21 – Diskrétní modely spojitých systémů

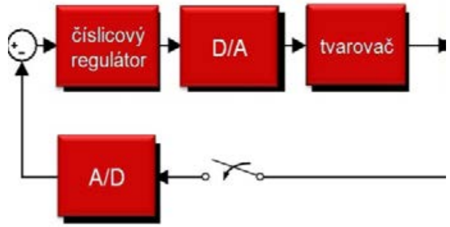
Michael Šebek

Automatické řízení 2017

23-4-17

Metoda emulace

spojitý regulátor



nazývá se také aproximace, diskrétní ekvivalent,…

1. Pro spojitý model soustavy navrhneme spojitý regulátor, přičemž vezmeme v úvahu, že bude soustava řízena diskrétně
2. Aproximujeme ho diskrétním/číslicovým systémem
3. Diskrétní analýzou, simulacemi a experimenty ověříme návrh

Pozor: Digitální implementace spojitého regulátoru je vždy jen aproximace, neboť číslicový regulátor pracuje jen se vzorky !

Metody aproximace spojitého regulátoru diskrétním

- Náhrada derivace diferencí
- Tustinova metoda
- Matched pole zeros – najdete v učebnici
- Matlab – CSTbx: funkce **c2d**

Jednoduché metody: numerická integrace

Náhrada derivace přímou diferencí

(Eulerova metoda, přímá obdélníková aproximace)

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \quad \xrightarrow{\text{formálně}} \quad sx \approx \frac{z-1}{h}x \quad \xrightarrow{\text{nahradíme}} \quad s \approx \frac{z-1}{h}$$

Tomu odpovídá aproximace řady $z = e^{sh} \approx 1 + sh$

Náhrada derivace zpětnou diferencí (zpětná obdélníková aproximace)

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t)-x(t-h)}{h} \quad \Rightarrow \quad sx \approx \frac{z-1}{zh}x \quad \Rightarrow \quad s \approx \frac{z-1}{zh}$$

Tomu odpovídá aproximace řady $z = e^{sh} \approx \dfrac{1}{1-sh}$

Tustinova metoda

neboli lichoběžníková aproximace či bilineární transformace

- Vychází z numerické integrace odezvy lichoběžníkovou metodou
- Nahradíme $s \approx \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}$, což odpovídá aproximaci řady $z = e^{sh} \approx \frac{1+sh/2}{1-sh/2}$
- Mnemotechnická pomůcka: $z = e^{sh} = \dfrac{e^{sh/2}}{e^{-sh/2}} \approx \dfrac{1+sh/2}{1-sh/2}$
- V Matlabu-CSTbx funkce: `c2d(f,h,'tustin')`

Obecný postup

- V přenosu spojitého regulátoru prostě nahradíme s výrazem podle zvolené metody
- Vhodné pro ruční počítání
- V Matlabu-CSTbx různá volní funkce: `c2d(f,h)`

Aproximace spojitých P, I a D regulátorů

- PID regulátor je zvláštním případem dynamické výstupní ZV a může být aproximován libovolnou z výše uvedených metod
- Na druhé straně je to často používaným speciální regulátor, a v literatuře najdeme mnoho speciálních aproximací
- Standardní aproximace jednotlivých členů jsou

P - bez aproximace

$$u(t)=Ke(t) \Rightarrow u(s)=Ke(s) \Rightarrow u(z)=Ke(z) \Rightarrow u(k)=Ke(k)$$

I: přímá diference

$$u(t)=\frac{K}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau \Rightarrow u(s)=\frac{K}{T_I s}e(s) \Rightarrow u(z)=\frac{K}{T_I}\frac{h}{z-1}e(z) \Rightarrow u(k+1)=u(k)+\frac{Kh}{T_I}e(k)$$

D: zpětná diference

$$u(t)=KT_D\dot{e}(t) \Rightarrow u(s)=KT_D se(s)$$

$$\Rightarrow u(z)=KT_D\frac{z-1}{zh}e(z) \Rightarrow u(k+1)=\frac{KT_D}{h}\big(e(k+1)-e(k)\big)$$

Aproximace celého PID

- Aproximace celého PID regulátoru se pak často prostě složí

$$u(z) = K\left[1 + \frac{h}{T_I}\frac{1}{z-1} + \frac{T_D}{h}\frac{z-1}{z}\right]e(z)$$

Říká se jim proporcionálně sumačně diferenční: PSD

- Jinou cestou je naopak aproximovat celý PID najednou

$$u(s) = K\left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right]e(s)$$

zpět. dif.

