

23 - Diskrétní systémy



Michael Šebek
Automatické řízení 2018



Diskrétní čas: z podstaty, z měření či z pohonu

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Otáčející se radar - měření polohy cíle jednou za otáčku radaru

- motivace v počátcích historie diskrétních modelů

Analytické měřicí nástroje - off-line

- hmotnostní spektrometr, chromatograf, výroba fotograf. filmů

Ekonomické systémy - průběžné, ale účtují (sčítají) se za den, měsíc, ...

- zůstatek na účtu, zisk, náklady, kurs, cena akcií, výroba, skladu

Paprsek urychlovače - vzorkování v měření i aktuátoru

- CERN – Nobelovka za objev bosonů částic W a Z

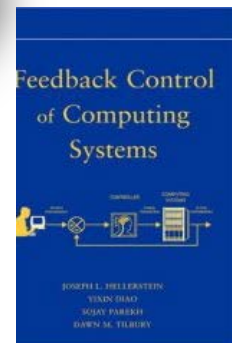
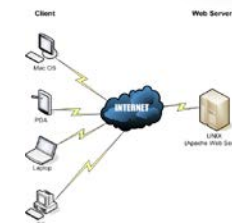
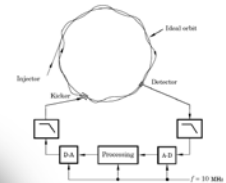
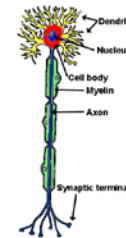
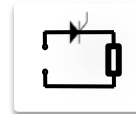
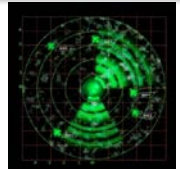
Pulzní systémy nebo aktuátory – jednodušší popsat diskrétně

- výkonová elektronika s tyristory

- biologické systémy, nervy, mozek

Aplikace v počítačových oborech

- řízení web či emailového serverů,
řízení front, detekce přetížení routeru,
media streaming



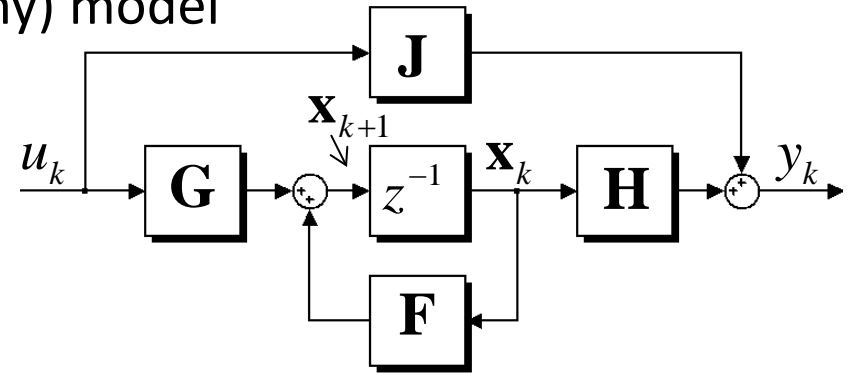


Diskrétní stavový model a jeho řešení

- Diskrétní stavový (v čase neproměnný) model

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{J}\mathbf{u}_k$$



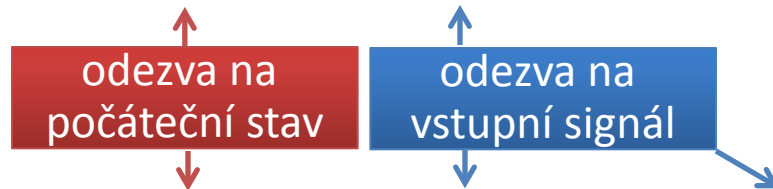
- Řešení

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}\mathbf{x}_0 + \mathbf{G}\mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}\mathbf{x}_1 + \mathbf{G}\mathbf{u}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{F}\mathbf{x}_0 + \mathbf{G}\mathbf{u}_0) + \mathbf{G}\mathbf{u}_1 = \mathbf{F}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{u}_0 + \mathbf{G}\mathbf{u}_1$$

⋮

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{F}^{k-j-1} \mathbf{G}\mathbf{u}_j$$



