24 - Diskrétní řízení

Michael Šebek
Automatické řízení 2013

Metody návrhu diskrétního řízení

Návrh pro čistě diskrétní systémy

- Mnohé metody jsou analogické (nebo totožné) metodám spojitým
- Proto je zde neuvádíme, jenom je ukážeme na příkladech
- Tyto metody jsou stručně popsány v doplňkových slajdech
- Zde se soustředíme na to, co je při diskrétním návrhu odlišné

Návrh diskrétního řízení pro vzorkované spojité soustavy

- Vyjdeme ze diskrétního modelu soustavy a použijeme metody diskrétního návrhu
- CL stabilitu mám zaručenu (stabilizujícím diskrétním návrhem), na rozdíl od metod emulace.
- Řízení funguje dobře v okamžicích vzorkování (při rozumné periodě)
- Naopak nemáme pod kontrolou chování mezi okamžiky vzorkování.
- Chování mezi okamžiky vzorkování bývá rozumné, pokud není akční zásah „moc divoký“

Deadbeat

- Typicky diskrétní strategie řízení, spojitě (přesně) nejde
- Cíl = všechny póly „do nuly“ tedy $p_{\text{new}}(z) = z^n$
  takže pro výslednou platí (Cayley-Hamilton) $\mathbf{F}^n_{\text{new}} = 0$
- Protože rovnice $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_{\text{new}} \mathbf{x}_k$ má řešení $\mathbf{x}_k = \mathbf{F}^k_{\text{new}} \mathbf{x}_0$,
  tak je $\mathbf{x}_k = 0, \forall k \geq n, \forall \mathbf{x}_0$
- Tedy nezávisle na počátečním stavu je systém počínaje n-tým krokem úplně v klidu (všechny stavy i výstup jsou nulové)!
- V případě poruchy konečné délky, se také dostane do klidu (nejpozději n-tý krok po odeznění externího signálu)
- Pro výsledný systém platí

$$\mathbf{x}(z) = \left(z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{new}}\right)^{-1} \mathbf{G} u(z) + z\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{new}}\right)^{-1} \mathbf{x}_0 = \frac{\operatorname{adj}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{new}}\right)\mathbf{G}}{z^n} u(z) + \frac{z \operatorname{adj}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{new}}\right)}{z^n} \mathbf{x}_0$$

$$y(z) = \frac{\mathbf{H} \operatorname{adj}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{new}}\right)\mathbf{G}}{z^n} u(z) + \frac{z\mathbf{H} \operatorname{adj}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{new}}\right)}{z^n} \mathbf{x}_0 = \frac{b(z)}{z^n} u(z) + \frac{c_{x_0}(z)}{z^n}$$

$$\deg\left(b(z), c_x(z)\right) \leq n$$

Deadbeat

- Systém typu deadbeat je nejstabilnější ze všech diskrétních
- Pro spojitou soustavu platí totéž: nejpozději za n kroků je z každého počátečního stavu v klidu - tedy všechny stavy i výstup jsou nulové i mezi okamžiky vzorkování! Spojitým řízením tohle nejde!
- Systém typu deadbeat reaguje velmi rychle: někdy je to výhodné, ale jindy naopak nevýhodné (jsou-li v systému šumy)
- Zkracujeme-li periodu vzorkování, roste velikost vstupních signálů a to v limitě $h \to 0$ roste do nekonečna. Proto periodu nezkracujeme.
- Deadbeat navrhujeme stejně jako každé jiné přiřazení pólů
- Protože je tady $p_{new}(z) = z^n$, je Ackermannův vzorec speciálně

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \mathbf{F}^n$$

- Pokud je matice $\boldsymbol{F}$ invertovatelná, platí také

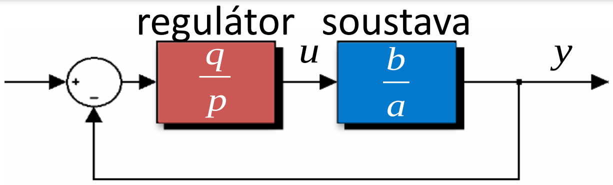
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{-n}\mathbf{G} & \mathbf{F}^{-n+1}\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1}$$

