

# 14 - Moderní frekvenční metody



Michael Šebek  
Automatické řízení 2016

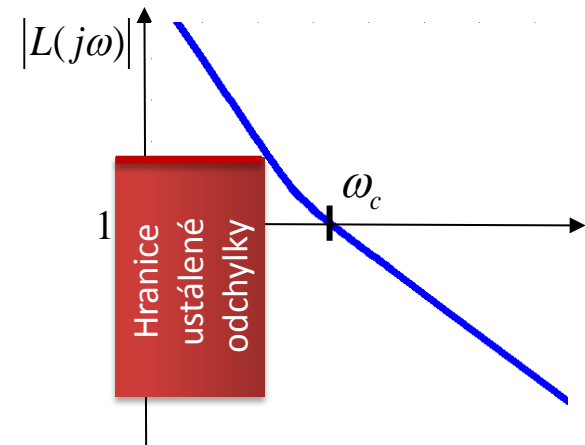


# Loop shaping: Chování pro nízké frekvence

- Tvar OL frekvenční charakteristiky  $L(s)=KD(s)G(s)$  určuje chování, ustálenou odchylku a dynamickou odezvu
- ZV dále redukuje vliv šumu měření, změny parametrů a dalších neurčitostí
- Pro odchylku platí  $e(j\omega) = S(j\omega)r(j\omega) - S(j\omega)d(j\omega) + T(j\omega)n(j\omega)$  a z toho  
 $|e(j\omega)| \leq |S(j\omega)||r(j\omega)| + |S(j\omega)||d(j\omega)| + |T(j\omega)||n(j\omega)|$  z trojúhelníkové nerovnosti
- Pro nízké frekvence je typicky  $|r(j\omega)| \geq 0, |d(j\omega)| \geq 0, |n(j\omega)| \approx 0$   
a proto musíme zajistit  $|S(j\omega)| \approx 0 \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1$
- Z toho plyne hranice pro velmi nízké frekvence
- Pro přijatelnou regulační odchylku musíme stanovit dolní mez pro zesílení při velmi nízkých frekvencích

$$|L(j\omega)| \gg 1 \quad \rightarrow \quad |T(j\omega)| \cong 1, |S(j\omega)| \cong 0$$

$$|e(j\omega)| \leq 0 \times |r(j\omega)| + 0 \times |d(j\omega)| + \underbrace{1}_{=0} |n(j\omega)|$$





# Loop Shaping - Chování pro vysoké frekvence

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

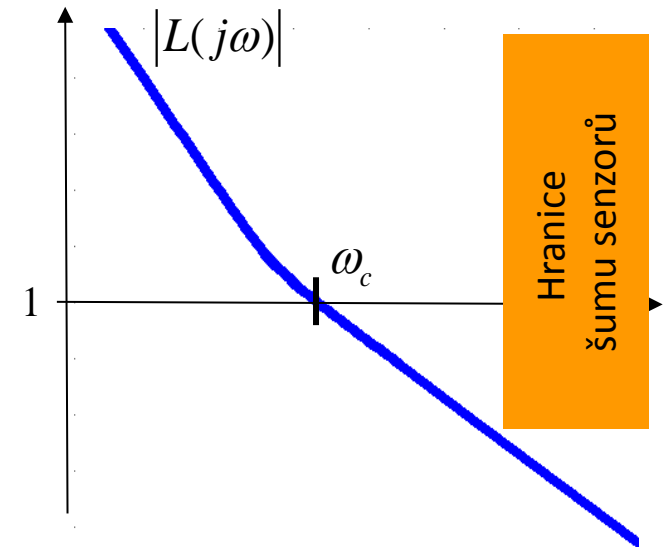
Pro vysoké frekvence

$$|r(j\omega)| \approx 0, |n(j\omega)| \geq 0$$

- šumy mívají vyšší frekvence

Návrh pro potlačení vlivu šumu senzorů

- stanovení horní meze pro zesílení při vysokých frekvencích



$$|L(j\omega)| \ll 1 \quad \rightarrow \quad |T(j\omega)| \cong 0, |S(j\omega)| \cong 1$$

$$|e(j\omega)| \leq |S(j\omega)| |r(j\omega)| + |S(j\omega)| |d(j\omega)| + |T(j\omega)| |n(j\omega)|$$

$$|e(j\omega)| \leq 1 \times |r(j\omega)| + 1 \times |d(j\omega)| + 0 \times |n(j\omega)|$$

