

16 - Pozorovatel a výstupní ZV



Michael Šebek
Automatické řízení 2016



Stavová zpětná vazba

- se zdá být nejúčinnějším nástrojem řízení, důvodem je síla pojmu stav, který v sobě obsahuje veškerou informaci o minulosti soustavy.

Stavová zpětná vazba se snadno užívá

- tam, kde všechny stavové veličiny můžeme snadno měřit, např. pro letecké a kosmické dopravní prostředky, kde jsou typickými veličinami poloha, rychlost, zrychlení.
- Dokonce už tam často jsou senzory měřící tyto veličiny pro jiné účely

Co když ale

- některé stavy měřit nechceme (cena a spolehlivost senzorů),
- nebo ani nemůžeme (jaderný reaktor, sklářská pec)?
- Často měříme jen některé stavové veličiny a těm pak říkáme „měřený výstup“

Je potom užití stavové ZV nemožné?

- Ne tak docela!
- Když některé stavy nemůžeme měřit, zkusíme je rekonstruovat



Estimátor stavu neboli Pozorovatel

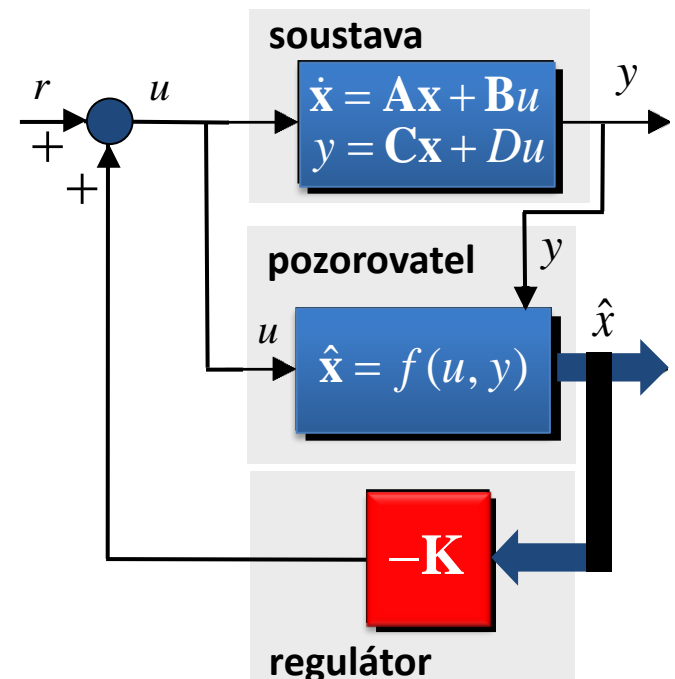
Pozorovatel, estimátor stavu, někdy také rekonstruktor (anglicky observer, state estimator, reconstructor)

Je to systém, který

- má stejný vstup jako soustava, často do něj vedeme i výstup
- má stejný řád jako soustava
- jeho stavy můžeme všechny měřit a
- jeho stav $\hat{\mathbf{x}}$ je odhadem stavu soustavy \mathbf{x}
- kdyby bylo $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$,
tak i budoucí $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t), t > 0$
- obecně jen $\hat{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{x}(t), t > 0$

Úkol pozorovatele

- vytváří odhad stavu soustavy,
- který pak použijeme pro ZV
- místo skutečného stavu soustavy
- jež bohužel neznáme





Nestačil by model soustavy?

Zkusme přímovazební (open-loop) strukturu s modelem soustavy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

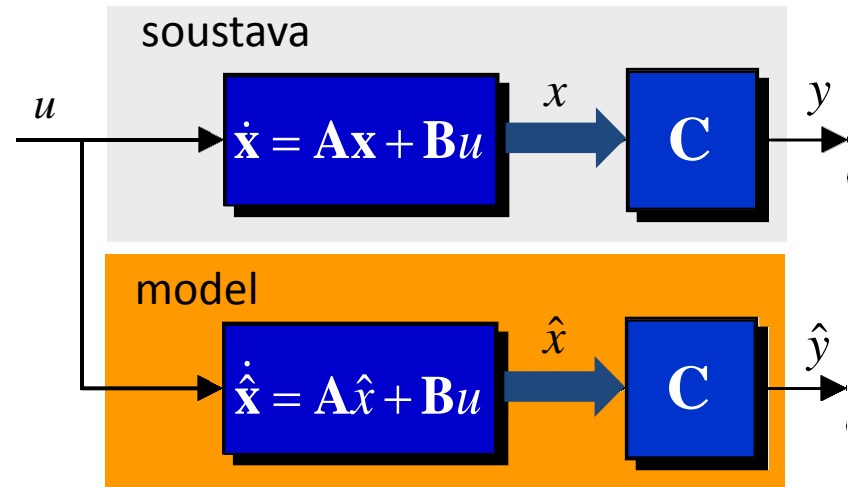
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u$$

