25 – Dopravní zpoždění

Michael Šebek

Automatické řízení 2018

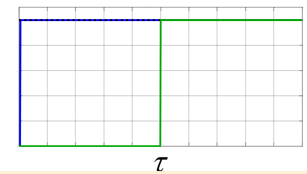
14-5-18

Dopravní zpoždění

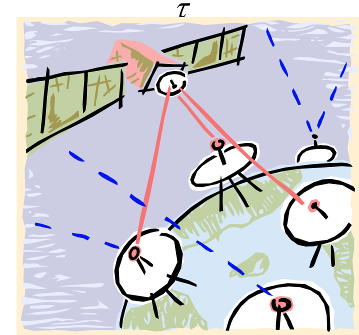
(Time delay, transport delay, dead time, delay-differential systems)

V reálných systémech je často dopravní zpoždění

$$y(t) = u(t - \tau)$$



Je to obvykle čas potřebný na přenos informace:
pozemní tele-operace, Lunochod,
Spirit-Opportunity, Cassini-Huygens



nebo čas potřebný na přemístění hmoty:
doprava materiálu, válcování,
výroba papíru, vytápění, …

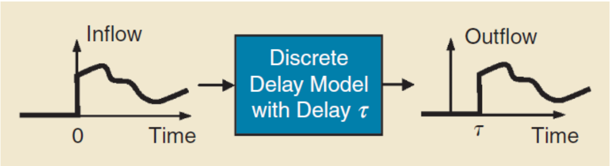
Dopravní zpoždění reprezentuje
systém nekonečného řádu

Při ZV řízení většinou zhoršuje stabilitu ZV systému!

Různá dopravní zpoždění v systému

- Čisté dopravní zpoždění

$$y(t) = u(t-\tau) \quad \Leftrightarrow \quad y(s) = u(s)e^{-\tau s}$$



- Systém s dopravním zpožděním na vstupu a na výstupu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t-\tau)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t-\tau)$$

$$H(s, e^{-\tau s}) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}e^{-\tau s} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{b(s)}{a(s)}e^{-\tau s}$$

- Systém s dopravním zpožděním uvnitř

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 e^{-\tau s}\right)$$

$$H(s, e^{-\tau s}) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 e^{-\tau s}\right)^{-1}\mathbf{B} = \frac{b(s, e^{-\tau s})}{a(s, e^{-\tau s})}$$

Ještě složitější případy

Více různých zpoždění (souměřitelné nebo nesouměřitelná)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i\mathbf{x}(t-\tau_i) \qquad \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i e^{-\tau_i s}\right)$$

$$H(s, e^{-\tau_1 s}, e^{-\tau_2 s}, \ldots, e^{-\tau_N s}) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i e^{-\tau_i s}\right)^{-1}\mathbf{B} = \frac{b(s, e^{-\tau_1 s}, e^{-\tau_2 s}, \ldots, e^{-\tau_N s})}{a(s, e^{-\tau_1 s}, e^{-\tau_2 s}, \ldots, e^{-\tau_N s})}$$

Rozprostřené zpoždění (distributed delay): raketový motor na tekuté palivo, dlouhé vedení, biologické systémy,…

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-\tau) + \int_0^{\tau} \mathbf{A}_v(v)\mathbf{x}(t-v)dv$$

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 e^{-\tau s} - \mathbf{A}(s)\right)$$

Obecně ne-racionální funkce

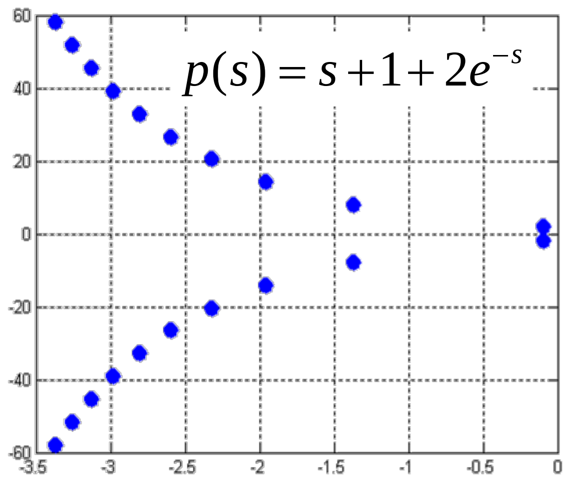
$$\mathbf{A}(s) = \int_{0^-}^{\infty} \mathbf{A}(v) e^{-sv} dv = \mathcal{L}_{-}\{\mathbf{A}(t)\} = \int_{0^-}^{\tau} \mathbf{A}(v) e^{-sv} dv$$

$$H(s, e^{-\tau s}, \mathbf{A}(s)) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 e^{-\tau s} - \mathbf{A}(s)\right)^{-1}\mathbf{B} = \frac{b(s, e^{-\tau s}, \mathbf{A}(s))}{a(s, e^{-\tau s}, \mathbf{A}(s))}$$