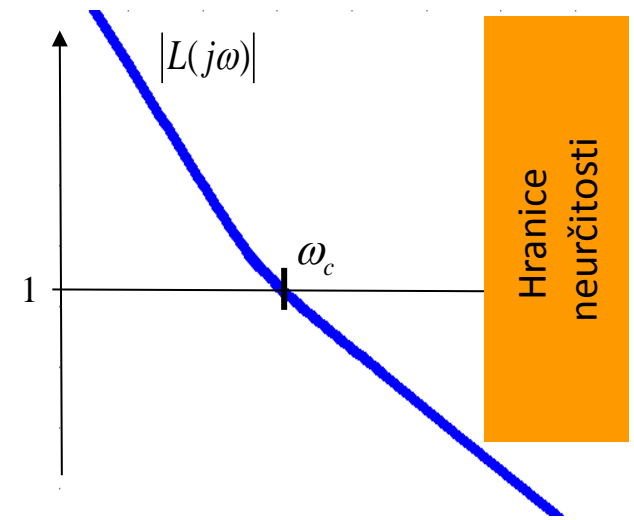
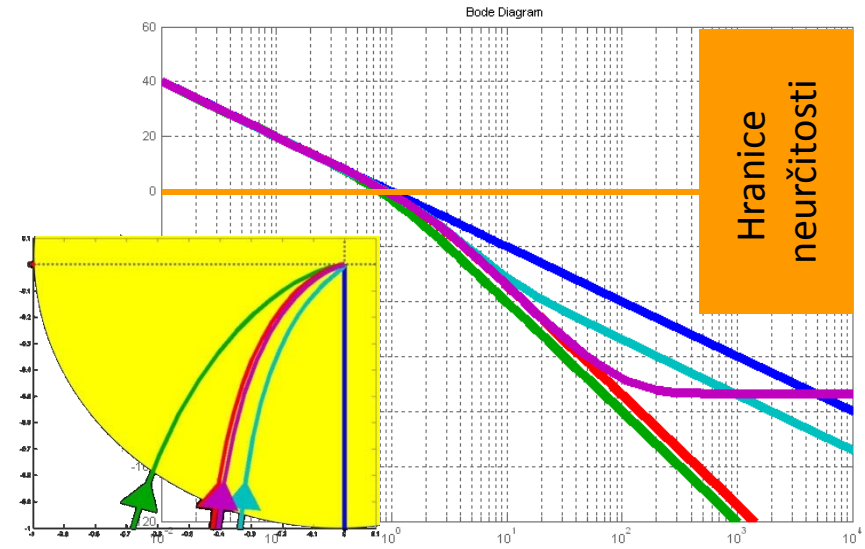
Když má i porucha vysoké frekvence, je to problém



# Loop Shaping - Neurčitost

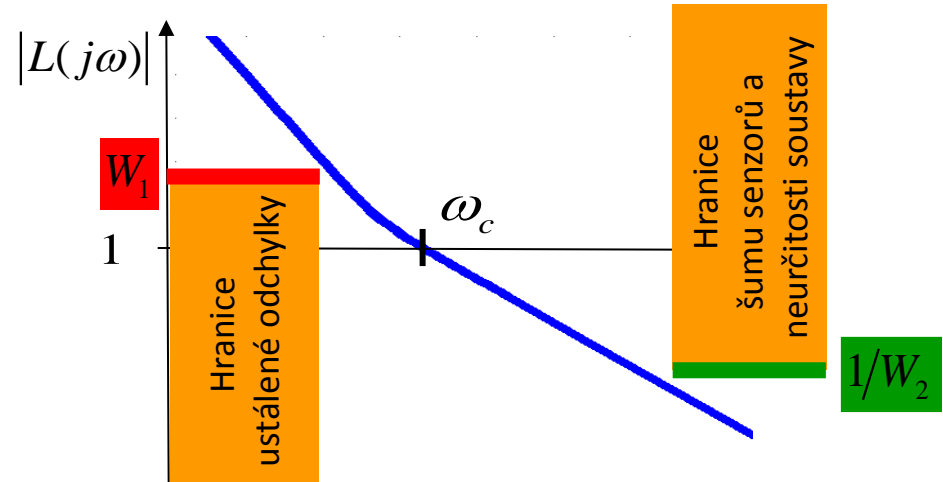
## Další hranice pro vysoké frekvence

- Návrh pro potlačení vlivu neurčitosti v soustavě = stanovení horní meze pro zesílení při vysokých frekvencích
- neurčitost je typicky větší na velkých frekvencích.
  - Např. zanedbaná dynamika vyšších řádů (mechanické systémy)
- Buď s ní počítáme, ale pak je návrh velmi složitý
- anebo ji zahrneme do neurčitosti
- Návrh musí zajistit, aby graf pro vysoké frek. **v žádném případě nepřekročil hranici 1 = 0dB**
- alternativně bychom mohli měnit fázi pro vysoké frekvence, ale to je citlivější a složitější