- vypočteme odchylku odhadu

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e}$$

- Dynamika odchylky je tedy dána dynamikou soustavy
- pokud vyhovuje (stabilita, rychlost konvergence), tak to stačí, ale pak vůbec nemusíme řídit
- pokud nevyhovuje, nemůžeme to napravit
- Tato struktura není dobrá – Jak ji můžeme vylepšit? Zpětnou vazbou!
- Využijme rozdíl mezi měřeným a odhadovaným výstupem $y - \hat{y}$





Pozorovatel plného řádu

- odhaduje všechny stavy soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, y = \mathbf{C}\mathbf{x}$
- skládá se z modelu soustavy

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$$



a injekce z výstupu

- odečtením rovnic

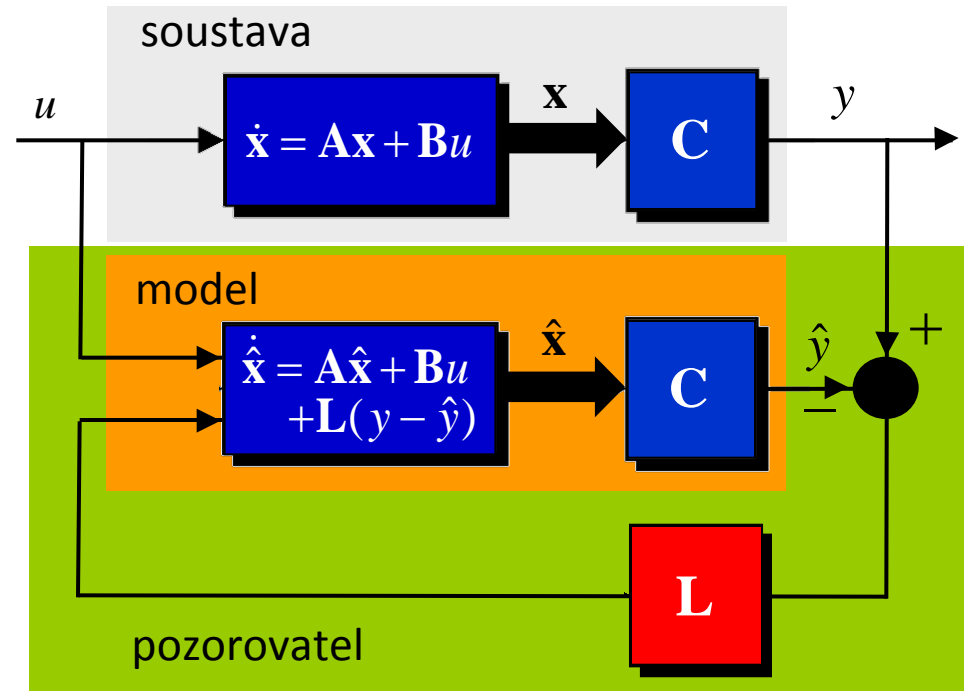
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

- Dostaneme pro odchylku odhadování $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e} \quad \mathbf{e} = \mathbf{A}_{\text{poz}}\mathbf{e}$$

- to už je lepší: volbou vektoru \mathbf{L} můžeme měnit matici \mathbf{A} , a tak nastavit dynamiku odhadování (konvergenci a její rychlost)





Vlastnosti pozorovatele plného řádu

- Protože je $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y - \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y$
- má pozorovatel rovnice

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_{\text{poz}}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y \\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

kde $\mathbf{A}_{\text{poz}} = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ je matice pozorovatele je

$$\mathbf{A}_{\text{poz}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

- Její vlastní čísla (tzv. póly pozorovatele)
- se dají vhodnou volbou L nastavit „libovolně“ když je systém pozorovatelný
- Ne náhodou to připomíná vztahy pro matici stavové ZV

Póly pozorovatele

- obvykle je volíme 2× až 6× rychlejší než „póly regulátoru“
- aby póly regulátoru byly dominantní a pozorovatel nezpomaloval dyn.