$$u(z) = K\left[1 + \frac{h}{T_I}\frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{h}\frac{z-1}{z}\right]e(z)$$

Tustin

$$u(z) = K\left[1 + \frac{h}{2T_I}\frac{z+1}{z-1} + \frac{2T_D}{h}\frac{z-1}{z+1}\right]e(z)$$

- Podobným způsobem se aproximují složitější (ne-školní) verze PID regulátoru

Aproximace spojité stavové ZV

- Když pro spojitou soustavu se stavovým modelem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,\ y = \mathbf{C}x$$

navrhneme nejprve „spojitými“ metodami stavovou ZV

$$u(t) = Mu_C(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

musíme ji pro diskrétní implementaci také upravit

- aby lépe „seděly“ póly uzavřené smyčky a její chování

- Pro ZV vezmeme (přibližně)

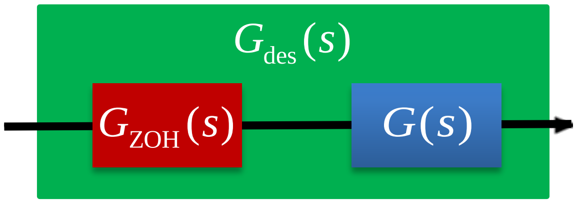
$$\mathbf{K}_{dis} = \mathbf{K}\left(\mathbf{I} + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})h/2\right)$$

- Podobně přímou větev upravíme na

$$M_{dis} = \left(I - \mathbf{K}\mathbf{B}\,h/2\right)M$$

Spojitý návrh jako příprava pro diskrétní řízení

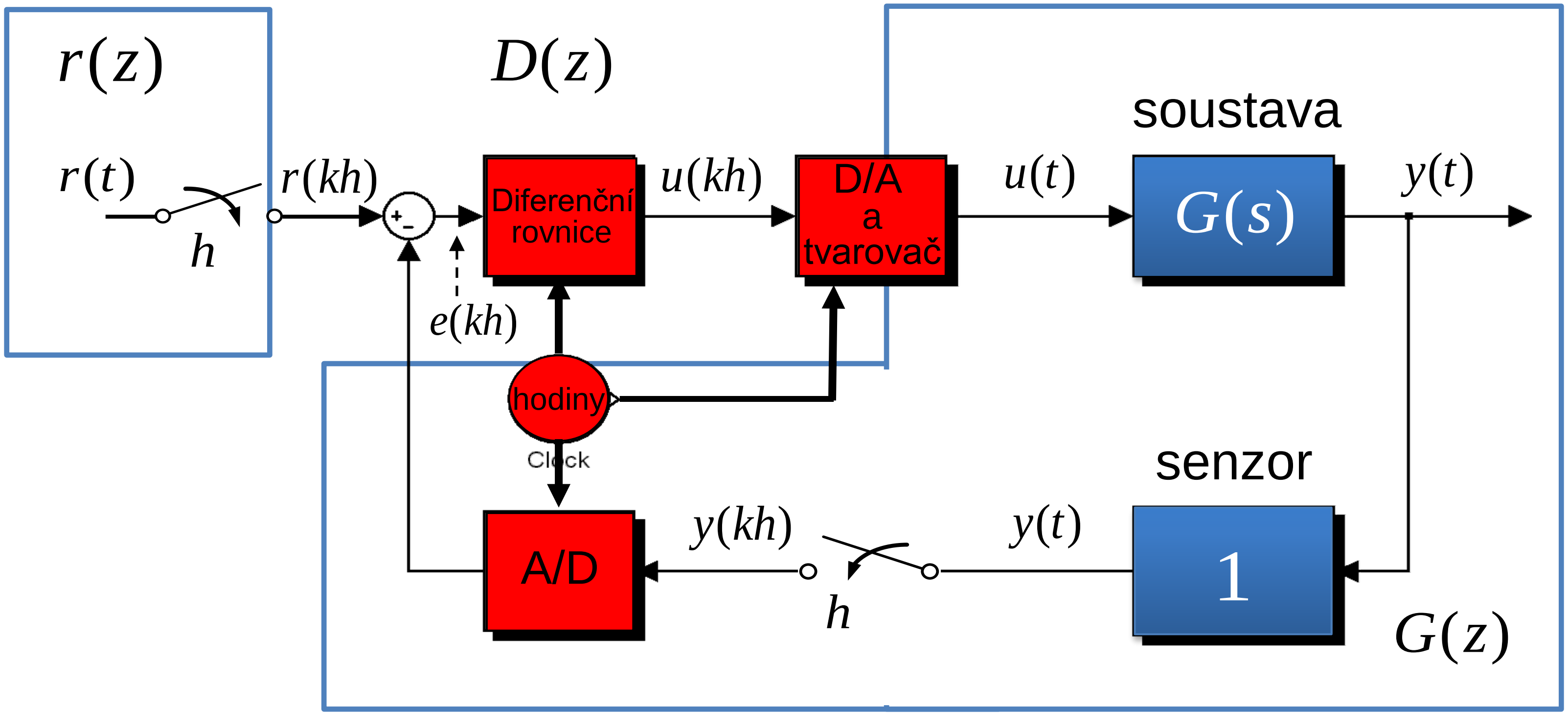
- První krokem při metodě emulace (aproximace) je spojitý návrh
- Při něm ale už můžeme vzít v úvahu, že konečné řešení bude diskrétní
- Pro spojitý návrh k soustavě přidáme „model tvarovacího členu“



