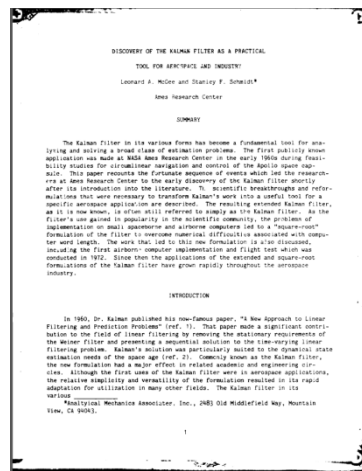
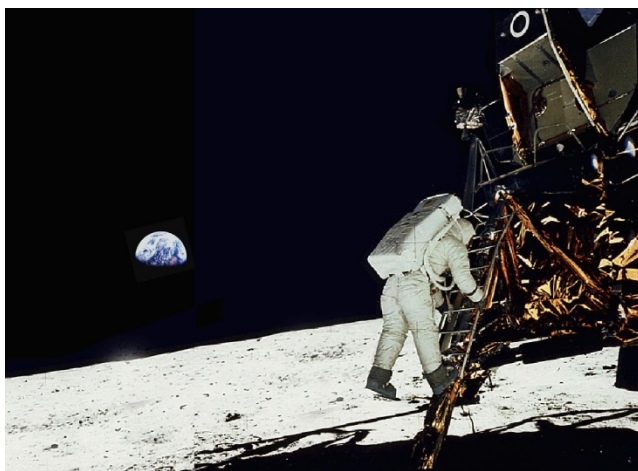


15 - Stavové metody

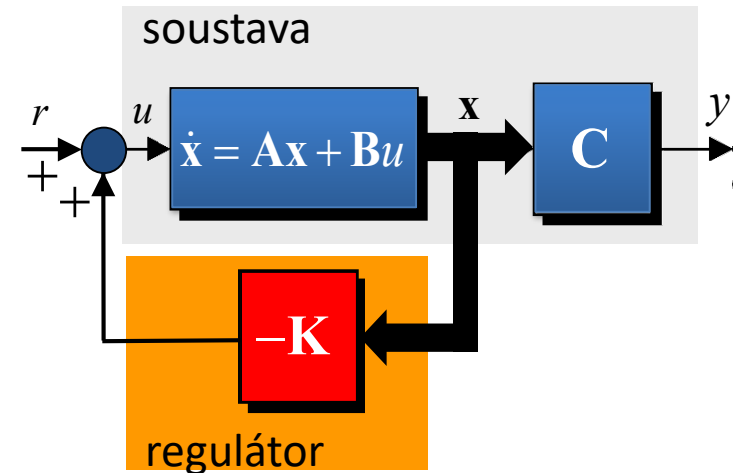


Michael Šebek
Automatické řízení 2019



Když můžeme měřit celý stav (všechny složky stavového vektoru) soustavy, pak je můžeme využít k řízení

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r$$
$$= -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + r$$



Na rozdíl od dosud probíraných regulátorů:

- vstupem regulátoru je vektor – je potřeba více senzorů
- využíváme víc informace než při ZV z výstupu
- do regulátoru vstupuje jiný signál, než který chceme řídit
- regulátor není dynamický, je jen „proporcionální“

Je stavový regulátor složitější nebo jednodušší než dynamická ZV z výstupu?



- Když do $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ dosadíme $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r$, dostaneme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + r) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r$$

- Rovnice výsledného systému je $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r$

- Zavedení stavové zpětné vazby změnilo původní matici systému

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad \longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r$$

- Výstupní rovnice $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ se nezměnila
- Jak moc můžeme matici ZV změnit?

$$\mathbf{A}_{\text{new}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

Z porovnání hodnotí je zřejmé, že všechny prvky libovolně změnit nemůžeme



Co tedy umí stavová zpětná vazba?

- I když se to na první pohled nezdá, platí

Věta

- Vhodnou volbou prvků \mathbf{K} můžeme libovolně (až na komplexně sdružené dvojice) umístit vlastní čísla matice $\mathbf{A}_{\text{new}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$
- a to právě když soustava je úplně říditelná.

Jinými slovy

- Můžeme libovolně umístit póly výsledného systému (právě když soustava je úplně říditelná)

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad \longrightarrow \quad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{new}}) = \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}))$$

- Porovnejte s metodou RL: ta všechny póly libovolně umístit nedokáže. Proč?
- Póly opravdu jen posouvá, ale nepřidává – srovnej s dynamickou výstupní ZV

Všimněte si ještě:

- Nutná a postačující podmínka je úplná říditelnost
- Právě proto je tento pojem tak důležitý



Umístění pólů - Naivně a v kanonickém tvaru

- Pro 1. a 2. řád řešíme - naivně - přímo z rovnice

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{new}}) = \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}))$$

Pro vyšší řády to obvykle nejde, protože vycházejí příliš složité rovnice.