- Chování pro nízké a vysoké frekvence uvažováno najednou



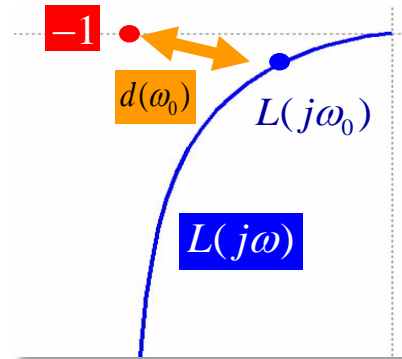
- dolní mez zesílení pro nízké frekvence  $W_1$  → přijatelná ustálená odezva  
Např.: Když požadujeme, aby výstup sledoval sinusový vstupní signál s frekvencí od 0 do  $\omega_d$  s odchylkou ne větší než 1%, volíme  $W_1 = 100$  od  $\omega = 0$  do  $\omega = \omega_d$   $S(j\omega) \approx \frac{1}{L(j\omega)}$
- horní mez zesílení pro vysoké frekvence  $1/W_2$  → přijatelné potlačení šumů a robustní stabilita (= stabilita zachována i při rozumné chybě modelu)
- pro střední frekvence se snažíme dosáhnout  $T(j\omega) = L(j\omega)$   
přechodové frekvence blízko požadované šířky pásma
- v okolí  $\omega_c$  směrnici -1 (-20dB/dek) pro dobré  $PM$  ( $\approx 90^\circ$ ) a tedy tlumení



# Citlivost v Nyquistově grafu

- pro pevnou frekvenci  $\omega_0$  je vzdálenost bodu  $L(j\omega_0)$  na Nyquistově grafu od kritického bodu **-1** rovna převrácené hodnotě velikosti citlivosti

$$\begin{aligned}d(\omega_0) &= |-1 - L(j\omega_0)| = |1 + L(j\omega_0)| \\ &= \frac{1}{1/|1 + L(j\omega_0)|} = \frac{1}{|S(j\omega_0)|}\end{aligned}$$

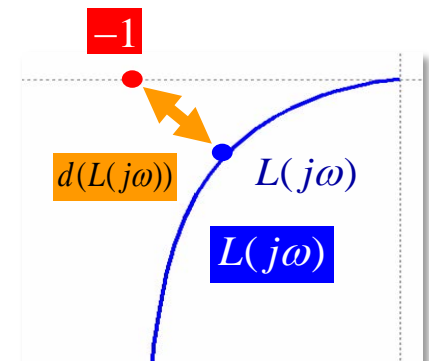


$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

- Vzdálenost celého grafu  $L(j\omega)$  od kritického bodu **-1** je zřejmě

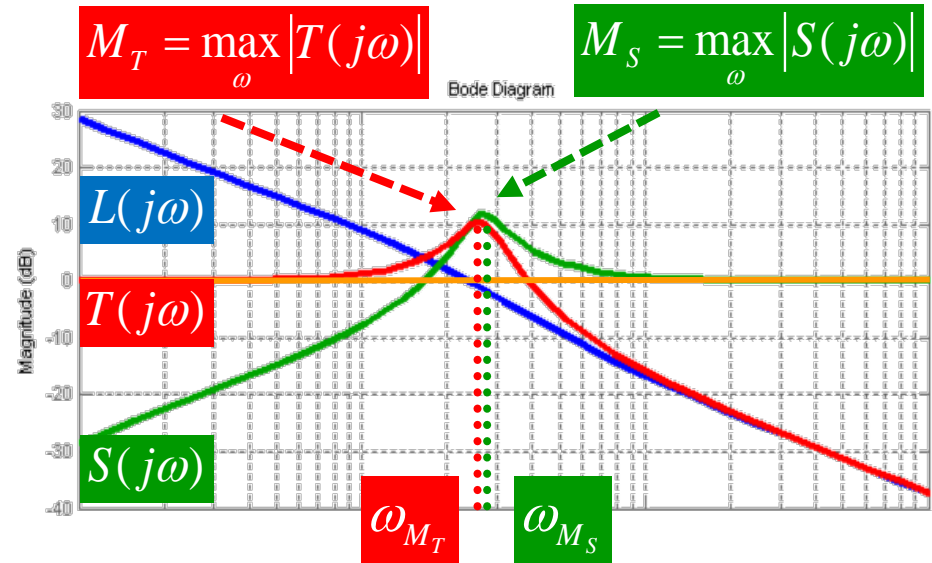
$$d(L(j\omega)) = \min_{\omega \in [0, \infty)} d(\omega_0) = \frac{1}{\max_{\omega \in [0, \infty)} |S(j\omega_0)|} = \frac{1}{M_s}$$

- rovna převrácené hodnotě špičky citlivosti
- čím větší je špička citlivost, tím blíže je  $L(j\omega)$  bodu nestability





