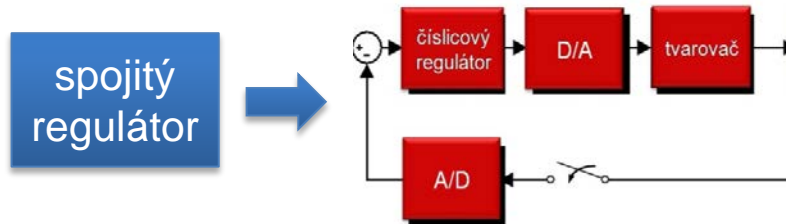


21 – Diskrétní modely spojitých systémů



Michael Šebek
Automatické řízení 2018



nazývá se také **aproximace**,
diskrétní ekvivalent,...

1. Pro spojité model soustavy navrhne spojité regulátor, přičemž vezmeme v úvahu, že bude soustava řízena diskrétně
2. Aproximujeme ho diskrétním/číslicovým systémem
3. Diskrétní analýzou, simulacemi a experimenty ověříme návrh

Pozor: Digitální implementace spojitého regulátoru je vždy jen **aproximace**, neboť číslicový regulátor pracuje jen se vzorky !

Metody aproximace spojitého regulátoru diskrétním

- Náhrada derivace diferencí
- Tustinova metoda
- Matched pole zeros – najdete v učebnici
- Matlab – CSTbx: funkce **c2d**



neboli lichoběžníková aproximace či bilineární transformace

- Vychází z numerické integrace odezvy lichoběžníkovou metodou
- Nahradíme

$$s \approx \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}, \text{ což odpovídá aproximaci řady} \quad z = e^{sh} \approx \frac{1+sh/2}{1-sh/2}$$

- Mnemotechnická pomůcka: $z = e^{sh} = \frac{e^{sh/2}}{e^{-sh/2}} \approx \frac{1+sh/2}{1-sh/2}$
- V Matlabu-CSTbx funkce: **c2d(f,h,'tustin')**

Obecný postup

- V přenosu spojitého regulátoru prostě nahradíme s výrazem podle zvolené metody
- Vhodné pro ruční počítání
- V Matlabu-CSTbx různá volní funkce: **c2d(f,h)**



Aproximace spojitých P, I a D regulátorů

- PID regulátor je zvláštním případem dynamické výstupní ZV a může být aproximován libovolnou z výše uvedených metod
- Na druhé straně je to často používaným speciální regulátor, a v literatuře najdeme mnoho speciálních aproximací
- Standardní aproximace jednotlivých členů jsou

P - bez aproximace

$$u(t) = Ke(t) \rightarrow u(s) = Ke(s) \rightarrow u(z) = Ke(z) \rightarrow u(k) = Ke(k)$$

I: přímá diference

$$u(t) = \frac{K}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \rightarrow u(s) = \frac{K}{T_I s} e(s) \rightarrow u(z) = \frac{K}{T_I} \frac{h}{z-1} e(z) \rightarrow$$

D: zpětná diference

$$\rightarrow u(k+1) = u(k) + \frac{Kh}{T_I} e(k)$$

$$u(t) = KT_D \dot{e}(t) \rightarrow u(s) = KT_D s e(s)$$

$$\rightarrow u(z) = KT_D \frac{z-1}{zh} e(z) \rightarrow u(k+1) = \frac{KT_D}{h} (e(k+1) - e(k))$$



- Aproximace celého PID regulátoru se pak často prostě složí

$$u(z) = K \left[1 + \frac{h}{T_I} \frac{1}{z-1} + \frac{T_D}{h} \frac{z-1}{z} \right] e(z)$$

Říká se jim **p**roporcionálně
sumačně **d**iferenční: **PSD**

- Jinou cestou je naopak aproximovat celý PID najednou

$$u(s) = K \left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right] e(s)$$



$$u(z) = K \left[1 + \frac{h}{T_I} \frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{h} \frac{z-1}{z} \right] e(z)$$

$$u(z) = K \left[1 + \frac{h}{2T_I} \frac{z+1}{z-1} + \frac{2T_D}{h} \frac{z-1}{z+1} \right] e(z)$$

