16 - Pozorovatel a výstupní ZV

Michael Šebek

Automatické řízení 2018

26-4-18

Hlavní problém stavové ZV

Stavová zpětná vazba

- se zdá být nejúčinnějším nástrojem řízení, důvodem je síla pojmu stav, který v sobě obsahuje veškerou informaci o minulosti soustavy.

Stavová zpětná vazba se snadno užívá

- tam, kde všechny stavové veličiny můžeme snadno měřit, např. pro letecké a kosmické dopravní prostředky, kde jsou typickými veličinami poloha, rychlost, zrychlení.
- Dokonce už tam často jsou senzory měřící tyto veličiny pro jiné účely

Co když ale

- některé stavy měřit nechceme (cena a spolehlivost senzorů),
- nebo ani nemůžeme (jaderný reaktor, sklářská pec)?
- Často měříme jen některé stavové veličiny a těm pak říkáme „měřený výstup“

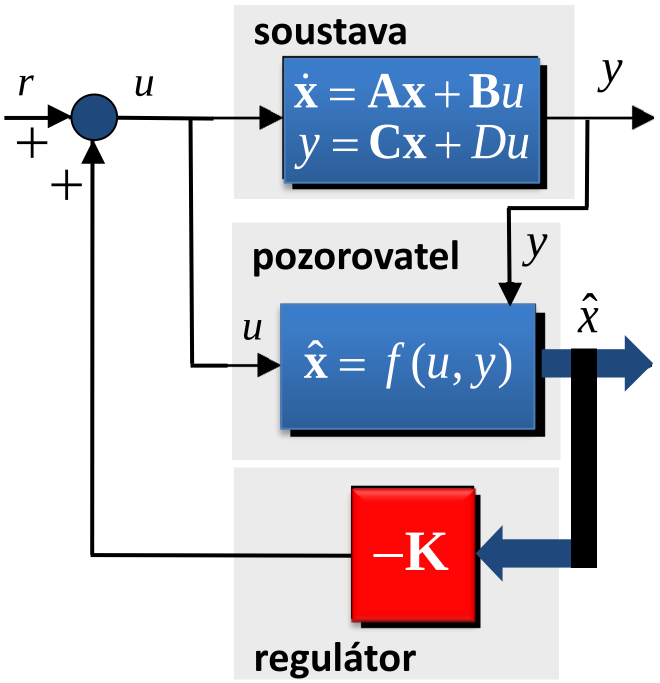
Je potom užití stavové ZV nemožné?

- Ne tak docela!
- Když některé stavy nemůžeme měřit, zkusíme je rekonstruovat

Estimátor stavu neboli Pozorovatel

Pozorovatel, estimátor stavu, někdy také rekonstruktor
(anglicky observer, state estimator, reconstructor)

Je to systém, který
- má stejný vstup jako soustava, často do něj vedeme i výstup
- má stejný řád jako soustava
- jeho stavy můžeme všechny měřit a
- jeho stav $\hat{\mathbf{x}}$ je odhadem stavu soustavy $\mathbf{x}$
- kdyby bylo $\hat{\mathbf{x}}(0)=\mathbf{x}(0)$,
  tak i budoucí $\hat{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{x}(t), t>0$
- obecně jen $\hat{\mathbf{x}}(t)\approx\mathbf{x}(t), t>0$



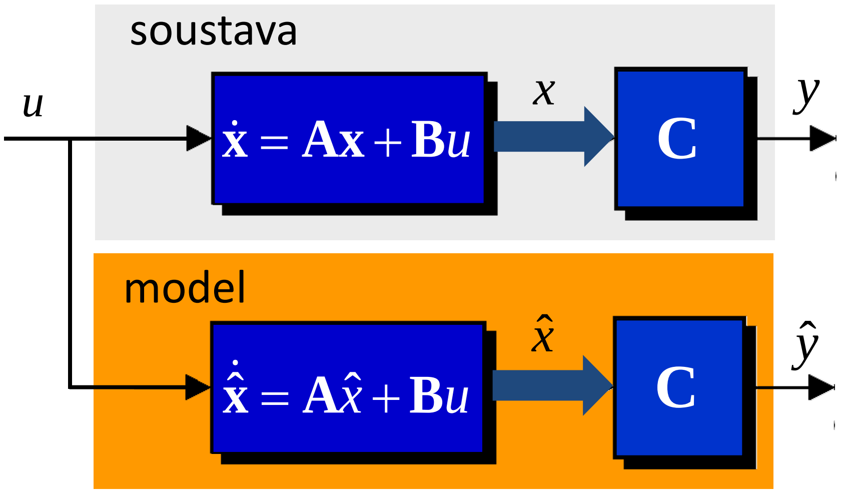
Úkol pozorovatele
- vytváří odhad stavu soustavy,
- který pak použijeme pro ZV
- místo skutečného stavu soustavy
- jež bohužel neznáme

Nestačil by model soustavy?