$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{F}^k \mathbf{x}_0 + \mathbf{H} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{F}^{k-j-1} \mathbf{G}\mathbf{u}_j + \mathbf{J}\mathbf{u}_k$$

Stavová matice
přechodu:

$$\Phi(k) = \mathbf{F}^k$$



- Stavový popis diskretního systému

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{J}\mathbf{u}_k$$

- Vnější popis v z

$$\mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{J} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

$$z\mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{c_{x_0}(z)}{a(z)}$$

- Vnější popis v $z^{-1} = d$

$$\mathbf{H}(\mathbf{I} - d\mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}d + \mathbf{J} = \frac{\hat{b}(d)}{\hat{a}(d)}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{I} - d\mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{\hat{c}_{x_0}(d)}{\hat{a}(d)}$$

z -Transformace

$$\mathcal{Z}\{x\} = x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\{x_{k+1}\} = zx(z) - zx_0$$

pozor

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{J} = \frac{b(z)}{a(z)} \\ z\mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{c_{x_0}(z)}{a(z)} \end{array} \right\} y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} u(z) + \frac{c_{x_0}(z)}{a(z)}$$

přenos

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{H}(\mathbf{I} - d\mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}d + \mathbf{J} = \frac{\hat{b}(d)}{\hat{a}(d)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{I} - d\mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{\hat{c}_{x_0}(d)}{\hat{a}(d)} \end{array} \right\} y(d) = \frac{\hat{b}(d)}{\hat{a}(d)} u(d) + \frac{\hat{c}_{x_0}(d)}{\hat{a}(d)}$$

- Stavové realizace se z přenosu najdou stejně jako ve spojitém případě



$$b(z)/a(z) : \deg_z a(z) = n, \deg_z b(z) = m$$

Přenos v z :

- „Fyzikální“ diskretní přenos v z bývá striktně ryzí $y(z) = 1 \times u(z)$
- pro $n = m$ reaguje okamžitě (počítá ∞ rychle) $\longrightarrow y(k) = u(k)$
- pro $n < m$ předpovídá budoucnost (nekauzálnost) $\longrightarrow y(z) = zu(z)$
 $y(k) = u(k+1)$

Do přenosu v $d = z^{-1}$ se to promítne jinak $\hat{b}(d)/\hat{a}(d)$

- Ryzosti odpovídá kauzální jmenovatel $\hat{a}(0) \neq 0$
- Striktní ryzosti navíc ještě $\hat{b}(0) = 0$

Řád z přenosu se pozná takto:

- U přenosu v z : řád systému = stupeň jmenovatele (jako u spojitého)
- U přenosu v d : řád systému = $\max(\deg_d \hat{a}(d), \deg_d \hat{b}(z))$

DC zesílení $\frac{b(z)}{a(z)} = \frac{\hat{b}(z^{-1})}{\hat{a}(z^{-1})} \Rightarrow k_{DC} = \frac{b(1)}{a(1)} = \frac{\hat{b}(1)}{\hat{a}(1)}$



- mezi póly obrazů spojitého a vzorkovaného signálu, např. impulzní odezvy, platí

$$z = e^{sh} = e^{(\alpha + j\omega)h} = e^{\alpha h} (\cos \omega h + j \sin \omega h)$$

- z je bezrozměrné, s (operátor derivace) má rozměr 1/[čas]
- **mez stability**: imaginární ose odpovídá jednotková kružnice

$$z = e^{j\omega h} = e^{j2\pi\omega/\omega_s} = e^{j\pi\omega/\omega_N}$$

- Jedna celá kružnice odpovídá intervalu $\omega \in [0, \omega_s]$, $\omega_s = 2\pi/h = 2\omega_N$
vyšší frekvence jsou překryté odpovídajícími nižšími (aliasing)
- záporná reálná osa reprezentuje Nyquistovy frekvence

$$\alpha + j\omega_N, \omega_N = \omega_s/2 = \pi/h$$

konkrétně $\alpha < 0 \rightarrow (-1, 0)$, $\alpha > 0 \rightarrow (-\infty, -1)$,

