19 - Polynomiální metody

Michael Šebek

Automatické řízení 2017

Opakování - Vlastnosti polynomů

- Polynomy netvoří těleso, ale okruh - obecně je nelze dělit beze zbytku!
- Proto existuje: dělitel, násobek, společný dělitel, největší spol. dělitel
- Dělení se zbytkem - Euklidovo

$$a(s) = b(s)q(s) + r(s), \;\; \deg r(s) < \deg b(s)$$

- Bézoutova věta (identita)

$$g(s) = \operatorname{gcd}\big(a(s), b(s)\big) \Leftrightarrow \exists p(s), q(s), r(s), v(s):$$

$$\begin{aligned} a(s)p(s) + b(s)q(s) &= g(s) \\ a(s)v(s) + b(s)w(s) &= 0 \end{aligned} \qquad \det\begin{bmatrix} p(s) & q(s) \\ v(s) & w(s) \end{bmatrix} = konst.$$

- Klasické lineární rovnice $a(s)x(s) = b(s)$ nemívají řešení,
  protože $x(s) = b(s)/a(s)$ nebývá polynom
- Diofantická rovnice (Diofantos z Alexandrie)

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = c(s)$$

Vlastnosti polynomiální rovnice

Vlastnosti polynomiální rovnice

$$a(s)x(s)+b(s)y(s)=c(s)$$

při značení
$$g=\gcd(a,b)$$
$$\bar{a}=a/g$$
$$\bar{b}=b/g$$

Nutná a postačující podmínka řešitelnosti

- Rovnice má řešení, právě když $g\,|\,c$
  (tj. právě když největší společný dělitel a a b dělí beze zbytku c)

Věta: Obecné řešení

- Obecné řešení rovnice má tvar
  $$x(s)=x'(s)-\bar{b}(s)t(s)$$
  $$y(s)=y'(s)+\bar{a}(s)t(s)$$
  kde je nějaké (partikulární) řešení a $t(s)$ je libovolný polynomiální parametr

Věta: Řešení minimálního stupně

- Rovnice má právě jedno řešení takové, že $\deg x<\deg\bar{b}$
  tj. minimálního stupně v x
- Rovnice má právě jedno řešení takové, že $\deg y<\deg\bar{a}$
  tj. minimálního stupně v y
- Obě tato řešení koincidují, když $\deg c<\deg a+\deg b$, jinak jsou různá

Umístění pólů

1. Vybereme CL póly a sestavíme požadovaný CL char. polynom $c(s)$
   Vyřešíme rovnici $a(s)x(s)+b(s)y(s)=c(s)$
2. Vybereme vhodné řešení

Případ 1: $a(s)$, $b(s)$ nesoudělné

- soustava nemá neřiditelné/nepozorovatelné módy
- $c(s)$ může být libovolné (póly řiditelného a pozorovatelného systému můžeme umístit - teoreticky - libovolně)

Případ 2: $a(s)$, $b(s)$ soudělné: $\gcd(a(s),b(s)) = g(s)$

- soustava má neřiditelné nebo nepozorovatelné módy

$$g(s)\overline{a}(s)x(s)+g(s)\overline{b}(s)y(s)=g(s)\overline{c}(s)$$

- $c(s)$ nemůže být libovolné, musí obsahovat $g(s)$
- neřiditelné/nepozorovatelné módy nemůžeme změnit (ani teoreticky)
- ostatní póly můžeme umístit libovolně (teoreticky)
- alternativně vykrátíme společný faktor a pak řešíme nesoudělnou verzi

$$\overline{a}(s)x(s)+\overline{b}(s)y(s)=\overline{c}(s)$$

Modifikace: Integrační charakter regulátoru

- Řešení dává v principu „všechny regulátory“ splňující zadání a tak z nich můžeme dále vybírat vhodný podle dalších požadavků
- Nemusí to ale být snadné a někdy je lepší dodatečné požadavky „zahrnout do rovnice.“
- Například můžeme regulátoru předem vnutit integrační charakter řešením upravené rovnice $\underbrace{a(s)s}_{\tilde{a}(s)}\tilde{x}(s)+b(s)\tilde{y}(s)=c(s)$
- Když najdeme její řešení $\tilde{x}(s),\tilde{y}(s)$, utvoříme regulátor takto

$$D(s)=\frac{\tilde{y}(s)}{s\tilde{x}(s)}$$

- Podobně můžeme regulátoru vnutit i několikanásobný integrátor

$$\underbrace{a(s)s^k}_{\hat{a}(s)}\hat{x}(s)+b(s)\hat{y}(s)=c(s) \qquad D(s)=\frac{\hat{y}(s)}{s^k\hat{x}(s)}$$

Ryzost regulátoru

Z nekonečně mnoha regulátorů obvykle chceme ten ryzí. Jak na to?