Možnosti

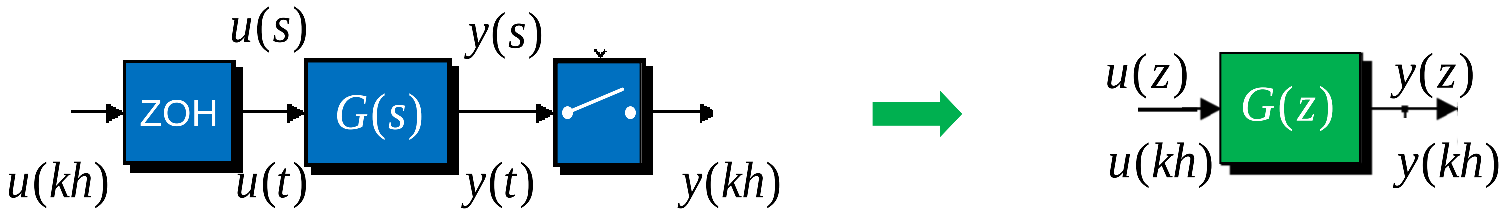
- Nebrat v úvahu $G_{\mathrm{ZOH}}(s)=1 \rightarrow G_{\mathrm{des}}(s)=G(s)$
- Lepší je $\boxed{G_{\mathrm{ZOH}}(s)=\dfrac{1-e^{-sh}}{sh}}$, ale to není racionální funkce.
- Aproximujeme (Padé 1. řádu) nahradí ZOH členem se zpožděním 1.řádu $e^{-sh}=\dfrac{1-\dfrac{hs}{2}}{1+\dfrac{hs}{2}} \rightarrow \boxed{G_{\mathrm{ZOH}}(s)=\dfrac{1}{\dfrac{h}{2}s+1}}$
- Nebo bereme $\boxed{G_{\mathrm{ZOH}}(s)=e^{-sh/2}}$ a aproximace téhož: $e^{-sh/2}\approx\dfrac{1-hs/4}{1+hs/4},\; e^{-sh/2}\approx\dfrac{(1-hs/4n)^n}{(1+hs/4n)^n}$

Diskrétní model spojité soustavy



Diskrétní popis soustavy - ZOH

Diskrétní přenos soustavy + tvarovacího členu 0. řádu (Zero-Order Hold)

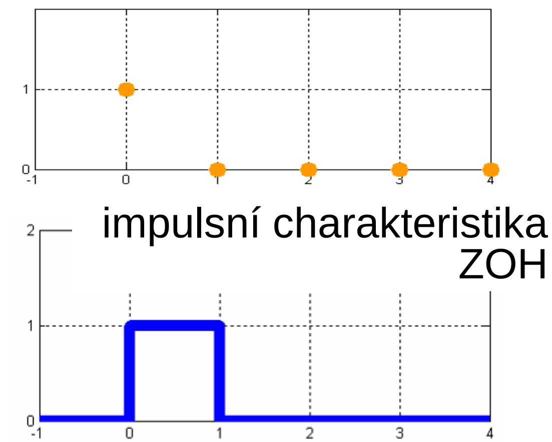


- diskrétní přenos je z-obraz diskrétní odezvy na diskrétní jednotkový puls

  $u(kh) = 1$ pro $k = 0$ a $u(kh) = 0$ pro $k \neq 0$

- odezva ZOH na tento signál je spojitý puls

  $u(t) = 1(t) - 1(t-h)$ s L-obrazem $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s} e^{-hs}$