Systémy s rozprostřenými parametry – parciální diferenciální rovnice

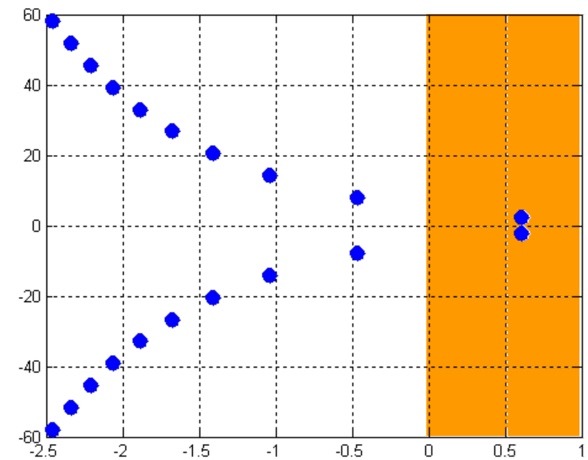
Nuly, póly, stabilita

- Protože exponenciála je v komplexním oboru periodická, má obecně kvazipolynom $p(s,e^{-\tau s})$ nekonečně mnoho oddělených kořenů
- Systém s dopravním zpožděním tedy může mít nekonečně mnoho (oddělených) nul a/nebo pólů
- Je stabilní právě když všechny kořeny charakteristického (kvazi)polynomu leží v otevřené levé polorovině
- Stabilní



a nestabilní

$q(s) = s + 1 + 5e^{-s}$



- Rozlišujeme stabilitu závislou na zpoždění (stabilní pro dané τ) a stabilitu nezávislou na zpoždění (stabilní pro každé τ) – „iod“

Návrh řízení systému se zpožděním

- Laplaceova transformace
  - OK, ale obrazy nejsou racionální funkce
- Frekvenční metody
  - fungují: Nyquistovo kritérium, PM, GM, …
- Root locus
  - je k ničemu (pólů je nekonečně mnoho),
  - leda snad pro dominantní póly
- Stavové metody
  - Něco, s problémy - užívají se „pseudo-stavové“ modely
  - Skutečný stavový prostor je totiž nekonečně-dimensionální,
- Polynomiální metody:
  - něco jde pomocí 2-D polynomů

$$d = e^{-\tau s} \qquad H(s, e^{-\tau s}) = \frac{b(s, e^{-\tau s})}{a(s, e^{-\tau s})} \to H(s, d) = \frac{b(s, d)}{a(s, d)}$$

- Také fungují některé triky, ad hoc řešerní apod.

Řízení systému se zpožděním

Aproximace na začátku

- dopravní zpoždění aproximujeme členem konečného řádu
- a pak pokračujeme standardním postupem

Aproximace na konci

- provádíme návrh pro systém se zpožděním
- často vychází regulátor, který také obsahuje zpoždění
- takový regulátor realizujeme aproximací nebo diskrétně

Diskretizace

- Soustavu na začátku diskretizujeme, tím dopravní zpoždění „zmizí“
- pak provedeme diskrétní návrh

Robustní řízení

- zpoždění zahrneme do neurčitosti
- účinné zvlášť při proměnném nebo neznámem zpoždění
- provedeme robustní návrh pro neurčitou soustavu bez zpoždění

Padého aproximace dopravního zpoždění

Když chceme aproximovat racionální funkcí exponenciálu $e^{-\tau s}$, pro jednoduchost dosadíme $\tau s \triangleq s$ a aproximujeme e^{-s}. Pak zpátky $s \triangleq \tau s$.

