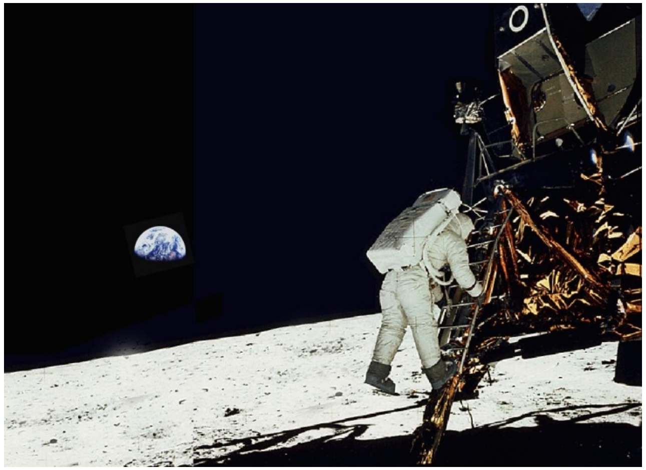
15 - Stavové metody



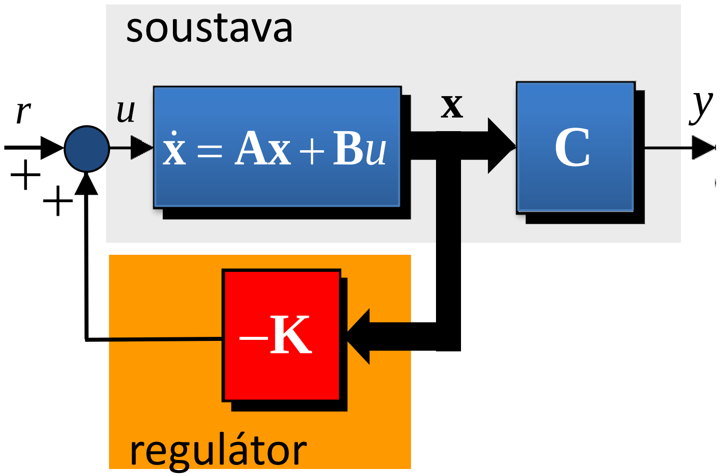
Michael Šebek

Automatické řízení 2017

Stavová zpětná vazba

Když můžeme měřit celý stav (všechny složky stavového vektoru) soustavy, pak je můžeme využít k řízení

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r$$
$$= -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + r$$



Na rozdíl od dosud probíraných regulátorů:

- vstupem regulátoru je vektor – je potřeba více senzorů
- využíváme víc informace než při ZV z výstupu
- do regulátoru vstupuje jiný signál, než který chceme řídit
- regulátor není dynamický, je jen „proporcionální“

Je stavový regulátor složitější nebo jednodušší než dynamická ZV z výstupu?

Zpětnovazební systém

- Když do $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ dosadíme $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r$, dostaneme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + r) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r$$

- Rovnice výsledného systému je $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r$

- Zavedení stavové zpětné vazby změnilo původní matici systému

$$\dot{\mathbf{x}} = \boxed{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \boxed{(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})}\mathbf{x} + \mathbf{B}r$$

- Výstupní rovnice $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ se nezměnila
- Jak moc můžeme matici ZV změnit?

$$\mathbf{A}_{\mathbf{new}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

Z porovnání hodností je zřejmé, že všechny prvky libovolně změnit nemůžeme

Co tedy umí stavová zpětná vazba?

- I když se to na první pohled nezdá, platí

Věta

- Vhodnou volbou prvků $\mathbf{K}$ můžeme libovolně (až na komplexně sdružené dvojice) umístit vlastní čísla matice $\mathbf{A}_{\mathbf{new}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$
- a to právě když soustava je úplně řiditelná.

Jinými slovy

- Můžeme libovolně umístit póly výsledného systému (právě když soustava je úplně řiditelná)

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) \quad \Rightarrow \quad \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{new}}\right) = \det\left(s\mathbf{I} - \left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right)\right)$$

- Porovnejte s metodou RL: ta všechny póly libovolně umístit nedokáže. Proč?
- Póly opravdu jen posouvá, ale nepřidává – srovnej s dynamickou výstupní ZV

Všimněte si ještě:

- Nutná a postačující podmínka je úplná řiditelnost
- Právě proto je tento pojem tak důležitý

Umístění pólů - Naivně a v kanonickém tvaru

- Pro 1. a 2. řád řešíme - naivně - přímo z rovnice

$$\det\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_{\mathbf{new}}\right)=\det\left(s\mathbf{I}-\left(\mathbf{A}-\mathbf{BK}\right)\right)$$

Pro vyšší řády to obvykle nejde, protože vycházejí příliš složité rovnice.