Deadbeat pozorovatel

- I při odhadu stavů diskrétním pozorovatelem můžeme použít strategii deadbeat.
- Jako charakteristický polynom matice dynamiky pozorování zvolíme
  $p_{\text{poz}}(z) = z^n$, takže $\mathbf{F}_{\text{poz}}^n = 0$
- Pro odchylku pozorování $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, kde $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{F}_{\text{poz}} \tilde{\mathbf{x}}_k$
  teď platí
  $$\tilde{\mathbf{x}}_k = 0, \forall k \geq n, \forall \tilde{\mathbf{x}}_0$$
- Tedy nejpozději za n kroků je odchylka vždy nulová a od toho okamžiku se stav pozorovatele přesně rovná stavu soustavy.
- Je-li soustava spojitá, platí totéž, ale jen v okamžicích vzorkování.
- Takový pozorovatel navrhneme např. modifikací Ackermannova vzorce

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}^n \mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Přiřazení pólů polynomiálně



Polynomiální řešení v *z* - stejné jako spojité

- Pro danou soustavu $b(z)/a(z)$

  a danou poloho pólů, vyjádřenou CL charakteristickým pol. $c(z)$
- Vyřešíme rovnici $a(z)p(z)+b(z)q(z)=c(z)$

Polynomiální řešení v *d*

- Podobné $b(d)/a(d), c(d) \Rightarrow a(d)p(d)+b(d)q(d)=c(d) \Rightarrow q(d)/p(d)$

Deadbeat polynomiálně - zvláštní případ přiřazení pólů

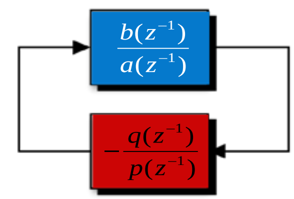
- V z volíme $c(z)=z^m$, kde $m \geq$ (2× řád soustavy) – 1 , řešíme

$$a(z)p(z)+b(z)q(z)=z^m$$

  a vybereme řešení minimálního stupně ve q
- Při řešení v z^{-1} je to ještě jednodušší: Řešíme rovnici

$$a(z^{-1})p(z^{-1})+b(z^{-1})q(z^{-1})=1$$

Stabilizace diskrétním regulátorem



- Pracujeme-li v z, pak je parametrizace všech stabilizujících regulátorů stejná jako ve spojité verzi
- Pracujeme-li v z^{-1} , je to ještě jednodušší:

Všechny stabilizující regulátory jsou parametrizovány takto

$$\frac{q}{p} = \frac{y + at}{x - bt}$$

- kde t je libovolný zlomek polynomů se stabilním jmenovatelem
- a polynomy x, y splňují rovnici $\bar{a}x + \bar{b}y = 1$
- kde $a = (a,b)\bar{a},\;\; b = (a,b)\bar{b}$

Řešitelnost:

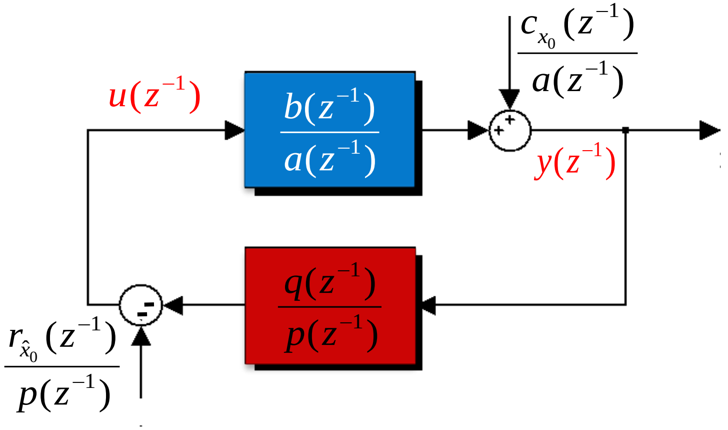
- soustava nemá nestabilní skryté módy a
- $\gcd(a,b)$ je stabilní

Odvození slabé a silné verze deadbeat

- Návrh deadbeat regulátoru v z^{-1} je velmi podobný tomu v z
- Pro zajímavost tedy alespoň zvolíme opačný postup odvození:
- Dosud jsme deadbeat pokládali za zvláštní případ umístění pólů (když všechny umístíme do počátku, chování bude deadbeat)
- Teď naopak hledejme regulátor tak, aby chování bylo typu deadbeat:
- Navíc budeme pracovat s polynomy v z^{-1} (zde je to výhodnější)

