

19 - Polynomiální metody



Michael Šebek
Automatické řízení 2018



Opakování - Vlastnosti polynomů

- Polynomy netvoří těleso, ale **okruh** - obecně jimi nelze dělit beze zbytku!
- Proto existuje: dělitel, násobek, společný dělitel, největší spol. dělitel, ...
- Dělení se zbytkem - Euklidovo

$$a(s) = b(s)q(s) + r(s), \quad \deg r(s) < \deg b(s)$$

- Bézoutova věta (identita)

$$g(s) = \gcd(a(s), b(s)) \Leftrightarrow \exists p(s), q(s), r(s), v(s) :$$

$$\begin{array}{l} a(s)p(s) + b(s)q(s) = g(s) \\ a(s)v(s) + b(s)w(s) = 0 \end{array} \quad \text{takové, že} \quad \det \begin{bmatrix} p(s) & q(s) \\ v(s) & w(s) \end{bmatrix} = \textit{konst.}$$

- Klasické lineární rovnice $a(s)x(s) = b(s)$ nemívají řešení, protože $x(s) = b(s)/a(s)$ není polynom
- **Diofantická rovnice** (Diofantos z Alexandrie)

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = c(s)$$



Vlastnosti polynomiální rovnice

Vlastnosti polynomiální rovnice

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = c(s)$$

při značení $g = \gcd(a, b)$
 $\bar{a} = a/g$
 $\bar{b} = b/g$

Nutná a postačující podmínka řešitelnosti

- Rovnice má řešení, právě když $g \mid c$
(tj. právě když největší společný dělitel a a b dělí beze zbytku c)

Věta: Obecné řešení

- Obecné řešení rovnice má tvar $x(s) = x'(s) - \bar{b}(s)t(s)$
 $y(s) = y'(s) + \bar{a}(s)t(s)$ kde je nějaké (partikulární) řešení a $t(s)$ je libovolný polynomiální parametr

Věta: Řešení minimálního stupně

- Rovnice má právě jedno řešení takové, že $\deg x < \deg \bar{b}$
tj. **minimálního stupně v x**
- Rovnice má právě jedno řešení takové, že $\deg y < \deg \bar{a}$
tj. **minimálního stupně v y**
- Obě tato řešení **koinciduují**, když $\deg c < \deg a + \deg b$, jinak jsou různá



1. Vybereme CL póly, z nich sestavíme CL charakteristický polynom $c(s)$ a pak vyřešíme rovnici $a(s)x(s) + b(s)y(s) = c(s)$
2. Vybereme vhodné řešení pro přenos regulátoru ve tvaru $\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{y(s)}{x(s)}$

Případ $a(s), b(s)$ nesoudělné

- soustava nemá neřiditelné/nepozorovatelné módy a
- $c(s)$ může být libovolné (póly můžeme umístit - teoreticky - libovolně)

Případ $a(s), b(s)$ soudělné, $\gcd(a(s), b(s)) = g(s)$

- soustava má neřiditelné nebo nepozorovatelné módy
$$g(s)\bar{a}(s)x(s) + g(s)\bar{b}(s)y(s) = g(s)\bar{c}(s)$$
- $c(s)$ nemůže být libovolné, musí obsahovat $g(s)$
- neřiditelné/nepozorovatelné módy nemůžeme změnit - ani teoreticky
- ostatní póly můžeme - teoreticky - umístit libovolně
- alternativně společný faktor vykrátíme a pak řešíme nesoudělnou verzi
$$\bar{a}(s)x(s) + \bar{b}(s)y(s) = \bar{c}(s)$$



Modifikace: Integrační charakter regulátoru

- Řešení dává v principu „všechny regulátory“ splňující zadání a tak z nich můžeme dále vybírat vhodný podle dalších požadavků
- Nemusí to ale být snadné a někdy je možné/lepší dodatečné požadavky „zahrnout do rovnice.“
- Například můžeme regulátoru předem vnutit integrační charakter řešením upravené rovnice

$$\underbrace{a(s)s}_{\tilde{a}(s)} \tilde{x}(s) + b(s) \tilde{y}(s) = c(s)$$

- Když najdeme její řešení $\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)$, utvoříme regulátor takto

$$D(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{s\tilde{x}(s)}$$

- Podobně můžeme regulátoru vnutit i několikanásobný integrátor

$$\underbrace{a(s)s^k}_{\hat{a}(s)} \hat{x}(s) + b(s) \hat{y}(s) = c(s) \qquad D(s) = \frac{\hat{y}(s)}{s^k \hat{x}(s)}$$



Z nekonečně mnoha regulátorů obvykle chceme ten ryzí. Jak na to?