Zkusme přímovazební (open-loop) strukturu s modelem soustavy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u$$



- vypočteme odchylku odhadu

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e}}$$

- Dynamika odchylky je tedy dána dynamikou soustavy
- pokud vyhovuje (stabilita, rychlost konvergence), tak to stačí, ale pak vůbec nemusíme řídit
- pokud nevyhovuje, nemůžeme to napravit

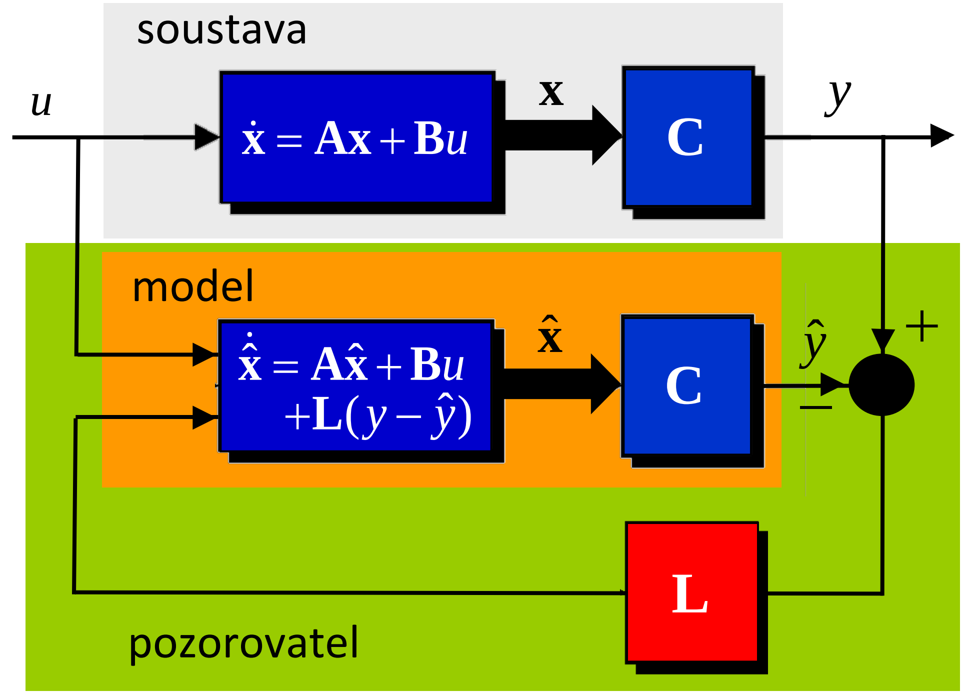
- Tato struktura není dobrá – Jak ji můžeme vylepšit? Zpětnou vazbou!
- Využijme rozdíl mezi měřeným a odhadovaným výstupem $y - \hat{y}$

Pozorovatel plného řádu

- odhaduje všechny stavy soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,\ y = \mathbf{C}\mathbf{x}$
- skládá se z modelu soustavy

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \hat{y})$$
$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$$

a injekce z výstupu



- odečtením rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

- Dostaneme pro odchylku odhadování $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e} \qquad \mathbf{e} = \mathbf{A}_{\text{poz}}\mathbf{e}$$

- to už je lepší: volbou vektoru $\mathbf{L}$ můžeme měnit matici $\mathbf{A}$, a tak nastavit dynamiku odhadování (konvergenci a její rychlost)

Vlastnosti pozorovatele plného řádu

- Protože je $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y - \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y$
- má pozorovatel rovnice

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}_{\mathbf{poz}}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y\\ \hat{y} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}}$$

kde $\boxed{\mathbf{A}_{\mathbf{poz}} = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}}$ je matice pozorovatele je

$$\mathbf{A}_{\mathrm{poz}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

- Její vlastní čísla (tzv. póly pozorovatele)
- se dají vhodnou volbou L nastavit „libovolně“ když je systém pozorovatelný
- Ne náhodou to připomíná vztahy pro matici stavové ZV

Póly pozorovatele

- obvykle je volíme 2× až 6× rychlejší než „póly regulátoru“
- aby póly regulátoru byly dominantní a pozorovatel nezpomaloval dyn.