- Typicky požadujeme:
  - $M_S < 2$  (6 dB)
  - $M_T < 1.25$  (2 dB)
- větší hodnoty ( $> 4$ ) znamenají špatné chování i robustnost
- Liší se nejvýše o 1:
 
$$|M_S - M_T| \leq 1$$
- Souvislost s GM a PM je vidět ze vzorečků



$$GM > 1 \Rightarrow GM \geq \frac{M_S}{M_S - 1}, GM \geq 1 + \frac{1}{M_T}$$

$$PM \geq 2 \arcsin \left( \frac{1}{2M_S} \right) \geq \frac{1}{M_S}$$

$$GM < 1 \Rightarrow GM \leq \frac{M_S}{M_S + 1}, GM \leq 1 - \frac{1}{M_T}$$

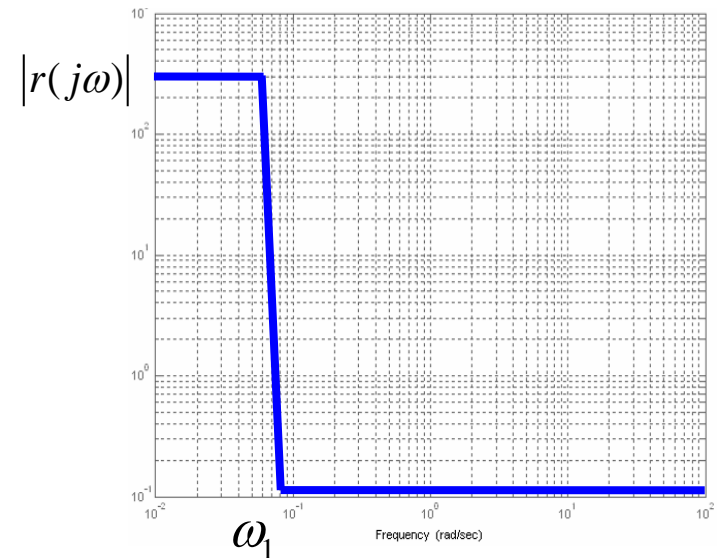
$$PM \geq 2 \arcsin \left( \frac{1}{2M_T} \right) \geq \frac{1}{M_T}$$



- $GM$  a  $PM$  jsou užitečná čísla, ale jsou to jen 2 čísla a tím je v principu omezena jejich schopnost vyjádřit požadavky na rozumné řízení
- Složitější ale rozumnější požadavky se vyjádří pomocí citlivosti

Např.

- dosud jsme předpokládali vstupní signály ve tvaru jednoduchých skoků a ramp
- teď budeme uvažovat signály, které jsou součty sinusovek s frekvencemi v určitém rozsahu
- pro takový vstup můžeme požadavky na odezvu specifikovat např. takto:
- „velikost odchylky menší než hodnota  $e_b$  (např.  $e_b = 0.01$ ) pro všechny reference tvaru sinusovky s frekvencí  $0 \leq \omega_0 \leq \omega_1$  a amplitudou  $|r(j\omega_0)|$ “







# Požadavky na chování frekvenčně

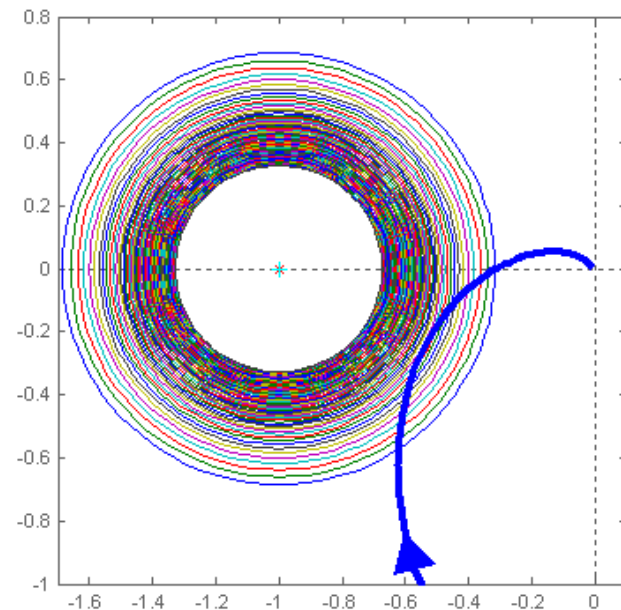
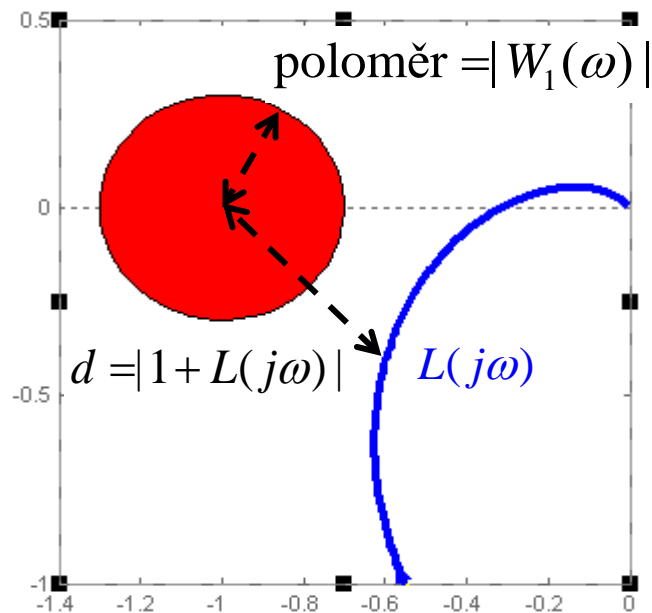
- Jelikož 
$$e(j\omega) = \frac{1}{1+L(j\omega)} r(j\omega) = S(j\omega)r(j\omega)$$
- tak požadavek vyjádříme jako 