- Pro soustavu v kanonické formě říditelnosti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

je řešení jednoduché, neboť i výsledný systém je v tomto zvláštním tvaru



Pokračování: Umístění pólů v kanonickém tvaru

- opravdu je $\mathbf{A}_{\text{new}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} =$

$$= \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_{n-1} + k_1) & -(a_{n-2} + k_2) & \cdots & -(a_1 + k_{n-1}) & -(a_0 + k_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a výsledný charakteristický polynom je

$$c(s) = \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A}_{\text{new}}) = s^n + (a_{n-1} + k_1)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + k_{n-1})s + (a_0 + k_n)$$

$$k_1 = c_{n-1} - a_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$k_{n-1} = c_1 - a_1$$

$$k_n = c_0 - a_0$$

- prvky matice \mathbf{K} vybereme tak, aby se koeficienty polynomu rovnaly požadovaným

$$c(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1s + c_0$$



Řešení pro obecný tvar

Pokud soustava není v normálním tvaru říditelnosti,
můžeme problém řešit převodem do tohoto tvaru

1. Pomocí matice říditelnosti vypočteme transformační matici \mathbf{T}
2. Převodeme naše rovnice s maticemi \mathbf{A} , \mathbf{B} do kanonické formy říditelnosti

$$\mathbf{A}_{\text{con}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \mathbf{B}_{\text{con}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}$$

3. Vypočteme matici stavové ZV pro tuto formu \mathbf{K}_{con}
4. Matici ZV transformujeme zpátky do původních souřadnic transformací

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{con}} \mathbf{T}^{-1}$$

Odvození transformace pro matici zpětné vazby

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{T} (\mathbf{A}_{\text{con}} - \mathbf{B}_{\text{con}} \mathbf{K}_{\text{con}}) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{T} \mathbf{B}_{\text{con}} r \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{con}} &= (\mathbf{A}_{\text{con}} - \mathbf{B}_{\text{con}} \mathbf{K}_{\text{con}}) \mathbf{x}_{\text{con}} + \mathbf{B}_{\text{con}} r \quad \longrightarrow \quad = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_{\text{con}} \mathbf{T}^{-1}) \mathbf{x} + \mathbf{B} r \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{x} + \mathbf{B} r \end{aligned}$$



Kompaktní řešení:

- Je-li soustava v obecném tvaru s maticemi \mathbf{A} , \mathbf{B} a požadujeme-li výsledný CL charakteristický polynom

$$c(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0$$

- pak je matice stavové zpětné vazby dána **Ackermannovým vzorcem**

$$\mathbf{K} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{C}^{-1} c(\mathbf{A})$$

- kde $\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ je matice říditelnosti soustavy
- a matice $c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I}_n$ vznikne dosazením **původní matice soustavy** do požadovaného CL charakteristického polynomu

Poznámky:

- Výpočet matice říditelnosti a tudíž ani Ackermannův vzorec není numericky moc spolehlivý a funguje tak do řádu 10
- V Matlabu nepoužívej inverzi, ale „lomítko“ (řešení soustavy rovnic) lépe naprogramováno ve funkci **place**, ale ta neumí vícenásobné CL póly



Vlastnosti: Stavová ZV nemění nuly

- Z definice plyne, že nuly systému bez ZV (tedy s maticemi \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}) jsou řešením rovnice
- zatímco nuly systému s ZV (tedy s maticemi $\mathbf{A-BK}$, \mathbf{B} , \mathbf{C}) jsou řešením rovnice
- Jenže obě matice mají stejný determinant:

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

takže oba systémy mají stejné nuly! (Pokud má systém více vstupů nebo výstupů, matice není čtvercová, det neexistuje, ale závěry jsou stejné)

- Tedy **stavová zpětná vazba nuly systému neovlivní!** - srovnej s výstupní ZV
- Jelikož má výsledný ZV systém stejné nuly jako soustava (a ty známe dopředu), můžeme stabilní nuly soustavy zahrnout mezi požadované CL póly a tím je z výsledného přenosu „vykrátit“.
- To využijeme zejména když ze specifikací neplyne poloha všech CL pólů a my stejně musíme nějaké další volit.



Vlastnosti: Problémy s ustálenou odezvou

- Stavová ZV dobře mění dynamiky, ale už neumožňuje nezávisle ovlivnit ustálenou odezvu - často vede na nenulovou ustálenou odchylku na skok
- Stejnoseměrné zesílení soustavy (bez ZV)

$$P(0) = \left(\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right) \Big|_{s=0} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- se po zavedení stavové zpětné vazby se změní na

$$T(0) = \left(\mathbf{C}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}))^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right) \Big|_{s=0} = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