- Je-li přenos soustavy $G(s)$ striktně ryzí a je-li řád soustavy $\deg a(s) = n$ tak musíme pro ryzí řešení vzít
  1) stupeň pravé strany alespoň $2n\text{-}1$ a
  2) vybrat řešení minimálního stupně v y , tedy $\deg y(s) \le n-1$
- Tím je zaručeno, že vyjde ryzí regulátor řádu *n-1*

Vysvětlení: stupně jednotlivých členů rovnice jsou

$$\underbrace{\overbrace{a(s)}^{n}x(s)}_{=2n-2}+\underbrace{\overbrace{b(s)}^{\le n-1}\overbrace{y(s)}^{\le n-1}}_{\le 2n-2}=\overbrace{c(s)}^{2n-1}$$

$$\deg x(s) = n-1$$

- Pokud je stupeň pravé strany menší než $2n\text{-}1$, výsledný regulátor může ale nemusí být ryzí (většinou není)

Všechny stabilizující regulátory - implicitně

Terminologie: Stabilizující regulátor zajistí stabilitu uzavřené smyčky

Všechny stabilizující regulátory pro danou soustavu s $a(s), b(s)$
jsou právě všechna řešení $p(s), q(s)$ rovnice

$$a(s)p(s)+b(s)q(s)=c(s)$$

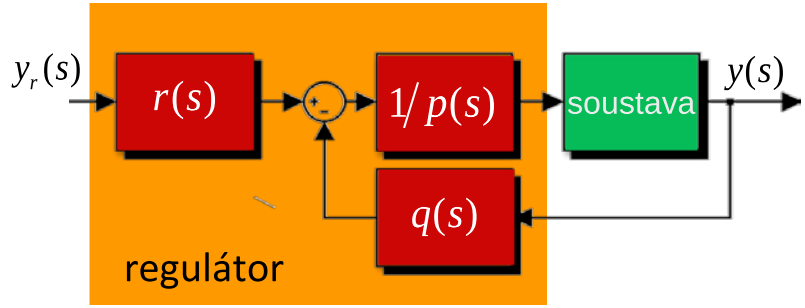
pro všechny stabilní polynomy $c(s)$ na pravé straně

Řešitelnost = stabilizovatelnost:
Soustava nesmí mít skryté módy a $\gcd\left(a,b\right)$ musí být stabilní
(tj. případná neřiditelná/nepozorovatelná část stabilní)

Ryzí regulátor
Ryzí soustava, volíme $\deg c(s) \geq 2\deg a(s) - 1$
a vybereme řešení minimálního stupně v $q(s)$

Sledování se 2 stupni volnosti - 2DOF

2DOF regulátor



- zpracovává dva signály, vytváří jeden

$$u(s) = -\frac{q(s)}{p(s)} y(s) + \frac{r(s)}{p(s)} y_r(s) + \frac{v_{\hat{x}_0}(s)}{p(s)}$$

(bude realizován jako jeden dynamický systém)

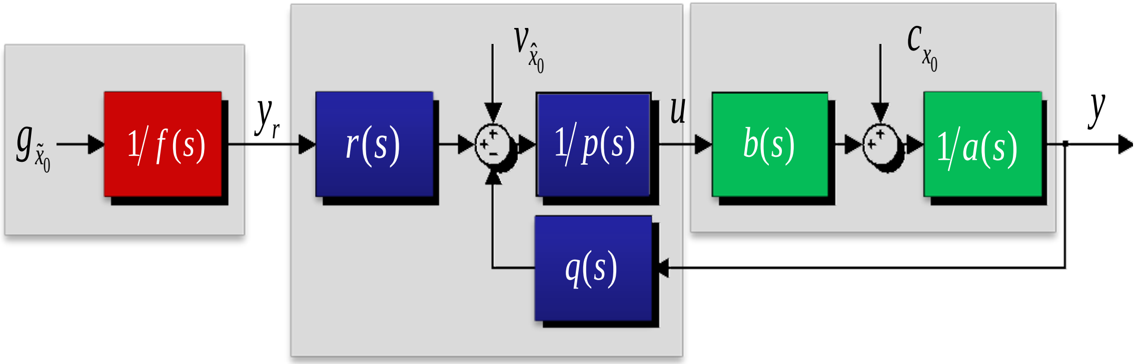
- regulační odchylka tu fyzicky neexistuje, jen jako zvláštní případ