- Je-li přenos soustavy $G(s)$ striktně ryzí a je-li řád soustavy $\deg a(s) = n$ tak musíme pro ryzí řešení vzít
 - 1) stupeň pravé strany alespoň $2n-1$ a
 - 2) vybrat řešení minimálního stupně v y , tedy $\deg y(s) \leq n-1$
- Tím je zaručeno, že vyjde ryzí regulátor řádu $n-1$

Vysvětlení: stupně jednotlivých členů rovnice jsou

$$\overset{\textcircled{n}}{a(s)}x(s) + \overset{\textcircled{\leq n-1}}{b(s)}\overset{\textcircled{\leq n-1}}{y(s)} = \overset{\textcircled{2n-1}}{c(s)}$$

$$\leftarrow \text{red box } = 2n-2 \quad \text{green box } \leq 2n-2$$

$$\deg x(s) = n-1$$

- Pokud je stupeň pravé strany menší než $2n-1$, výsledný regulátor může ale nemusí být ryzí (většinou není)



Všechny stabilizující regulátory - implicitně

Terminologie: **Stabilizující regulátor** zajistí stabilitu uzavřené smyčky

Všechny stabilizující regulátory pro danou soustavu s $a(s)$, $b(s)$ jsou právě všechna řešení $p(s)$, $q(s)$ rovnice

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = c(s)$$

pro právě všechny stabilní polynomy $c(s)$ na pravé straně

Řešitelnost = stabilizovatelnost:

Soustava nesmí mít skryté módy a $\gcd(a, b)$ musí být stabilní (tj. případná neřiditelná/nepozorovatelná část stabilní)

Ryzí regulátor

Ryzí soustava, volíme $\deg c(s) \geq 2 \deg a(s) - 1$
a vybereme řešení minimálního stupně v $q(s)$



Regulátor se 2 stupni volnosti - 2DOF

2DOF regulátor

- zpracovává dva signály, vytváří jeden

$$u(s) = -\frac{q(s)}{p(s)} y(s) + \frac{r(s)}{p(s)} y_r(s) + \frac{v_{\hat{x}_0}(s)}{p(s)}$$

(bude realizován jako jeden dynamický systém)

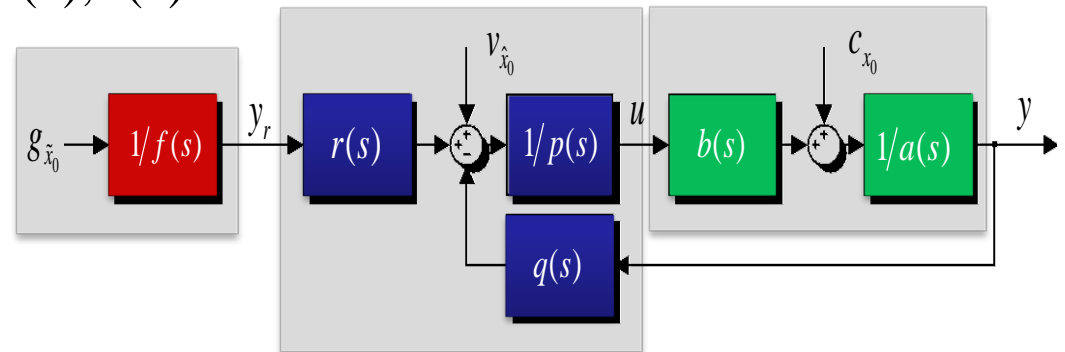
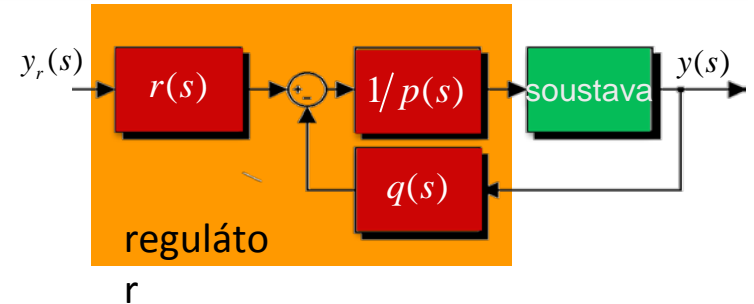
- regulační odchylka tu fyzicky neexistuje, přesto jí hodnotíme kvalitu reg.

