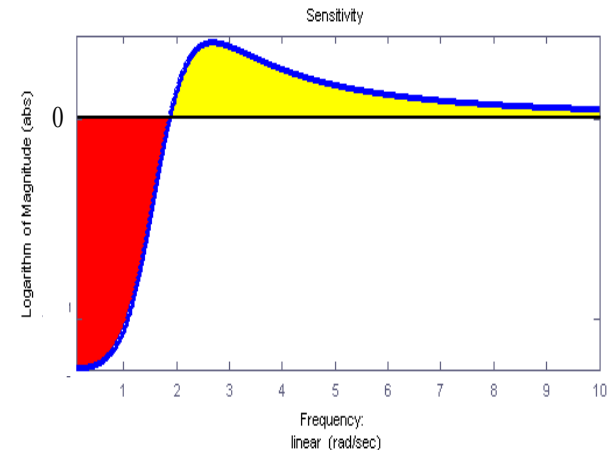
neboli

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = \pi \log e \sum_0^{n_p} \operatorname{Re} p_{\text{unstable},i}$$

- Speciálně pro stabilní $L(s)$ musí platit

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = 0$$

- Graficky (pokud je logaritmické měřítko u amplitudy a lineární u frekvence), musí se obě plochy rovnat
- Má-li $L(s)$ nestabilní póly, je plocha zesilování dokonce větší!





Další omezení: Efekt vodní postele II.

- Efekt vodní postele nastává také, když soustava má nestabilní nuly

Věta – Integrál vážené citlivosti

- Nechť $L(s)$ má jednu reálnou nestabilní nulu z (nebo pár komplexně sdružených nul $z = x \pm jy$)
- Nechť má ještě n_p nestabilních pólů p_i
- Pak, má-li být uzavřená smyčka stabilní, musí citlivost $S(s)$ splňovat

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| w(z, \omega) d\omega = \pi \ln \prod_{i=1}^{n_p} \frac{|p_i + z|}{|p_i - z|}$$

kde, v případě reálné nuly, je váhová funkce

$$w(z, \omega) = \frac{2z}{z^2 + \omega^2} = \frac{2}{z} \frac{1}{1 + (\omega/z)^2}$$

anebo v případě komplexních nul

$$w(z, \omega) = \frac{x}{x^2 + (y - \omega)^2} + \frac{x}{x^2 + (y + \omega)^2}$$