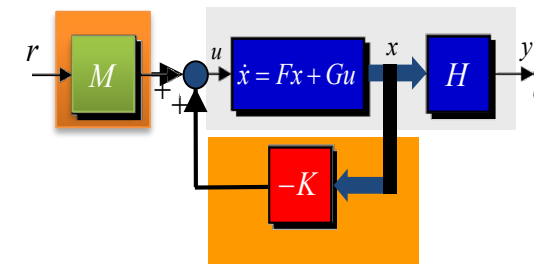
málokdy je jednotkové

- Můžeme to napravit
přímovazebním členem
- Pak je zřejmé

$$M = 1/T(0)$$

$$T_{celk}(0) = M(0)T(0) = T(0)/T(0) = 1$$

- Ale toto řešení není robustní, neboť změna parametrů (soustavy nebo ZV) změní výsledné zesílení na ne-jednotkové

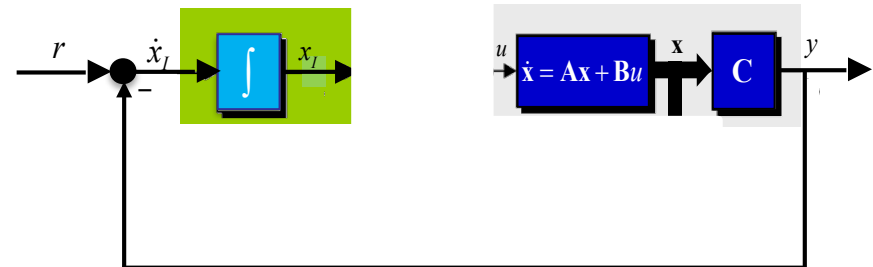




- Robustní způsob, jak při stavové ZV zajistit jednotkové ustálené zesílení
- Do struktury soustavy se stavovou ZV, přidáme integrátor regulační odchyvky $\dot{x}_I = r - y = -\mathbf{C}\mathbf{x} + r$
- V ustáleném stavu pak bude $\dot{x}_{I,ss} = 0 \Rightarrow y_{ss} = r_{ss}$
- Rovnice „rozpojeného systému“

jsou

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \dot{x}_I &= -\mathbf{C}\mathbf{x} + r \end{aligned}$$



- a kompaktně
$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$
- $$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$



- Když subsystémy „spojíme,“ tedy zavedeme stavovou ZV od všech stavů celého systému

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} - K_I x_I = -\begin{bmatrix} \mathbf{K} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$

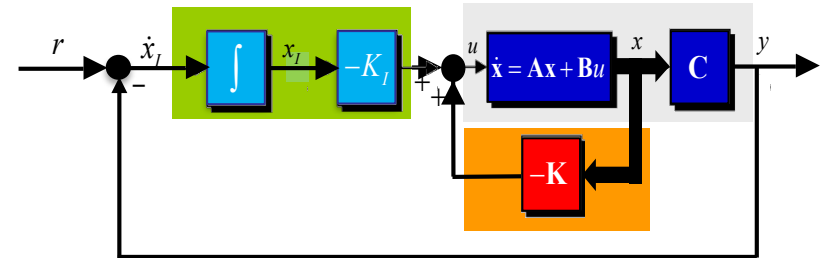
- dostaneme

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}K_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$

- Matici „velké“ stavové ZV $\begin{bmatrix} \mathbf{K} & K_I \end{bmatrix}$ navrhne standardními metodami, ale pro „velký“ systém s maticemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Funguje to podobně jako integrační složka složka v PID regulátoru





Celkový systém má matice $\mathbf{A}_{\text{celk}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & -\mathbf{BK}_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_{\text{celk}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_{\text{celk}} = [\mathbf{C} \quad 0]$

přenos $\mathbf{C}_{\text{celk}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{celk}})^{-1} \mathbf{B}_{\text{celk}}$ a ustálené zesílení $g_{\text{ss}} = -\mathbf{C}_{\text{celk}} \mathbf{A}_{\text{celk}}^{-1} \mathbf{B}_{\text{celk}}$

Označíme-li $\mathbf{A}_{\text{celk}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{bmatrix}$, pak $g_{\text{ss}} = -[\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = -\mathbf{CF}$

a nám stačí vypočítat jen jeden blok inverzní matice.

Ze vzorce (zde inverze existují)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{P}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{P}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1} \\ (\mathbf{P}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{M}^{-1} & (\mathbf{P}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1} \end{bmatrix}$$

pro $\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$, $\mathbf{N} = -\mathbf{BK}_I$, $\mathbf{P} = -\mathbf{C}$ dostaneme

$$\mathbf{E} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{P}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1} = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BK}_I \left(\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BK}_I \right)^{-1}$$

Takže opravdu $g_{\text{ss}} = -\mathbf{CF} = \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BK}_I \left(\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BK}_I \right)^{-1} = \mathbf{I} = 1$



Obecněji:

- Pro sledování rampy obdobně přidáme 2 integrátory, pro sledování paraboly 3 apod.

Ještě obecněji:

- Pro robustní sledování průběhu generovaného nějakým generátorem (= splňujícího nějakou diferenciální rovnici)
- Přidáme obdobně tento generátor k systému
- Tato obecná metoda se jmenuje **řízení s vnitřním modelem** (Internal Model Control – IMC)