velikost odchylky menší než hodnota  $e_b$  pro všechny referenční sinusovky s frekvencí  $0 \leq \omega_0 \leq \omega_1$  a amplitudou  $|r(j\omega_0)|$

  
$$|e(j\omega)| = |S(j\omega)||r(j\omega)| \leq e_b$$
- abychom pokaždé nemuseli definovat zvlášť spektrum referenčního signálu a požadavek na odchylku
- normalizujeme problém zavedením váhové funkce 
$$W_1(\omega) = \frac{|r(j\omega)|}{e_b}$$
  - je to reálná funkce frekvence,
  - říká se jí váhová funkce chování nebo frekvenční charakteristika chování - performance frequency function
  - vyjadřuje, jak jsou naše požadavky na chování systému rozloženy podle frekvencí
- S její pomocí můžeme požadavek přepsat do elegantního tvaru který musí platit pro každou frekvenci 
$$\forall \omega: |S(j\omega)|W_1(\omega) \leq 1$$
- Pro návrh obvykle 
$$W_1(\omega) = W_1(j\omega)$$



- Protože  $\forall \omega \in [0, \infty]: |S(j\omega)|W_1(\omega) \leq 1 \Leftrightarrow W_1(\omega) < |1 + L(j\omega)|$
- Můžeme požadavek na chování interpretovat graficky:  
Pro žádné  $\omega$  nesmí bod OL frekvenční charakteristiky  $L(j\omega)$  ležet v kruhu o poloměru  $W_1(\omega)$  se středem v kritickém bodu  $-1$
- Pozor: platí to zvláště po jednotlivých frekvencích  $\omega$



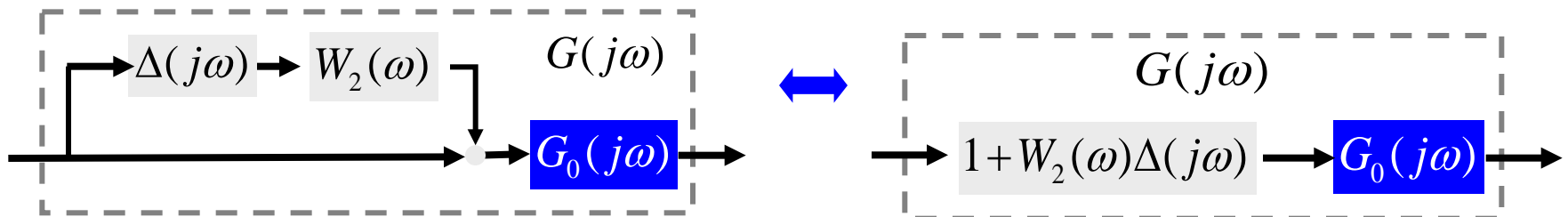


# Multiplikativní neurčitost

$$G(j\omega) = G_0(j\omega) [1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]$$

- $\Delta(j\omega)$  komplexní funkce, jakákoli, jediné omezení reprezentuje amplitudu a fázi neurčitosti
- $W_2(\omega)$  pevná váhová funkce
- $G_0$  nominální model
- předpokládáme jen, že všechny soustavy v  $G(j\omega)$  mají stejný počet nestabilních pólů neboli také
- $G(s)$  a  $G_0(s)$  mají stejný počet nestabilních pólů pro všechny  $\Delta(j\omega)$
- abychom mohli použít Nyquistovo kritérium
- požadavek trochu umělý, ale kritický, **bez něj většina nástrojů neplatí**

$$|\Delta(j\omega)| \leq 1$$





# Váhová funkce neurčitosti

## Váhová funkce $W_2$

- popisuje rozložení neurčitosti podle frekvencí
- je vlastně normalizovaná perturbace přenosu