- odezva (spojité) soustavy na tento spojitý signál je

$$Y(s) = \left(1 - e^{-hs}\right) \frac{G(s)}{s}$$

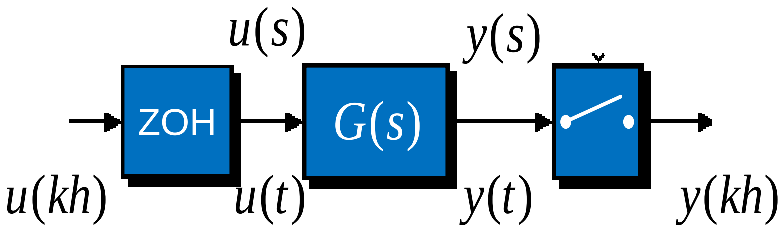
z čehož bychom vypočetli $y(t)$ a po vzorkování $y(kh)$

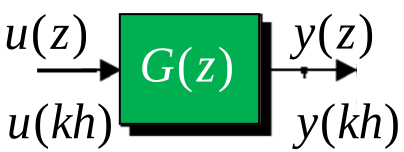
Diskrétní popis soustavy

- Tedy shrnuto

označíme takto

$$G(z)=\mathcal{Z}\{y(kT)\}$$
$$=\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}\}=\mathcal{Z}\{Y(s)\}$$
$$=\mathcal{Z}\left\{(1-e^{-hs})\frac{G(s)}{s}\right\}$$





- Výsledek rozdělíme na rozdíl dvou částí:

$$G(z)=\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}-\mathcal{Z}\left\{e^{-hs}\frac{G(s)}{s}\right\}$$

- Druhý člen přesně o jednu periodu zpožděný první člen, tedy

$$\mathcal{Z}\left\{e^{-hs}\frac{G(s)}{s}\right\}=z^{-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

- Takže hledaný diskrétní přenos je

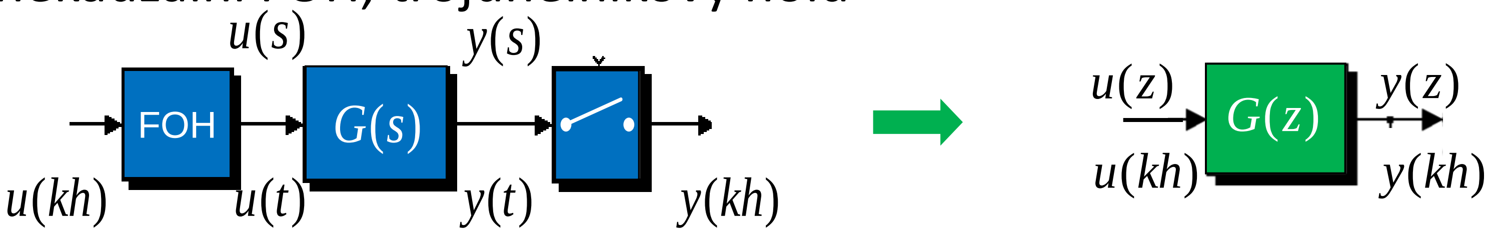
$$\boxed{G(z)=(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}$$

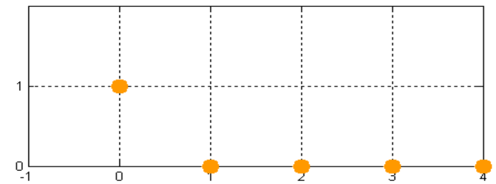
```
c2d(G,h,'zoh')
c2d(G,h)
```

Diskrétní popis soustavy: FOH

Diskrétní přenos soustavy + tvarovacího členu 1. řádu (First-Order Hold)

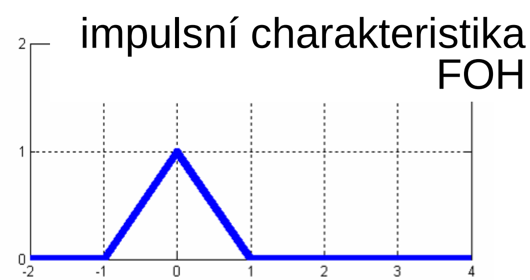
- nekauzální FOH, trojúhelníkový hold





- diskrétní přenos je z-obraz diskrétní odezvy na diskrétní jednotkový puls
- odezva FOH na tento signál je spojitý puls