Formulace problému: Deadbeat regulátor – silná verze

- Najděte regulátor tak, aby vstupní a výstupní posloupnosti měly konečnou délku, a to pro každé pp. soustavy i regulátoru.
- Navíc tak, aby měly nejkratší délku (nejmenší počet kroků)



Odvození: Deadbeat – silná verze

- Při odvození vyjdeme z rovnic systému
$$y = -\frac{b}{ap+bq} r_{\hat{x}_0} + \frac{p}{ap+bq} c_{x_0}$$
$$u = -\frac{a}{ap+bq} r_{\hat{x}_0} - \frac{q}{ap+bq} c_{x_0}$$
- Cílem návrhu je najít polynomy $p(z^{-1}), q(z^{-1})$ tak, aby pro všechny možné polynomy $r_{\hat{x}_0}(z^{-1}), c_{x_0}(z^{-1})$ byly výsledné posloupnosti také polynomy (= měly konečnou délku)
- Protože $r_{\hat{x}_0}, c_{x_0}$ nejsou dány (reprezentují různé možné pp.), musí být každý ze 4 zlomků výše polynomem sám o sobě
- Zlomek polynomů je obecně nekonečná posloupnost (formální řada) Konečný bude jen tehdy, když jmenovatel dělí čitatel beze zbytku
- Lze ale ukázat, že jmenovatel $ap+bq$ nemůžeme současně vykrátit se všemi čtyřmi čitateli a, b, p, q
- Každý ze zlomků je polynom $\Leftrightarrow$ $a(z^{-1})p(z^{-1}) + b(z^{-1})q(z^{-1}) = 1$

Odvození: Deadbeat – silná verze

- Je-li splněno $ap + bq = 1$, pak výše jsou uvedené vztahy

$$y(z^{-1}) = b(z^{-1})r_{\hat{x}_0}(z^{-1}) + p(z^{-1})c_{x_0}(z^{-1})$$
$$u(z^{-1}) = a(z^{-1})r_{\hat{x}_0}(z^{-1}) - q(z^{-1})c_{x_0}(z^{-1})$$

- Protože vše napravo jsou polynomy, jsou $y(z^{-1}), u(z^{-1})$ také polynomy a to pro každé pp., což bylo třeba zajistit.
- Délka posloupností je dána stupněm polynomů +1
- Jediná možnost, jak ji pro některé pp. zkrátit, je vybrat řešení rovnice minimálního stupně $\left[\, p(z^{-1}), q(z^{-1}) \,\right]$

Shrnutý postup řešení

- K nalezení silné verze deadbeat regulátoru je třeba a stačí řešit polynomiální rovnici $a(z^{-1})p(z^{-1}) + b(z^{-1})q(z^{-1}) = 1$
- a z možných řešení vybrat to minimálního stupně $\left[\, p(z^{-1}), q(z^{-1}) \,\right]$
- Řešitelnost: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ nesoudělné (řiditelná a pozorovatelná soustava), dále nesmějí být skryté módy

Deadbeat – slabá verze

Formulace problému: Deadbeat regulátor – slabá verze

- Najděte regulátor tak, aby výstupní posloupnost y měla konečnou délku, a to pro každé pp. Soustavy i regulátoru.
- Navíc tak, aby měla délku co nejkratší
- A současně musí být CL systém stabilní.
- Rozdíl proti silné verzi: vstup u může být nekonečně dlouhý, ale stabilní

Řešení

- Zajímá nás jen teď jeden vztah a v něm už krátit můžeme proti b $$y = -\frac{b}{ap+bq} r_{\hat{x}_0} + \frac{p}{ap+bq} c_{x_0}$$
- Rozdělíme b na stabilní a nestabilní faktory $b(z^{-1}) = b^{+}(z^{-1}) b^{-}(z^{-1})$
- a položíme $ap+bq=b^{+}$

Deadbeat – slabá verze

- Rovnici $ap + bq = b^+$ můžeme vydělit b^+ (neboť p musí být dělitelné) a dostaneme $ax + b^- q = 1$, kde $p = xb^+$
- Potom vztah pro výstup přechází na $y = b^- r_{\hat{x}_0} + xc_{x_0}$
- Tedy výstup je polynomem pro všechny pp.
- Nejkratší pochod dostaneme výběrem řešení s x min. stupně
- Ještě překontrolujeme vstup u: (není konečný, ale je stabilní)

$$u = -\frac{a}{ap+bq} r_{\hat{x}_0} - \frac{q}{ap+bq} c_{x_0} = -\frac{a}{b^+} r_{\hat{x}_0} - \frac{q}{b^+} c_{x_0}$$