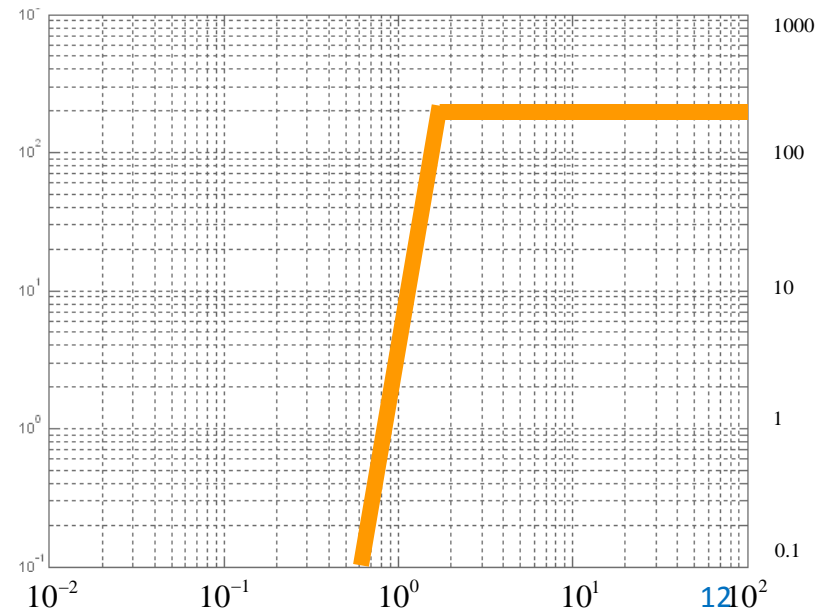
$$G(j\omega) = G_0(j\omega) [1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]$$

$$|\Delta(j\omega)| \leq 1$$

$$\frac{G(j\omega)}{G_0(j\omega)} - 1 = \frac{G(j\omega) - G_0(j\omega)}{G_0(j\omega)} = W(\omega)\Delta(j\omega)$$

$$\left| \frac{G(j\omega) - G_0(j\omega)}{G_0(j\omega)} \right| \leq W_2(\omega) \quad \forall \omega$$

- typicky je
  - malá pro nízké frekvence (tam známe model velmi přesně)
  - a velká pro vyšší frekvence (parazitní a nemodelované jevy)
  - typický průběh je