Jen když je šum senzoru tak silný, že je hlavním problémem

- volíme póly pozorovatele 2× pomalejší než „póly regulátoru“
- tím zmenšíme šířku pásma a „vyhladíme šum v ZV systému“

Dualita

- Při návrhu pozorovatele pro dané $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ hledáme $\mathbf{L}$ tak, aby matice $\mathbf{A}_{\text{poz}} = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$ měla požadovaná vlastní čísla
- Při návrhu stavové ZV jsme podobně pro dané $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ hledali $\mathbf{K}$ tak, aby $\mathbf{A}_{\text{reg}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ měla požadovaná vlastní čísla
- Má to nějakou souvislost? Ano!

- Protože transpozice matice nemění vlastní čísla, transponujme problém na

$$\boxed{\mathbf{A}_{\text{poz}}^T = \left(\mathbf{A} - \mathbf{LC}\right)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{L}^T}$$

- Zřejmě jsou oba problémy duální
- Proto můžeme navrhnout pozorovatele (matici výstupní injekce) tak, že
- Budeme navrhovat matici stavové ZV pro duální (tedy „transponovaný“) systém

řízení stavová ZV	odhad stavu výst. injekce
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^T$
$\mathbf{B}$	$\mathbf{C}^T$
$\mathbf{C}$	$\mathbf{B}^T$
$\mathbf{K}$	$\mathbf{L}^T$

Dualita pozorovatelnosti a řiditelnosti

- Dualita je ještě hlubší: i pojmy řiditelnost a pozorovatelnost jsou duální

- Systém je (úplně) pozorovatelný, právě když lze k němu navrhnout pozorovatele s “libovolnými“ vlastními čísly (póly pozorovatele)

- Matice pozorovatelnosti je duální k matici řiditelnosti

$$O=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T\end{bmatrix}^T$$

- kanonický tvar pozorovatelnosti je duální ke kanonickému tvaru řiditelnosti

řízení stavová ZV		odhad stavu výst. injekce
$\mathbf{A}$		$\mathbf{A}^T$
$\mathbf{B}$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{C}^T$
$\mathbf{C}$		$\mathbf{B}^T$
$\mathbf{K}$		$\mathbf{L}^T$

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c|cccc} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0\\ -a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ \hline -a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Návrh pozorovatele - 3 metody

Využít přímo dualitu:

- převést úlohu na návrh stavové ZV pro duální systém,
- vyřešit ho a výsledné $\mathbf{K}$ převést na $\mathbf{L}$ podle $\mathbf{L} = \mathbf{K}^T$

Převodem na normální tvar pozorovatelnosti:

- k čemuž použijeme transformační matici $x = \mathbf{T}x_{obs}, \mathbf{T} = \mathbf{O}^{-1}\mathbf{O}_{obs}$
- snadno vyřešit v tomto tvaru

$$\mathbf{A}_{poz,new} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_{n-1}+l_1) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -(a_{n-2}+l_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -(a_1+l_{n-1}) & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(a_0+l_n) & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- výsledek převést zpět do původních souřadnic

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_{obs} - \mathbf{L}_{obs}\mathbf{C})) = s^n + (a_{n-1}+l_1)s^{n-1} + \cdots + (a_1+l_{n-1})s + a_0 + l_n$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{T}\mathbf{L}_{obs}$$

Pomocí modifikovaného

Ackermannova vzorce pro pozorovatele

$$\boxed{\mathbf{L} = p_{\text{poz}}(\mathbf{A})\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T}$$

Kombinace: ZV a pozorovatel

Stavovými metodami navržená ZV z výstupu:

- navrhneme zvlášť stavovou ZV a zvlášť pozorovatele
- ale pak ZV vedeme od stavů pozorovatele $u=-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}+r$