- Podobným způsobem se aproximují složitější (ne-školní) verze PID regulátoru



- Když pro spojitou soustavu se stavovým modelem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

navrhne nejprve „spojitými“ metodami stavovou ZV

$$u(t) = Mu_c(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

musíme ji pro diskrétní implementaci také upravit

- aby lépe „seděly“ póly uzavřené smyčky a její chování
- Pro ZV vezmeme (přibližně)

$$\mathbf{K}_{dis} = \mathbf{K}(\mathbf{I} + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})h/2)$$

- Podobně přímou větev upravíme na

$$M_{dis} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{B}h/2)M$$

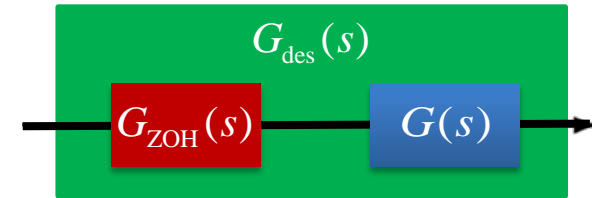


Spojité návrh jako příprava pro diskretní řízení

- Prvním krokem při metodě emulace (aproximace) je spojité návrh
- Při něm ale už můžeme vzít v úvahu, že konečné řešení bude diskretní
- Pro spojité návrh k soustavě přidáme „model tvarovacího členu“

Možnosti

- Nebrat v úvahu $G_{\text{ZOH}}(s) = 1 \rightarrow G_{\text{des}}(s) = G(s)$
- Lepší je $G_{\text{ZOH}}(s) = \frac{1 - e^{-sh}}{sh}$, ale to není racionální funkce.