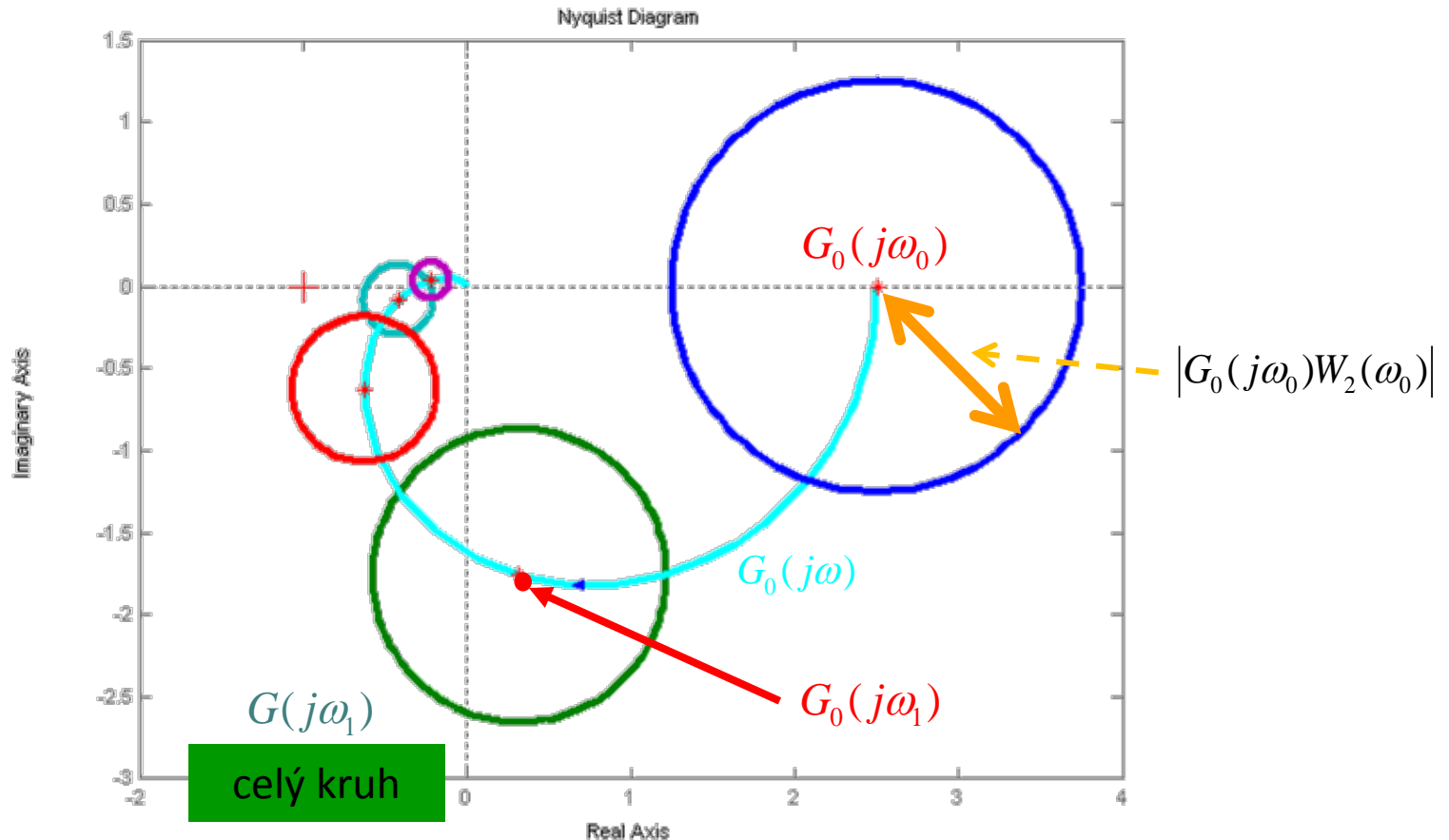




# Nyquistův graf neurčitého systému

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

$$G(j\omega) = G_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)], |\Delta(j\omega)| \leq 1$$





Soustava s multiplikativní neurčitostí  
je

$$G(j\omega) = G_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)], |\Delta(j\omega)| \leq 1$$

nominálně stabilní  $\iff G_0(j\omega)$  je stabilní

robustně stabilní  $\iff G(j\omega)$  je stabilní pro každé  $|\Delta(j\omega)| \leq 1$   
tj. když je stabilní každá z nekonečné množiny soustav

- Podobně pro otevřenou smyčku  $L_0(j\omega) = D(j\omega)G_0(j\omega)$

$$L(j\omega) = D(j\omega)G(j\omega) = L_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)] = L_0(j\omega) + L_0(j\omega)W_2(\omega)\Delta(j\omega)$$

- i pro uzavřenou smyčku

$$S_0(j\omega) = \frac{1}{1 + L_0(j\omega)}, S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)} = \frac{1}{1 + L_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]}$$

$$T_0(j\omega) = \frac{L_0(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)}, T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} = \frac{L_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]}{1 + L_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]}$$



## Nutná a postačující podmínka robustní stability

$$|T_0(j\omega)|W_2(\omega) < 1, \forall \omega$$

- protože typicky  $W_2$  je velké pro velké  $\omega$ ,
- musí být  $|T_0(j\omega)|$  malé pro vysoké frekvence
- Protože je  $S_0 + T_0 = 1$ , musí být pro vysoké frekvence  $|S_0(j\omega)| \approx 1$

$$T_0(j\omega) = \frac{L_0(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)}$$

$$L_0(j\omega) = D(j\omega)G_0(j\omega)$$

## Přibližné vyjádření pomocí OL přenosu

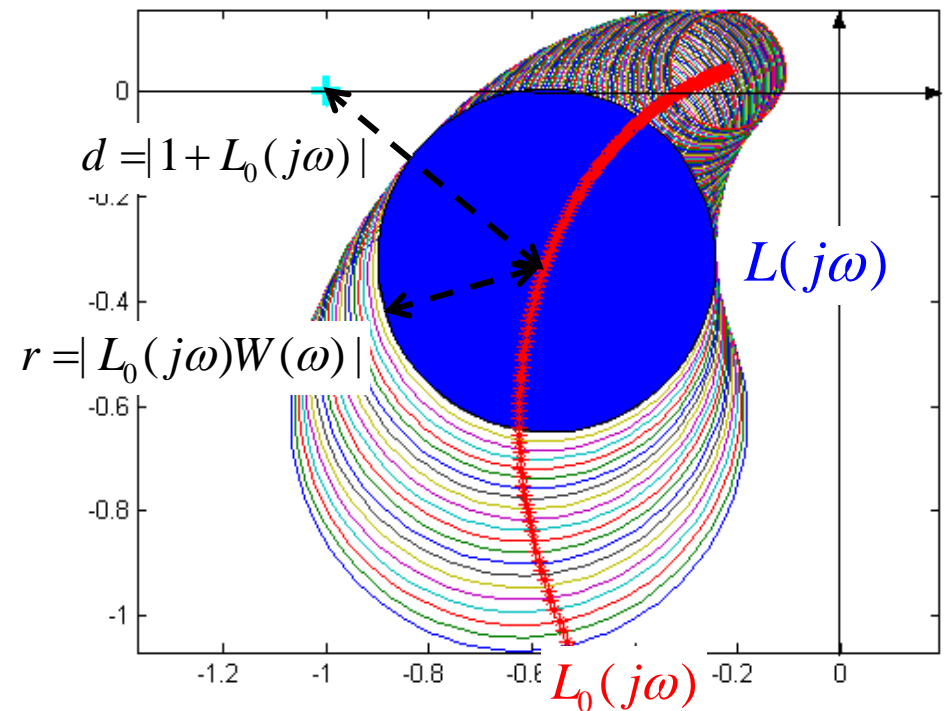
- pro vysoké frekvence je  $L_0(j\omega) = D(j\omega)G_0(j\omega)$  malé
- proto  $T_0(j\omega) \approx L_0(j\omega)$
- a podmínka robustní stability se redukuje na