Reference

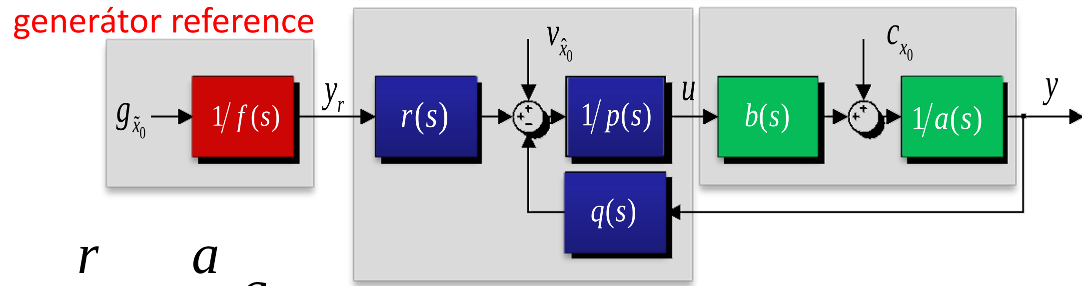
- zadána generátorem $y_r = \dfrac{g_{\tilde{x}_0}(s)}{f(s)}$ ($f(s)$ dáno, $g_{\tilde{x}_0}(s)$ neurčeno, libovolné)

Formulace úlohy

- chceme $u(t), e(t) \to 0$ ($u(s), e(s)$ stabilní)
- pro každou kombinaci $c_{x_0}, v_{\hat{x}_0}, g_{\tilde{x}_0}$
- ty jsou neurčené a nevyužijí se k návrhu



Asymptotické sledování se 2 stupni volnosti



$$u=\frac{a}{ap+bq}v_{\hat{x}_0}-\frac{q}{ap+bq}c_{x_0}+\frac{r}{ap+bq}\frac{a}{f}g_{\tilde{x}_0}$$

$$e=y_r-y=-\frac{b}{ap+bq}v_{\hat{x}_0}-\frac{p}{ap+bq}c_{x_0}+\left(1-\frac{br}{ap+bq}\right)\frac{1}{f}g_{\tilde{x}_0}$$

Řešení

Všechny vhodné regulátory splňují rovnice pro nějaké stabilní $m(s)$

$$a(s)p(s)+b(s)q(s)=m(s)$$

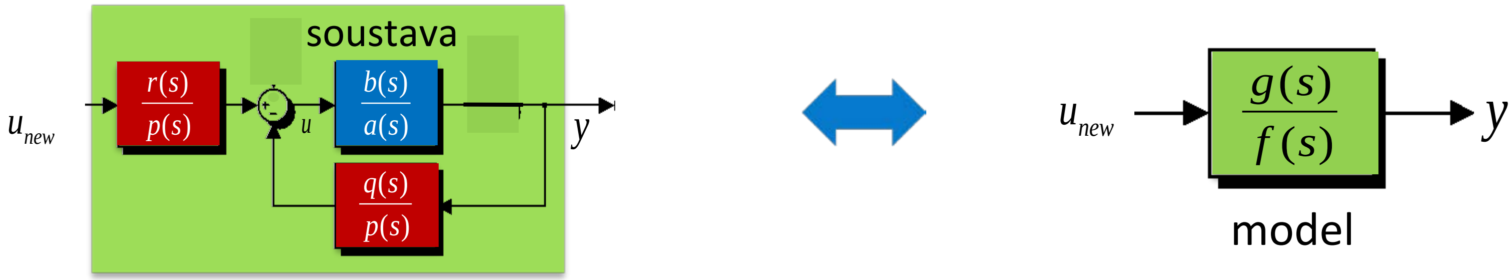
$$f^-(s)t(s)+b(s)r(s)=m(s)$$

Řešitelnost

1) $\gcd(a,b)$ stabilní; 2) $\gcd(f^-,b)=1$; 3) $f^-\mid a$.

Přizpůsobení soustavy modelu

- regulátorem chceme „přenos soustavy“ změnit na jiný přesně zadaný



Formulace (Exact model matching)

- Dána soustava, tj. $a(s), b(s)$ a požadovaný přenos (model), tj. $f(s), g(s)$
- Najdi regulátor, tj. $p(s), q(s), r(s)$ tak,
- aby se výsledný přenos rovnal požadovanému

Řešení

$$a(s)p(s)+b(s)q(s)=f(s)\bar{b}(s)t(s)$$
$$r(s)=\bar{g}(s)t(s)$$

Všechny vhodné regulátory splňují

- kde $\bar{b}(s)/\bar{g}(s)=b(s)/g(s)$ nesoudělné
- a $t(s)$ je libovolný polynomiální parametr