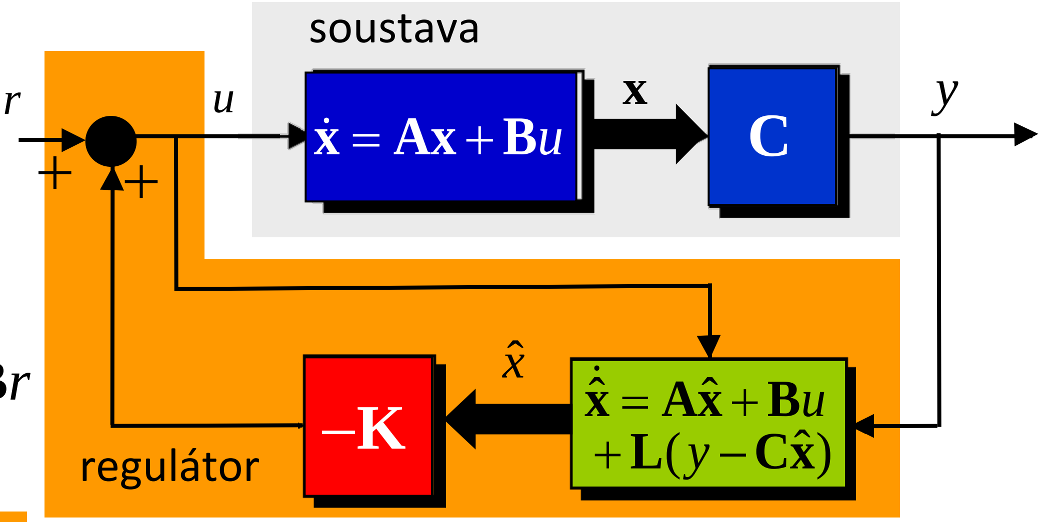
$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u,\ y=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}=\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{B}u+\mathbf{L}(y-\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

$$u=-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}+r$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}=(\mathbf{A}-\mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{B}u+\mathbf{L}y$$

$$=(\mathbf{A}-\mathbf{L}\mathbf{C}-\mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{L}y+\mathbf{B}r$$



- rovnice regulátoru tedy jsou

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}=(\mathbf{A}-\mathbf{L}\mathbf{C}-\mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{L}y+\mathbf{B}r$$

$$u=-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}+r$$

- a jeho přenos je

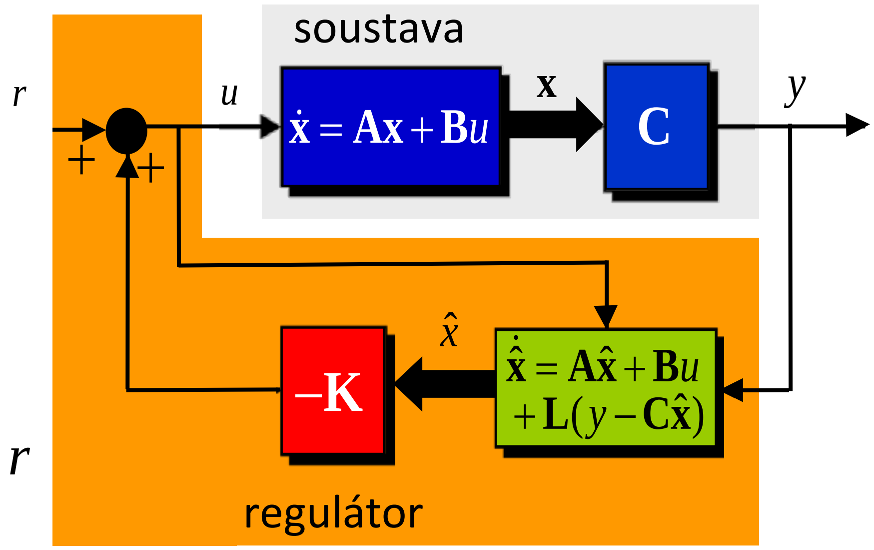
$$u(s)=-\mathbf{K}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{L}\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{L}y(s)+\left(1-\mathbf{K}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{L}\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}\right)r(s)$$

Separace

Výsledný systém (soustava + pozorovatel + ZV) má rovnice

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}r$$
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}r$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + r$$



- Abychom lépe určili jeho póly, vyjádříme ho se stavy $\mathbf{x}, \mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e} + \mathbf{B}r$$
$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}$$

neboli blokově

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r$$

- póly výsledného systému jsou zřejmě
  póly ZV bez pozorovatele + póly pozorovatele bez ZV
- teprve z toho plyne, že smíme obě části navrhovat zvlášť:
  tzv. princip separace

Další použití pozorovatele

Pozorovatel se používá i k řešení jiných úloh:

- Jako náhrada měření veličiny, které není možné či snadné
- V případě chyb, selhání, poruch (fault, fauilure) k jejich
  - detekci = že došlo k selhání (fault detection)
  - izolaci = kde přesně došlo k selhání (fault isolation)
- V případě selhání senzoru a/nebo aktuátoru k rekonfiguraci
  - např. se při selhání senzoru použije pro řízení místo skutečně naměřených hodnot výstupu použijí hodnoty odhadnuté pozorovatelem
  - v případě selhání aktuátoru se použije tzv. virtuální aktuátor, což je modifikace pozorovatele
- (Podobně) v případě změny vlastností senzoru/aktuátoru