Jen když je šum senzoru tak silný, že je hlavním problémem

- volíme póly pozorovatele 2× pomalejší než „póly regulátoru“
- tím zmenšíme šířku pásma a „vyhladíme šum v ZV systému“

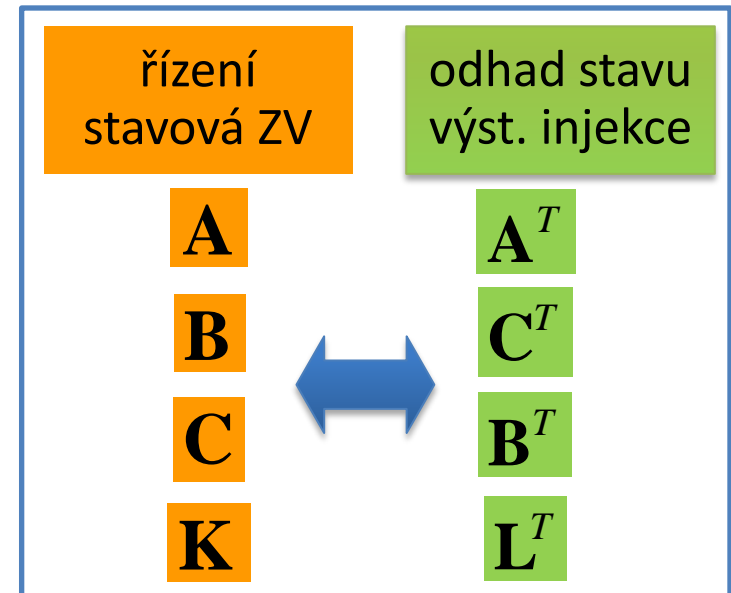


- Při návrhu pozorovatele pro dané \mathbf{A} , \mathbf{C} hledáme \mathbf{L} tak, aby matice $\mathbf{A}_{\text{poz}} = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$ měla požadovaná vlastní čísla
- Při návrhu stavové ZV jsme podobně pro dané \mathbf{A} , \mathbf{B} hledali \mathbf{K} tak, aby $\mathbf{A}_{\text{reg}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ měla požadovaná vlastní čísla
- Má to nějakou souvislost? Ano!

- Protože transpozice matice nemění vlastní čísla, transponujeme problém na

$$\mathbf{A}_{\text{poz}}^T = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{L}^T$$

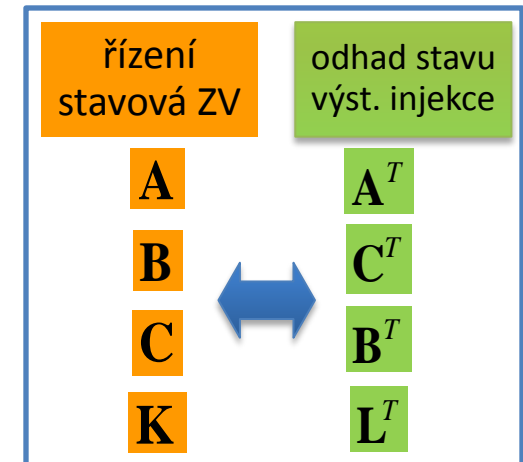
- Zřejmě jsou oba problémy **duální**
- Proto můžeme navrhnout pozorovatele (matici výstupní injekce) tak, že
- Budeme navrhovat matici stavové ZV pro duální (tedy „transponovaný“) systém





Dualita pozorovatelnosti a říditelnosti

- Dualita je ještě hlubší: i pojmy říditelnost a pozorovatelnost jsou duální
- Systém je (úplně) pozorovatelný, právě když lze k němu navrhnout pozorovatele s “libovolnými” vlastními čísly (póly pozorovatele)
- Matice pozorovatelnosti je duální k matici říditelnosti



$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T]^T$$

- kanonický tvar pozorovatelnosti je duální ke kanonickému tvaru říditelnosti

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]$$



Návrh pozorovatele - 3 metody

Využit přímo dualitu:

- převést úlohu na návrh stavové ZV pro duální systém,
- vyřešit ho a výsledné \mathbf{K} převést na \mathbf{L} podle $\mathbf{L} = \mathbf{K}^T$

Převodem na normální tvar pozorovatelnosti:

- k čemuž použijeme transformační matici $\mathbf{T} = \mathbf{O}_{new} \mathbf{O}_{old}^{-1}$

- snadno vyřešit v tomto tvaru

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_{n-1} + l_1) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -(a_{n-2} + l_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -(a_1 + l_{n-1}) & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(a_0 + l_n) & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- výsledek převést zpět do původních souřadnic

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})) = s^n + (a_{n-1} + l_1)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + l_{n-1})s + a_0 + l_n$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

Pomocí modifikovaného

Ackermannova vzorce pro pozorovatele

$$\mathbf{L} = p_{\text{poz}}(\mathbf{A})\mathbf{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$



Kombinace: ZV a pozorovatel

Stavovými metodami navržená ZV z výstupu:

- navrhne zvlášť stavovou ZV a zvlášť pozorovatele
- ale pak ZV vedeme od stavů pozorovatele $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + r$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + r$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y + \mathbf{B}r \end{aligned}$$