- Pro soustavu v kanonické formě řiditelnosti

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\mathbf{sI}-\mathbf{A}\right)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

je řešení jednoduché, neboť i výsledný systém je v tomto zvláštním tvaru

Pokračování: Umístění pólů v kanonickém tvaru

- opravdu je $\mathbf{A}_{\mathbf{new}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} =$

$$= \left[\begin{array}{cccc:c} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ \hdashline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} k_1 & \ldots & k_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc:c} -(a_{n-1}+k_1) & -(a_{n-2}+k_2) & \cdots & -(a_1+k_{n-1}) & -(a_0+k_n) \\ \hdashline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- a výsledný charakteristický polynom je

$$c(s) = \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{new}}\right) = s^n + \left(a_{n-1} + k_1\right)s^{n-1} + \cdots + \left(a_1 + k_{n-1}\right)s + \left(a_0 + k_n\right)$$

- prvky matice $\mathbf{K}$ vybereme tak, aby se koeficienty polynomu rovnaly požadovaným

$$c(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0$$

$$k_1 = c_{n-1} - a_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$k_{n-1} = c_1 - a_1$$

$$k_n = c_0 - a_0$$

Řešení pro obecný tvar

Pokud soustava není v normálním tvaru řiditelnosti,
můžeme problém řešit převodem do tohoto tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_{\mathrm{con}}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}_{\mathrm{con}}\mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{B}_{\mathrm{con}}$$

1. Pomocí matice řiditelnosti vypočteme transformační matici $\mathbf{T}$
2. Převedeme naše rovnice s maticemi $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ do kanonické formy řiditelnosti

$$\mathbf{A}_{\mathrm{con}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \mathbf{B}_{\mathrm{con}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$$

3. Vypočteme matici stavové ZV pro tuto formu $\mathbf{K}_{\mathrm{con}}$
4. Matici ZV transformujeme zpátky do původních souřadnic transformací

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\mathrm{con}}\mathbf{T}^{-1}$$

Odvození transformace pro matici zpětné vazby

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{con}} = \left(\mathbf{A}_{\mathrm{con}} - \mathbf{B}_{\mathrm{con}}\mathbf{K}_{\mathrm{con}}\right)\mathbf{x}_{\mathrm{con}} + \mathbf{B}_{\mathrm{con}} r \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{T}\left(\mathbf{A}_{\mathrm{con}} - \mathbf{B}_{\mathrm{con}}\mathbf{K}_{\mathrm{con}}\right)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{B}_{\mathrm{con}} r \\ &= \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{\mathrm{con}}\mathbf{T}^{-1}\right)\mathbf{x} + \mathbf{B} r \\ &= \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)\mathbf{x} + \mathbf{B} r\end{aligned}$$

Ackermannův vzorec

Kompaktní řešení:

- Je-li soustava v obecném tvaru s maticemi $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ a požadujeme-li výsledný CL charakteristický polynom $$c(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0$$
- pak je matice stavové zpětné vazby dána Ackermannovým vzorcem

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} c(\mathbf{A})$$

- kde $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$ je matice řiditelnosti soustavy
- a matice $c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I}_n$ vznikne dosazením původní matice soustavy do požadovaného CL charakteristického polynomu

Poznámky:

- Výpočet matice řiditelnosti a tudíž ani Ackermannův vzorec není numericky moc spolehlivý a funguje tak do řádu 10
- V Matlabu nepoužívej inverzi, ale „lomítko“ (řešení soustavy rovnic) lépe naprogramováno ve funkci `place`, ale ta neumí vícenásobné CL póly

Vlastnosti: Stavová ZV nemění nuly

- Z definice plyne, že nuly systému bez ZV (tedy s maticemi **A**, **B**, **C**) jsou řešením rovnice

$$\det\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

- zatímco nuly systému s ZV (tedy s maticemi **A**-**BK**, **B**, **C**) jsou řešením rovnice

$$\det\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{BK}) & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

- Jenže obě matice mají stejný determinant:

$$\det\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{BK}) & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

  takže oba systémy mají stejné nuly! (Pokud má systém více vstupů nebo výstupů, matice není čtvercová, det neexistuje, ale závěry jsou stejné)
- Tedy stavová zpětná vazba nuly systému neovlivní! - srovnej s výstupní ZV
- Jelikož má výsledný ZV systém stejné nuly jako soustava (a ty známe dopředu), můžeme stabilní nuly soustavy zahrnout mezi požadované CL póly a tím je z výsledného přenosu „vykrátit“.
- To využijeme zejména když ze specifikací neplyne poloha všech CL pólů a my stejně musíme nějaké další volit.