- **reálné ose** odpovídá nezáporná reálná osa: $R^+ \rightarrow [1, \infty)$, $R^- \rightarrow (0, 1)$
- **dominantní polohy**: okolí bodu $s = 0$ odpovídá okolí bodu $z = 1$
- **nevýznamné polohy**: reálným polohám „hodně vlevo“ odpovídají polohy „hodně blízko 0 zprava“

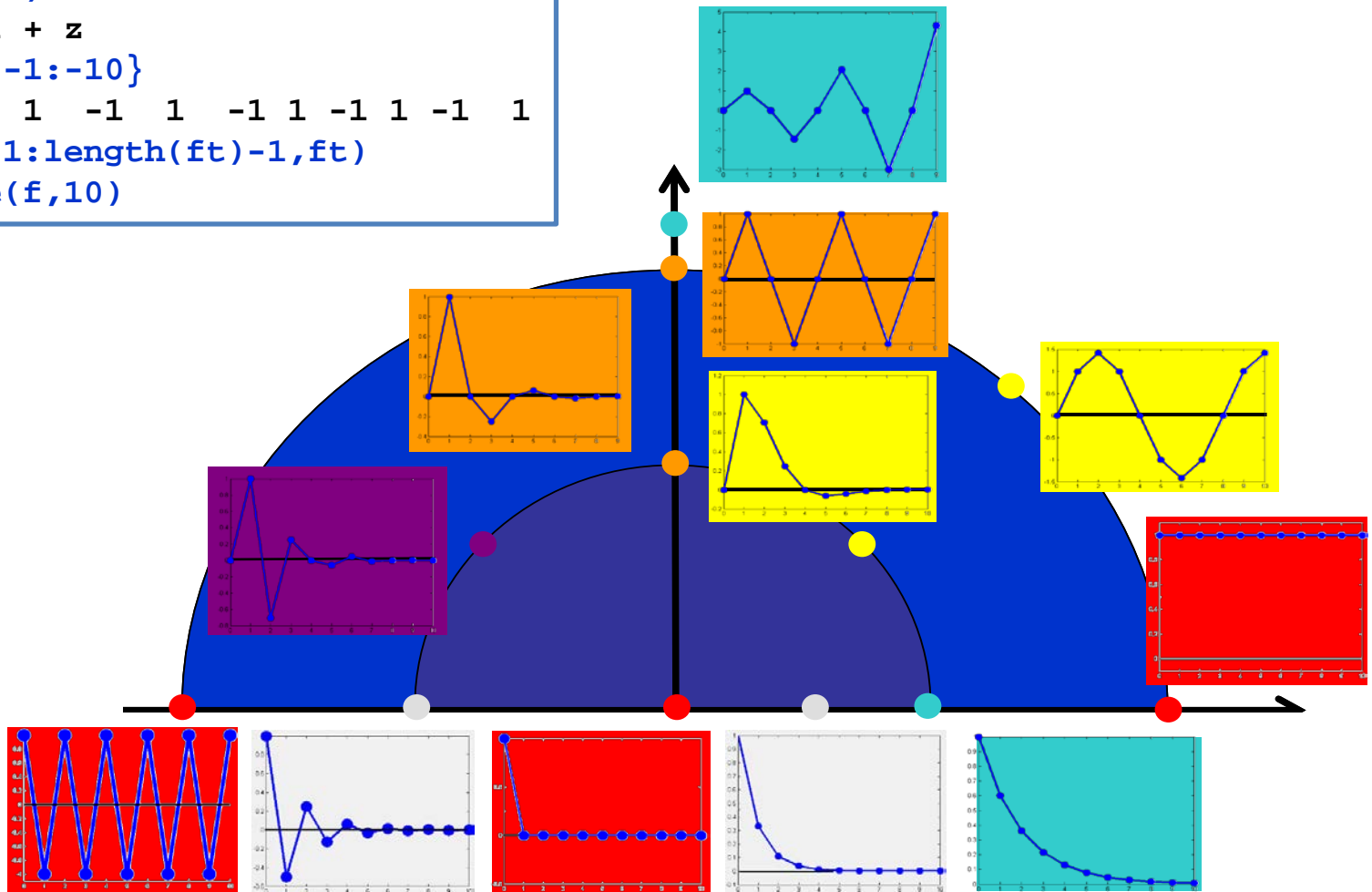




Vliv polohy pólů

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

```
>> f=z/(1+z)
f = z / 1 + z
>> ft=f{0:-1:-10}
ft = 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1
>> plot(0:1:length(ft)-1,ft)
>> picture(f,10)
```