$$|T_0(j\omega)|W_2(\omega) < 1 \quad \forall \omega \quad \rightarrow \quad |L_0(j\omega)| < \frac{1}{W_2(\omega)} \quad \forall \omega$$



$$|T_0(j\omega)|W_2(\omega) < 1 \quad \forall \omega \Leftrightarrow |W(\omega)L_0(j\omega)/(1+L_0(j\omega))| < 1 \quad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow |W(\omega)L_0(j\omega)| < |1+L_0(j\omega)| \quad \forall \omega$$



Grafická interpretace:

- obálka Nyquistových grafů nesmí obsahovat kritický bod -1





# Omezení: Efekt vodní postele I.

- Při návrhu může nastat efekt přelévání: abychom někdy zmenšili  $S(\omega)$ , musíme ji jinde zvětšit. Toto přelévání nastává vždy.
- Když je relativní řád  $L(s) \geq 2$ , když tj.  $L(s)$  má aspoň o 2 póly více než nul, musí citlivost splňovat **Bodeho integrální omezení ve tvaru**

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_0^{n_p} \operatorname{Re} p_{\text{unstable},i}$$

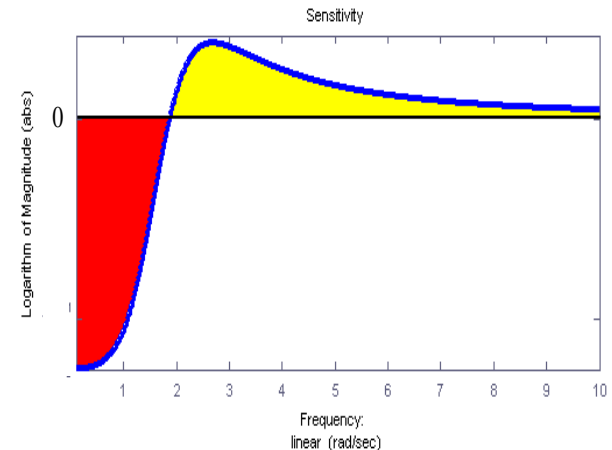
neboli

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = \pi \log e \sum_0^{n_p} \operatorname{Re} p_{\text{unstable},i}$$

- Speciálně pro stabilní  $L(s)$  musí platit

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = 0$$

- Graficky (pokud je logaritmické měřítko u amplitudy a lineární u frekvence), musí se obě plochy rovnat
- Má-li  $L(s)$  nestabilní póly, je plocha zesilování dokonce větší!





# Omezení: Efekt vodní postele II.

- Efekt vodní postele nastává také, když soustava má nestabilní nuly

## Věta – Integrál vážené citlivosti

- Nechť  $L(s)$  má jednu reálnou nestabilní nulu  $z$  (nebo pár komplexně sdružených nul  $z = x \pm jy$ )
- Nechť má ještě  $n_p$  nestabilních pólů  $p_i$
- Pak, má-li být uzavřená smyčka stabilní, musí citlivost  $S(s)$  splňovat

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| w(z, \omega) d\omega = \pi \ln \prod_{i=1}^{n_p} \frac{|p_i + z|}{|p_i - z|}$$

kde, v případě reálné nuly, je váhová funkce

$$w(z, \omega) = \frac{2z}{z^2 + \omega^2} = \frac{2}{z} \frac{1}{1 + (\omega/z)^2}$$

anebo v případě komplexních nul

$$w(z, \omega) = \frac{x}{x^2 + (y - \omega)^2} + \frac{x}{x^2 + (y + \omega)^2}$$