Vlastnosti: Problémy s ustálenou odezvou

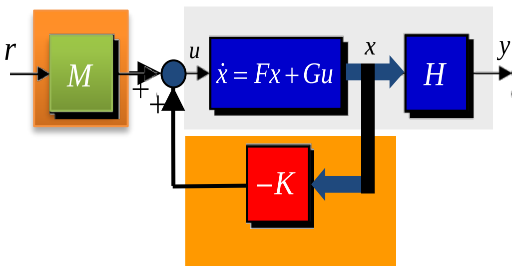
- Stavová ZV dobře mění dynamiky, ale už neumožňuje nezávisle ovlivnit ustálenou odezvu - často vede na nenulovou ustálenou odchylku na skok
- Stejnosměrné zesílení soustavy (bez ZV)

$$P(0) = \left(\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+D\right)\Big|_{s=0} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

- se po zavedení stavové zpětné vazby se změní na

$$T(0) = \left(\mathbf{C}(s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}))^{-1}\mathbf{B}+D\right)\Big|_{s=0} = -\mathbf{C}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

málokdy je jednotkové



- Můžeme to napravit přímovazebním členem

$$M = 1/T(0)$$

- Pak je zřejmě

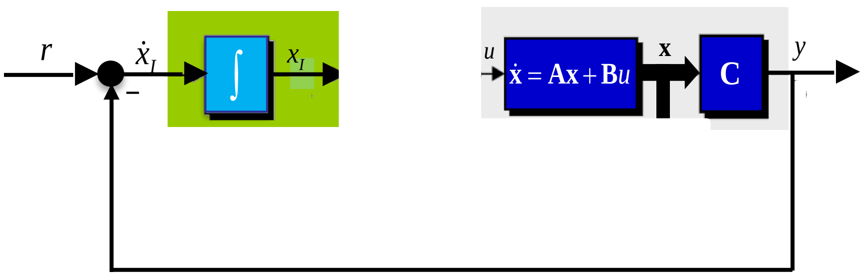
$$T_{celk}(0) = M(0)T(0) = T(0)/T(0) = 1$$

- Ale toto řešení není robustní, neboť změna parametrů (soustavy nebo ZV) změní výsledné zesílení na ne-jednotkové

Integrální řízení

- Robustní způsob, jak při stavové ZV zajistit jednotkové ustálené zesílení
- Do struktury soustavy se stavovou ZV, přidáme integrátor regulační odchylky $\dot{x}_I = -\mathbf{C}\mathbf{x} + r = r - y$
- V ustáleném stavu pak bude $\dot{x}_{I,ss} = 0 \Rightarrow y_{ss} = r_{ss}$
- Rovnice „rozpojeného systému" jsou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$
$$\dot{x}_I = -\mathbf{C}\mathbf{x} + r$$

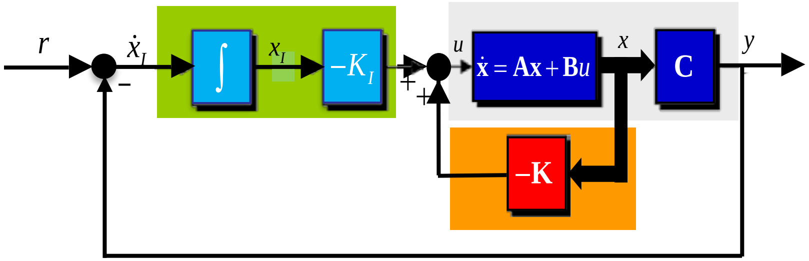


- a kompaktně

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$

Integrální řízení



- Když subsystémy „spojíme,“ tedy zavedeme stavovou ZV od všech stavů celého systému

$$u = -\mathbf{Kx} - K_I x_I = -\begin{bmatrix} \mathbf{K} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$

- dostaneme

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & -\mathbf{B}K_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r, \qquad y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$

- Matici „velké“ stavové ZV $\begin{bmatrix} \mathbf{K} & K_I \end{bmatrix}$ navrhneme standardními metodami, ale pro „velký“ systém s maticemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Funguje to podobně jako integrační složka složka v PID regulátoru

Internal Model Control

Obecněji:

- Pro sledování rampy obdobně přidáme 2 integrátory, pro sledování paraboly 3 apod.

Ještě obecněji:

- Pro robustní sledování průběhu generovaného nějakým generátorem (= splňujícího nějakou diferenciální rovnici)
- Přidáme obdobně tento generátor k systému

- Tato obecná metoda se jmenuje řízení s vnitřním modelem (Internal Model Control – IMC)