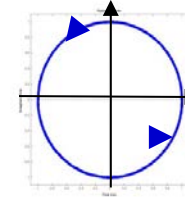




Diskrétní Bodeho graf

- Komplexní exponenciála je periodická funkce s periodou 2π a uvnitř periody symetrická

$$e^{j\omega h} = \cos \omega h + j \sin \omega h$$



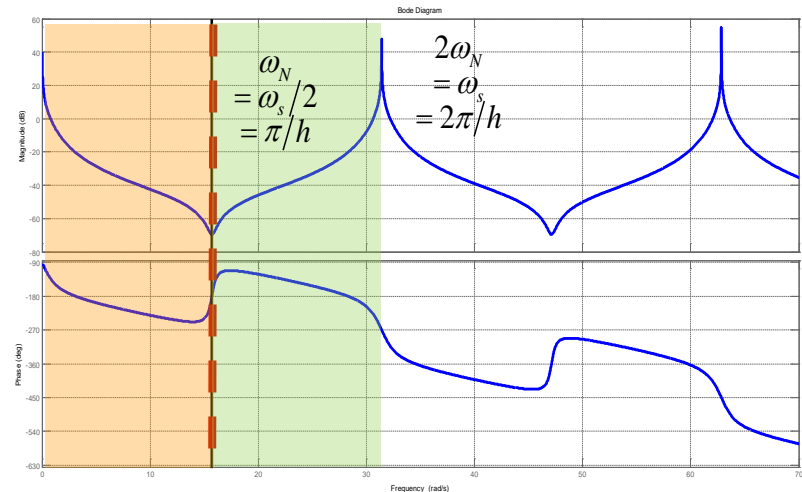
$$\begin{aligned} |e^{j\omega h}| &= 1 \\ \angle e^{j\omega h} &= \\ &= \omega h [\text{rad}] \end{aligned}$$

- Amplituda frekvenčního přenosu $G(z) = G(e^{j\omega h})$ je periodická funkce ω s periodou $0 \leq \omega \leq \omega_N = \omega_s/2 = \pi/h$ a uvnitř periody je symetrická (při lineárním měřítku ω) Fáze je „posunutě periodická a antisymetrická“
- Graf proto kreslíme jen pro

$$\omega_s = 2\omega_N = 2\pi/h$$

tedy na horní polovině kružnice

- Nelze ho kreslit pomocí asymptot
- Vzorkování + tvarování způsobuje přídatné fázové zpoždění ($e^{-\omega h/2}$)



$$\Delta\varphi = \angle G(j\omega) - \angle G_z(j\omega) = \frac{\omega h}{2} [\text{rad}] = \frac{180}{2\pi} \omega h [\text{deg}] \approx 29 \omega h [\text{deg}]$$