$$u(t) = \frac{t}{h}1(t+h) - 2\frac{t}{h}1(t) + \frac{t}{h}1(t-h)$$



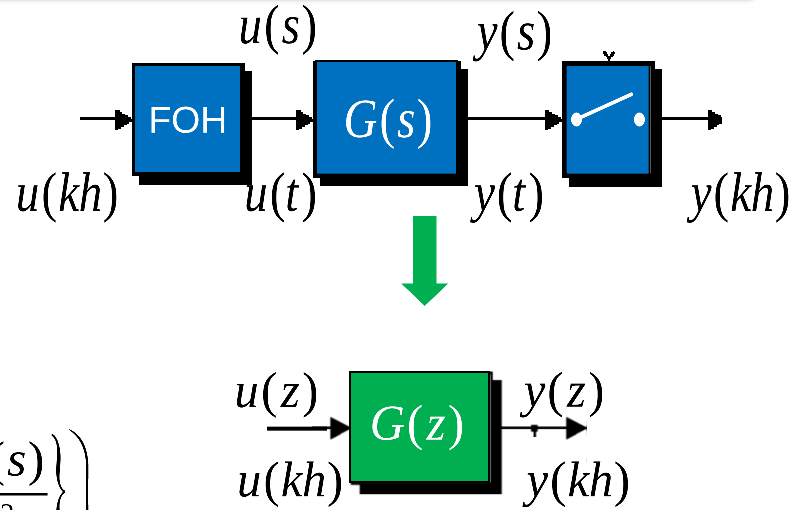
- s L-obrazem $\quad \dfrac{e^{hs} - 2 + e^{-hs}}{hs^2}$
- odezva (spojité) soustavy na tento spojitý signál je $\quad Y(s) = \dfrac{e^{hs} - 2 + e^{-hs}}{h} \dfrac{G(s)}{s^2}$
- z čehož bychom vypočetli $y(t)$ a po vzorkování $y(kh)$

Diskrétní popis soustavy: FOH

- Tedy shrnuto

$$G(z) = \mathcal{Z}\{y(kh)\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}\} = \mathcal{Z}\{y(s)\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{hs} - 2 + e^{-hs}}{h}\frac{G(s)}{s^2}\right\}$$



- Výsledek rozdělíme na součet tří částí:

$$G(z) = \frac{1}{h}\left(\mathcal{Z}\left\{e^{hs}\frac{G(s)}{s^2}\right\} - 2\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\} + \mathcal{Z}\left\{e^{-hs}\frac{G(s)}{s^2}\right\}\right)$$

- první člen o jednu periodu předbíhá druhý, třetí je o jednu zpožděný

$$G(z) = \frac{z - 2 + z^{-1}}{h}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\} = \frac{z^2 - 2z + 1}{hz}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}$$

- Takže hledaný diskrétní přenos je

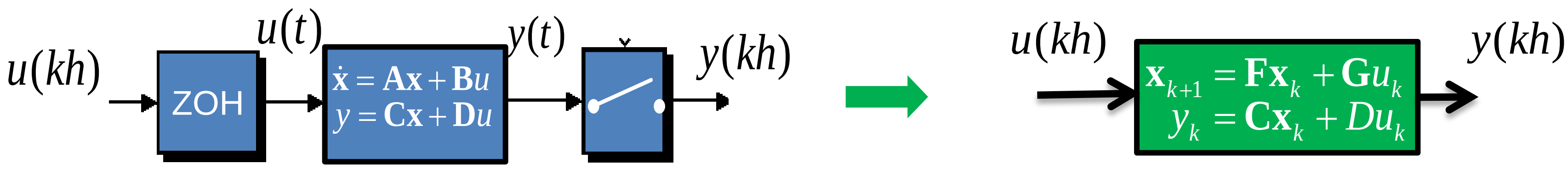
$$\boxed{G(z) = \frac{(z-1)^2}{hz}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}}$$

V Matlabu

```
c2d(G,h,'foh')
```

Diskretizace stavového modelu se ZOH

- Diskrétní stavový model vzorkované spojité soustavy s tvarovacím členem 0. řádu



- je

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{G}u(t_k)$$
$$y(t_k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t_k) + Du(t_k)$$

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}h}$$
$$\mathbf{G} = \left(\int_0^h e^{\mathbf{A}v}\,dv\right)\mathbf{B}$$

- V Matlabu+CSTbx: funkce **`c2d`** aplikovaná na objekt **`ss`**
- Speciálně maticová exponenciála: např. **`expm`**
- Odvození a další metody jsou v příkladových slajdech