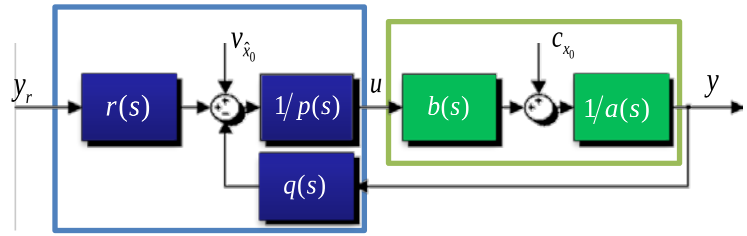
- Také celý CL systém je stabilní, neboť $ap + bq = b^+$

Řešení shrnuto

- Rozdělíme $b(z^{-1}) = b^+(z^{-1}) b^-(z^{-1})$
- Řešíme rovnici $a(z^{-1}) x(z^{-1}) + b^-(z^{-1}) q(z^{-1}) = 1$ pro x min. stupně
- Řešitelnost: a, b^- nesoudělné neboli $\gcd(a, b^-)$ stabilní

Regulátor 2DOF

- Pokud má řídicí systém referenční vstup
- Je přirozené použít regulátor se dvěma stupni volnosti (2DOF)



$$u(z) = -\frac{q(z)}{p(z)}y(z) + \frac{r(z)}{p(z)}y_r(z) \qquad p(z)u(z) = -q(z)y(z) + r(z)y_r(z)$$

- pro kauzalitu musí být $\deg p \geq \deg\left[q(z), r(z)\right]$
- klasické řízení odchylkou (1DOF) je zvláštní případ, kdy $q(z) = r(z)$
- při návrhu vypočteme ZV část ze známé rovnice

$$a(z)p(z) + b(z)y(z) = c(z)$$

- kde vhodně volíme CL charakteristický polynom
- ze srovnání se stavovým přístupem plyne, že $c(z) = c_c(z)c_o(z)$
- kde faktory jsou $c_c(z) = \det\left(zI - F + GK\right), c_o(z) = \det\left(zI - F + LH\right)$

Přímá větev

- výsledný přenos celého systému je

$$y(z) = \frac{b(z)r(z)}{a(p)p(z)+b(z)q(z)} y_r(z)$$

$$= \frac{b(z)r(z)}{c(z)} y_r(z) = \frac{b(z)r(z)}{c_c(z)c_o(z)} y_r(z)$$

- Přímou větev volíme např. tak, aby vykrátila póly pozorovatele tj. $c_o(z) \mid r(z)$ tedy například jako

$$r(z) = t_0 c_o(z)$$

$$y(z) = \frac{t_0 b(z)}{c_c(z)} y_r(z)$$

- pak jsou řídicí signály zavedeny tak, že negenerují odchylku pozorování
- konstantu t_0 volíme tak, abychom zajistili požadované statické zesílení
- obvykle má být statické zesílení = 1, takže nastavíme $t_0 = c_c(1)/b(1)$

Diskrétní sledování – asymptotické a deadbeat

Asymptotické sledování je u diskrétních systémů stejné jako u spojitých

- rovnice jsou stejné

$$ap + bq = m, \quad f^{-}t + br = m, \quad m \text{ stabilní}$$

- Podmínky jsou stejné
  1) $\gcd(a,b)$ stabilní; 2) $\gcd(f^{-},b) = 1$; 3) $f^{-} \mid a$
- Řešení je stejné v z i v z^{-1}, až na to, že při řešení v z ještě musíme vybrat m patřičně vysokého stupně

Na rozdíl od spojitého případu tu ale existuje varianta deadbeat , tedy sledování za konečný počet kroků:

- Pokud postupujme v z, volíme $m(z) = z^{n-1}$
  pokud v z^{-1}, volíme $m(z^{-1}) = 1$
- a vybereme řešení minimálních stupňů (nastává koincidence)
- řešení existuje, právě když $\gcd(a,b) = 1$
  ostatní podmínky jsou stejné.