Reference

- zadána generátorem $y_r = \frac{g_{\tilde{x}_0}(s)}{f(s)}$ ($f(s)$ dáno, $g_{\tilde{x}_0}(s)$ neurčeno, libovolné)

Asymptotické sledování: $u(t), e(t) \rightarrow 0$ pro každou kombinaci $c_{x_0}, v_{\hat{x}_0}, g_{\tilde{x}_0}$

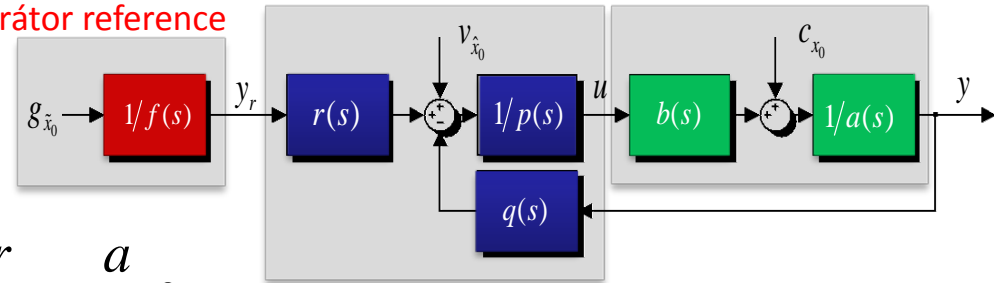
- Cílem návrhu je stabilní $u(s), e(s)$
- Přitom jsou pp. neurčené a nevyužijí se k návrhu
- Takže výsledek funguje pro všechny pp.





Asymptotické sledování - řešení

generátor reference



$$u = \frac{a}{ap + bq} v_{\hat{x}_0} - \frac{q}{ap + bq} c_{x_0} + \frac{r}{ap + bq} \frac{a}{f} g_{\tilde{x}_0}$$

$$e = y_r - y = -\frac{b}{ap + bq} v_{\hat{x}_0} - \frac{p}{ap + bq} c_{x_0} + \left(1 - \frac{br}{ap + bq}\right) \frac{1}{f} g_{\tilde{x}_0}$$

Řešení

Všechny vhodné regulátory
splňují rovnice
pro nějaké stabilní $m(s)$

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = m(s)$$

$$f^-(s)t(s) + b(s)r(s) = m(s)$$

Řešitelnost

1) $\text{gcd}(a, b)$ stabilní; 2) $\text{gcd}(f^-, b) = 1$; 3) $f^- \mid a$.



Přizpůsobení soustavy modelu

- regulátorem chceme „přenos soustavy“ změnit na jiný přesně zadaný



Formulace (Exact model matching)

- Dána soustava, tj. $a(s), b(s)$ a požadovaný přenos (model), tj. $f(s), g(s)$
- Najdi regulátor, tj. $p(s), q(s), r(s)$ tak,
- aby se výsledný přenos rovnal požadovanému

Řešení

Všechny vhodné regulátory splňují

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = f(s)\bar{b}(s)t(s)$$

$$r(s) = \bar{g}(s)t(s)$$

- kde $\bar{b}(s)/\bar{g}(s) = b(s)/g(s)$ nesoudělné
- a $t(s)$ je libovolný polynomiální parametr