- Aproximujeme (Padé 1. řádu) nahradí ZOH členem se zpožděním 1.řádu

$$e^{-sh} = \frac{1 - \frac{hs}{2}}{1 + \frac{hs}{2}}$$

$$\rightarrow G_{\text{ZOH}}(s) = \frac{1}{\frac{h}{2}s + 1}$$

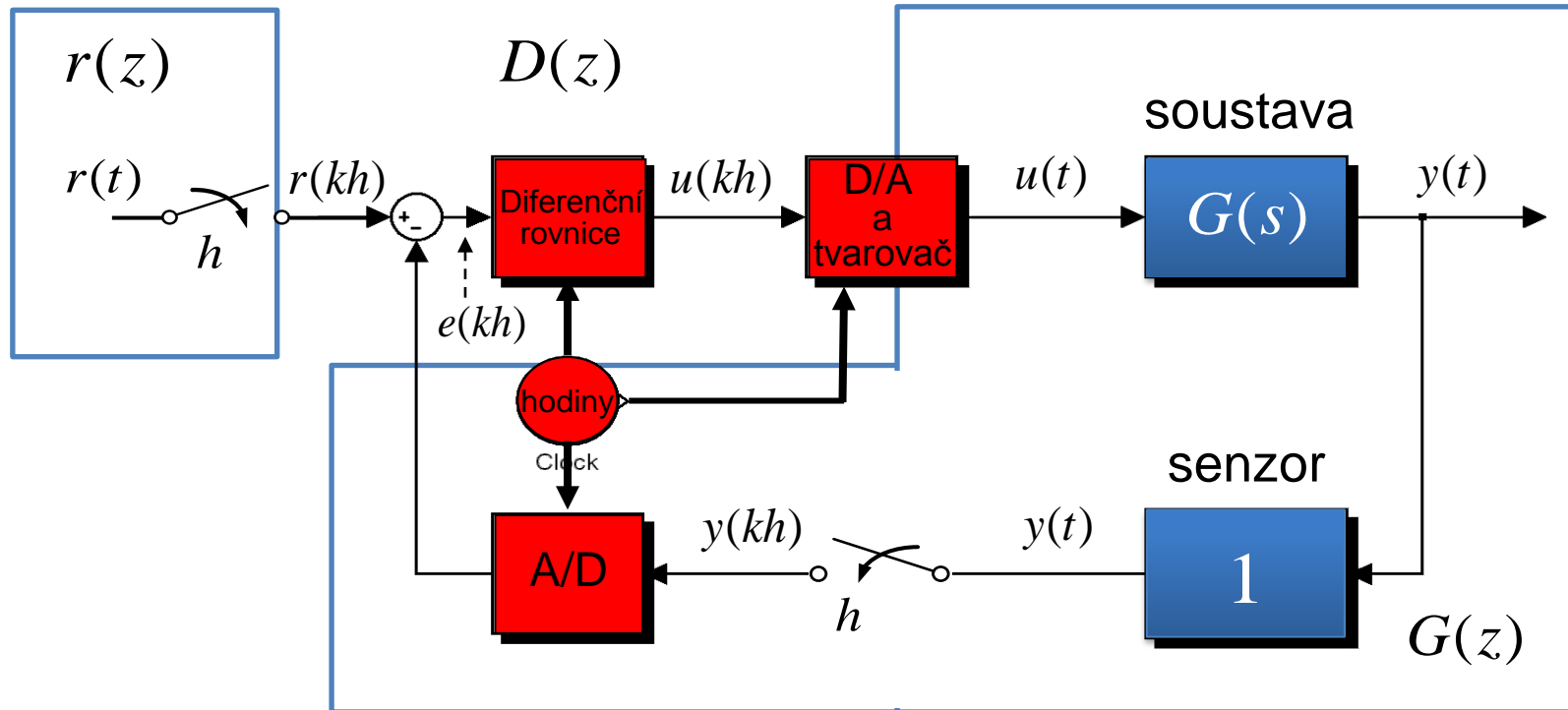
- Nebo bereme $G_{\text{ZOH}}(s) = e^{-sh/2}$ a aproximace téhož:

$$e^{-sh/2} \approx \frac{1 - hs/4}{1 + hs/4}, \quad e^{-sh/2} \approx \frac{(1 - hs/4n)^n}{(1 + hs/4n)^n}$$



Diskrétní model spojité soustavy

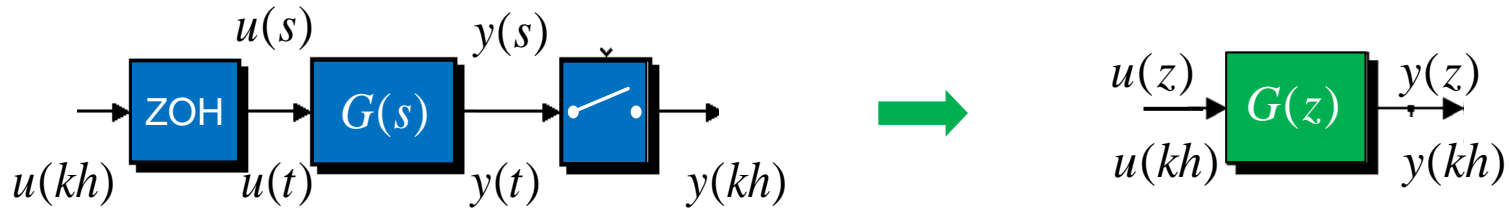
Automatické řízení - Kybernetika a robotika





Diskrétní popis soustavy - ZOH

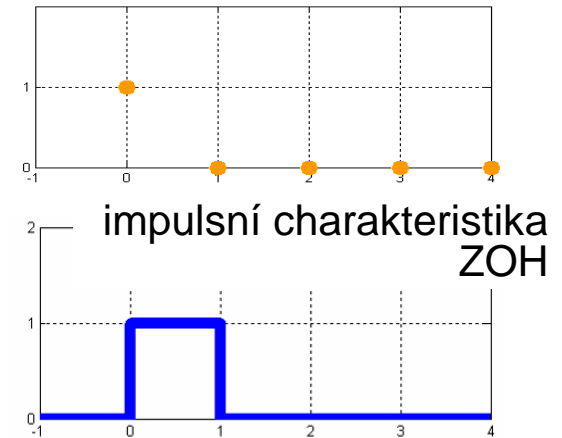
Diskrétní přenos soustavy + tvarovacího členu 0. řádu (Zero-Order Hold)