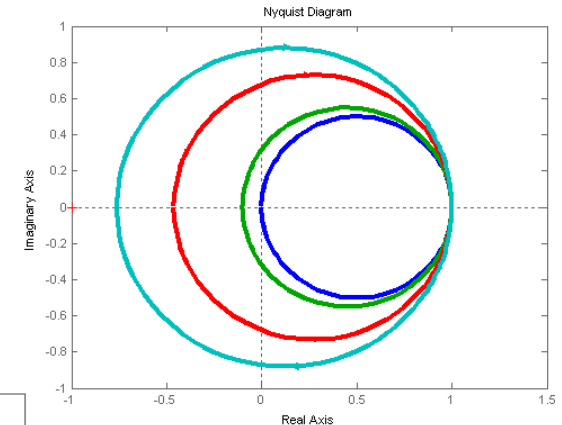
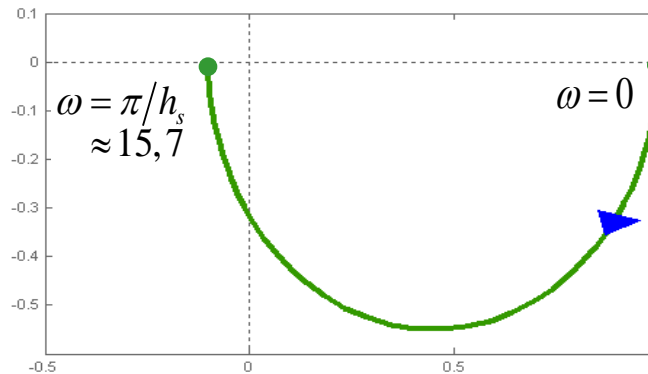
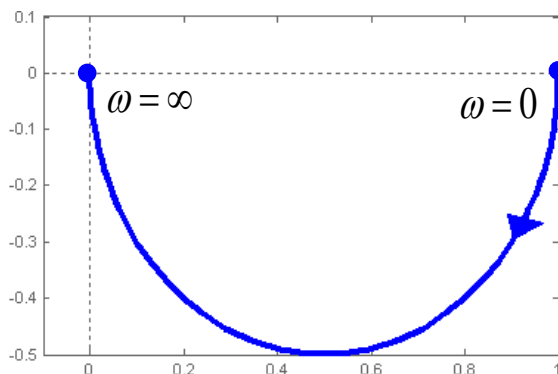
Diskrétní Nyquistův graf

- $G(z) = G(e^{j\omega h})$ je periodická funkce ω s periodou $\omega_s = 2\omega_N = 2\pi/h$
- proto Diskrétní Nyquistův graf $G(e^{j\omega h})$ často kreslíme jen pro $0 \leq \omega \leq \omega_N = \omega_s/2 = \pi/h$ (na horní polovině kružnice)
- Control System Tbx ho (default) kreslí na celé kružnici $-\omega_N \leq \omega \leq \omega_N$

Příklad

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

```
G=1/(1+s);
nyquist(tf(G),c2d(tf(G),0.2),
c2d(tf(G),1),c2d(tf(G),2))
```



```
Gz=c2d(tf(G),0.2),
nyquist(Gz)
Transfer function:
  0.1813
-----
z - 0.8187
Sampling time: 0.2
```



Diskrétní Nyquistovo kritérium

Na rozdíl od spojitého případu

nestabilita je vně jednotkové kružnice, není jednoduché obkroužit konturou, proto naopak obkroužíme oblast stability !

Uvažujeme L striktně ryzí $\rightarrow H(z) = 1 + L(z)$ má stejně nul a pólů $= n$

Označíme

Z ... počet nestabilních CL pólů

P ... počet nestabilních OL pólů

N ... počet obkroužení kritického bodu -1 ve stejném směru jako té oblasti (zde obvykle proti hodinovým ručičkám)



Z principu argumentu plyne:

$$N = (n - Z) - (n - P) = P - Z \quad \rightarrow$$

CL systém má $Z = P - N$ nestabilních pólů

Nyquistovo kritérium stability:

CL systém je stabilní $\leftrightarrow P = N$ (a to proti ručičkám)

Zvláštní případ:

Je-li OL systém stabilní, pak je i CL systém stabilní

\leftrightarrow Nyquistův graf $L(s)$ neobkrouží kritický bod -1

spojité - pro srovnání

$$N = Z - P$$

$$Z = N + P$$

$$P = -N$$

ale také proti hod.ručičkám



Diskrétní verze Bodeho integrálního omezení

Sung a Hara (1988)

Pro systém, kde $L(z)$ má n_p nestabilních pólů $p_i = r_i e^{j\phi_i}$, $r_i > 1$ platí omezení

$$\int_0^\pi \ln |S(e^{j\omega})| d\omega = \pi \sum_0^{n_p} \ln r_i$$

srovnej spojité případě

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_0^{n_p} \operatorname{Re} p_i$$

Rozdíly proti spojité verzi:

- není podmínka relativního řádu
- integrál je přes konečný interval, proto
- přelévat můžeme jen na tomto konečném intervalu frekvencí