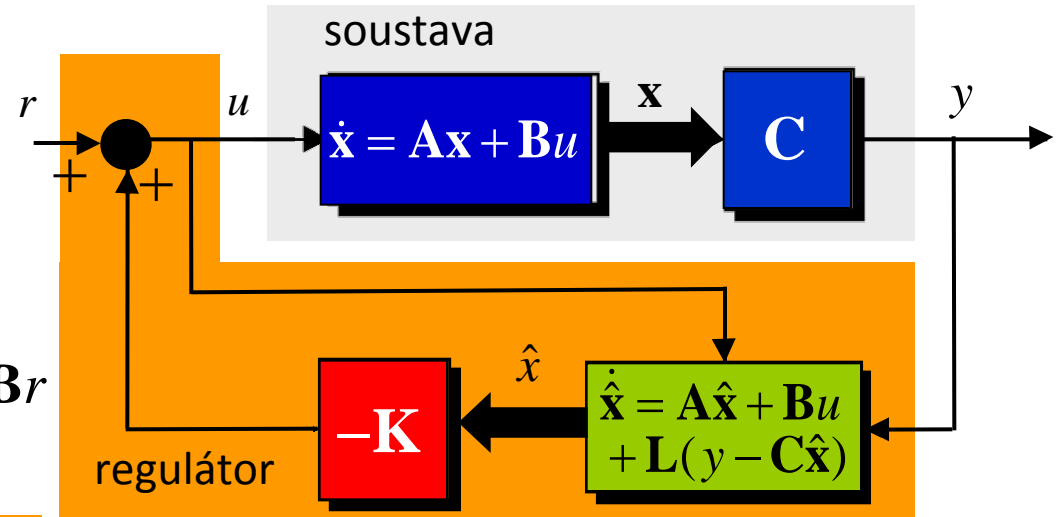
- rovnice regulátoru tedy jsou

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y + \mathbf{B}r$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + r$$

- a jeho přenos je

$$u(s) = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{L}y(s) + \left(1 - \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}\right)r(s)$$





Výsledný systém (soustava + pozorovatel + ZV) má rovnice

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}r$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}r$$

- Abychom lépe určili jeho póly, vyjádříme ho se stavu $\mathbf{x}, \mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$

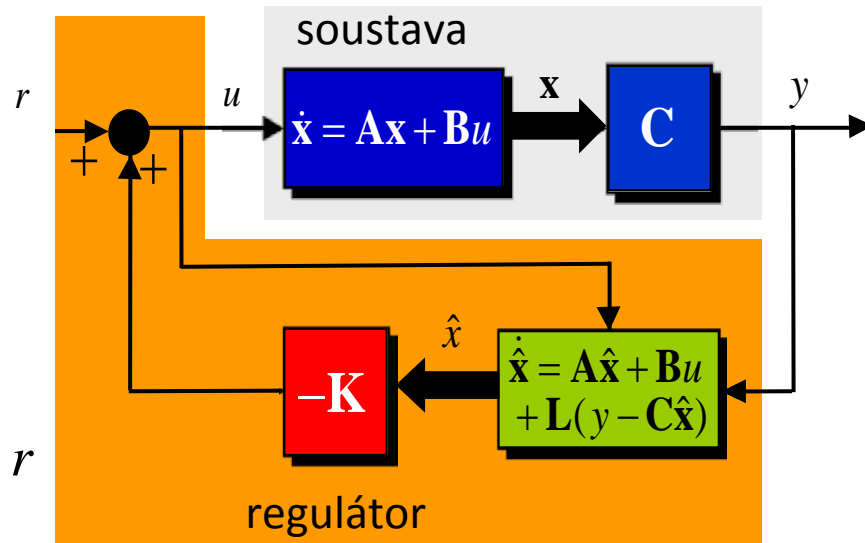
$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e} + \mathbf{B}r$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}$$

neboli blokově

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + r$$



- póly výsledného systému jsou zřejmě póly ZV bez pozorovatele + póly pozorovatele bez ZV
- teprve z toho plyne, že smíme obě části navrhovat zvlášť: tzv. **princip separace**



Pozorovatel se používá i k řešení **jiných úloh**:

- Jako náhrada měření veličiny, které není možné či snadné
- V případě chyb, selhání, poruch (fault, fauilure) k jejich
 - detekci = že došlo k selhání (fault detection)
 - izolaci = kde přesně došlo k selhání (fault isolation)
- V případě selhání senzoru a/nebo aktuátoru k rekonfiguraci
 - např. se při selhání senzoru použije pro řízení místo skutečně naměřených hodnot výstupu použijí hodnoty odhadnuté pozorovatelem
 - v případě selhání aktuátoru se použije tzv. virtuální aktuátor, což je modifikace pozorovatele
- (Podobně) v případě změny vlastností senzoru/aktuátoru