- diskrétní přenos je z-obraz diskrétní odezvy na diskrétní jednotkový puls
 $u(kh) = 1$ pro $k = 0$ a $u(kh) = 0$ pro $k \neq 0$
- odezva ZOH na tento signál je spojitý puls
 $u(t) = 1(t) - 1(t - h)$ s L-obrazem $\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-hs}$
- odezva (spojité) soustavy na tento spojitý signál je

$$Y(s) = (1 - e^{-hs}) \frac{G(s)}{s}$$

z čehož bychom vypočetli $y(t)$ a po vzorkování $y(kh)$

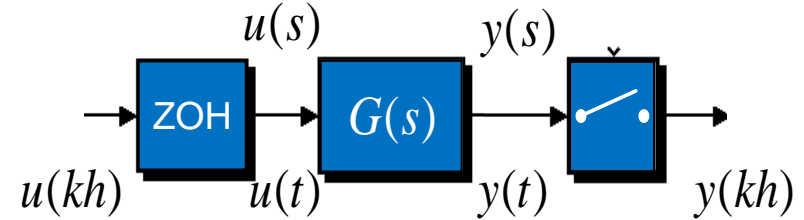




- Tedy shrnuto

označíme takto

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z}\{y(kT)\} \\
 &= \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}\} = \mathcal{Z}\{Y(s)\} \\
 &= \mathcal{Z}\left\{(1 - e^{-hs}) \frac{G(s)}{s}\right\}
 \end{aligned}$$



- Výsledek rozdělíme na rozdíl dvou částí:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{e^{-hs} \frac{G(s)}{s}\right\}$$



- Druhý člen přesně o jednu periodu zpožděný první člen, tedy

$$\mathcal{Z}\left\{e^{-hs} \frac{G(s)}{s}\right\} = z^{-1} \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

- Takže hledaný diskretní přenos je

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

```

c2d(G,h,'zoh')
c2d(G,h)

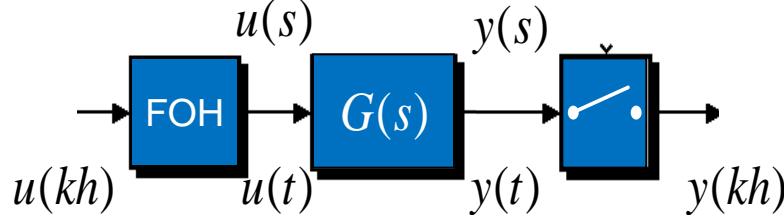
```



Diskrétní popis soustavy: FOH

Diskrétní přenos soustavy + tvarovacího členu 1. řádu (First-Order Hold)

- nekauzální FOH, trojúhelníkový hold



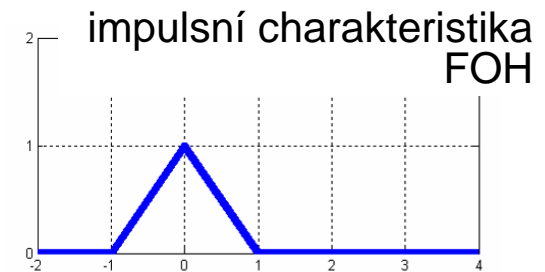
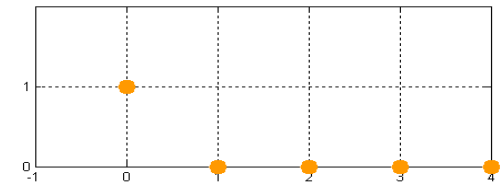
- diskrétní přenos je z-obraz diskrétní odezvy na diskrétní jednotkový puls
- odezva FOH na tento signál je spojitý puls

$$u(t) = \frac{t}{h}1(t+h) - 2\frac{t}{h}1(t) + \frac{t}{h}1(t-h)$$

- s L-obrazem $\frac{e^{hs} - 2 + e^{-hs}}{hs^2}$

- odezva (spojité) soustavy na tento spojitý signál je $Y(s) = \frac{e^{hs} - 2 + e^{-hs}}{h} \frac{G(s)}{s^2}$

- z čehož bychom vypočetli $y(t)$ a po vzorkování $y(kh)$





Diskrétní popis soustavy: FOH

- Tedy shrnuto

$$G(z) = \mathcal{Z}\{y(kh)\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}\} = \mathcal{Z}\{y(s)\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{hs} - 2 + e^{-hs}}{h} \frac{G(s)}{s^2}\right\}$$

- Výsledek rozdělíme na součet tří částí:

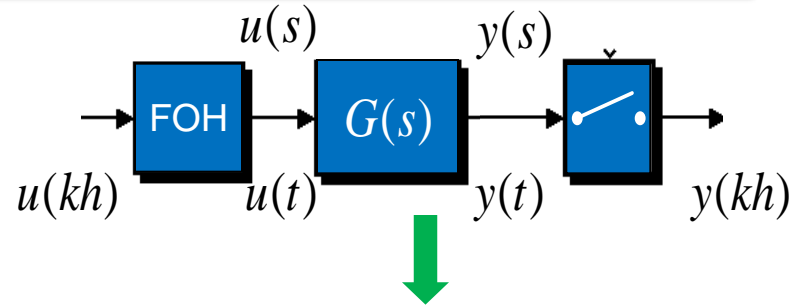
$$G(z) = \frac{1}{h} \left(\mathcal{Z}\left\{e^{hs} \frac{G(s)}{s^2}\right\} - 2\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\} + \mathcal{Z}\left\{e^{-hs} \frac{G(s)}{s^2}\right\} \right)$$

- první člen o jednu periodu předbíhá druhý, třetí je o jednu zpožděný

$$G(z) = \frac{z - 2 + z^{-1}}{h} \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\} = \frac{z^2 - 2z + 1}{hz} \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}$$

- Takže hledaný diskretní přenos je

$$G(z) = \frac{(z-1)^2}{hz} \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}$$



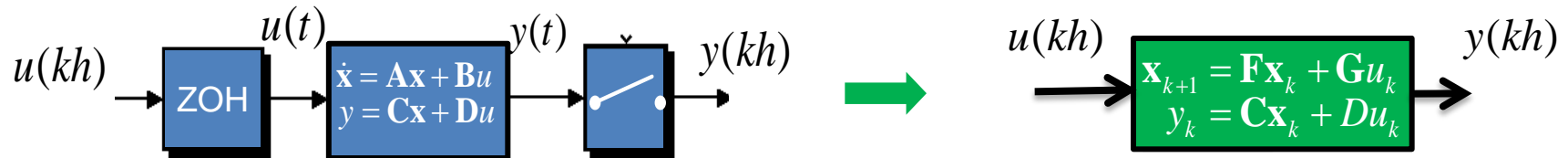
V Matlabu

```
c2d(G,h,'foh')
```



Diskretizace stavového modelu se ZOH

- Diskrétní stavový model vzorkované spojité soustavy s tvarovacím členem 0. řádu



- je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{k+1}) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{G}u(t_k) \\ y(t_k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t_k) + Du(t_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= e^{A h} \\ \mathbf{G} &= \left(\int_0^h e^{A v} dv \right) \mathbf{B} \end{aligned}$$

- V Matlabu+CSTbx: funkce `c2d` aplikovaná na objekt `ss`
- Speciálně maticová exponenciála: např. `expm`
- Odvození a další metody jsou v příkladových slajdech