Funkci komplexní proměnné e^{-s} můžeme rozvinout v McLaurinovu řadu (Taylorovu řadu v bodě 0):
(funkce je holomorfní → rozvoj platí všude)

$$e^{-s} = 1 - s + \frac{s^2}{2!} - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} - \cdots$$

Aproximace 1. řádu

- nahradíme e^{-s} přenosem 1. řádu $\dfrac{b_1 s + b_0}{a_1 s + 1}$ tak, aby jejich rozdíl byl malý
- rozvineme i přenos v řadu (dlouhým dělením od nulových mocnin)
- 3 neznámé ➡ porovnáme 3 členy ➡ 3 rovnice

$$e^{-s} = \boxed{1} \boxed{- s} \boxed{+ \frac{s^2}{2!}} - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} - \cdots$$

$$\frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + 1} = \boxed{b_0} + \boxed{(b_1 - b_0 a_1) s} \boxed{- a_1 (b_1 - b_0 a_1) s^2} + \cdots$$

➡

$$\boxed{\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ (b_1 - b_0 a_1) &= -1 \\ -a_1 (b_1 - b_0 a_1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

Padého aproximace dopravního zpoždění

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ (b_1 - b_0 a_1) &= -1 \\ -a_1(b_1 - b_0 a_1) &= 1/2 \end{aligned} \;\Rightarrow\; b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; e^{-s} \approx \frac{1 - s/2}{1 + s/2} \;\Rightarrow\; e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2}$$

Aproximace 2. řádu

- Podobně: nahradíme e^{-s} přenosem 2. řádu $\dfrac{b_1 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$
- rozvineme i přenos v řadu
  5 neznámých ➡ porovnáme 5 členů ➡ 5 rovnic

$$e^{-s} \approx \frac{1 - s/2 + s^2/12}{1 + s/2 + s^2/12} \;\Rightarrow\; e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2 + (\tau s)^2/12}{1 + \tau s/2 + (\tau s)^2/12}$$

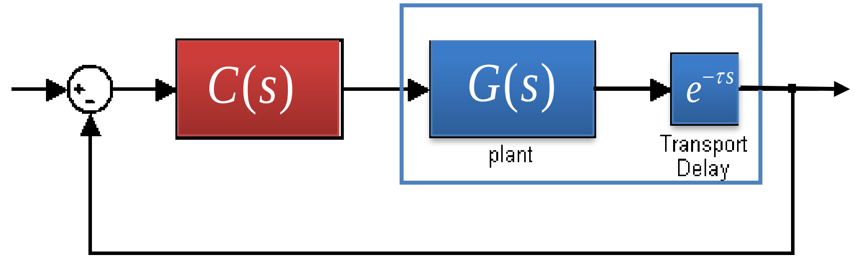
```
pade(T,order)
```

- existují aproximace vyšších řádů, dostaneme je obdobně
- pro velmi malá zpoždění $\tau \in (0,1)$ někdy aproximujeme velmi hrubě členem 1. řádu (lag) - pro něj souhlasí první 2 členy rozvojů

„Přesný“ návrh

- soustava + regulátor

$G(s)e^{-\tau s}$ $C(s)$



- přenos uzavřené smyčky

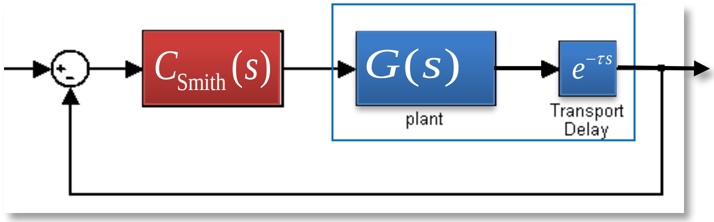
$$T(s)=\frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1+C(s)G(s)e^{-\tau s}}$$

$$G(s)=\frac{b(s)}{a(s)},C(s)=\frac{q(s)}{p(s)}$$

$$T(s)=\frac{b(s)q(s)e^{-\tau s}}{a(s)p(s)+b(s)q(s)e^{-\tau s}}$$

- charakteristický „polynom“ je kvazipolynom
- má obecně nekonečně mnoho nul (kořenů)

Řízení bez zpoždění v charakteristickém polynomu



- Jaké by měl být regulátor, aby výsledný přenos byl

$$T(s)=\frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1+C(s)G(s)}$$

tj. aby neměl zpoždění ve jmenovateli?

Abychom mohli měnit $\boldsymbol{T}$ návrhem $\boldsymbol{C}$, musíme použít $\boldsymbol{C}_{\mathrm{smith}}$

- Porovnáme oba přenosy

$$\frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1+C(s)G(s)}=T(s)=\frac{C_{\mathrm{Smith}}(s)G(s)e^{-\tau s}}{1+C_{\mathrm{Smith}}(s)G(s)e^{-\tau s}}$$

- a z toho vypočteme

$$\boxed{C_{\mathrm{Smith}}(s)=\frac{C(s)}{1+C(s)\left[G(s)-G(s)e^{-\tau s}\right]}}$$

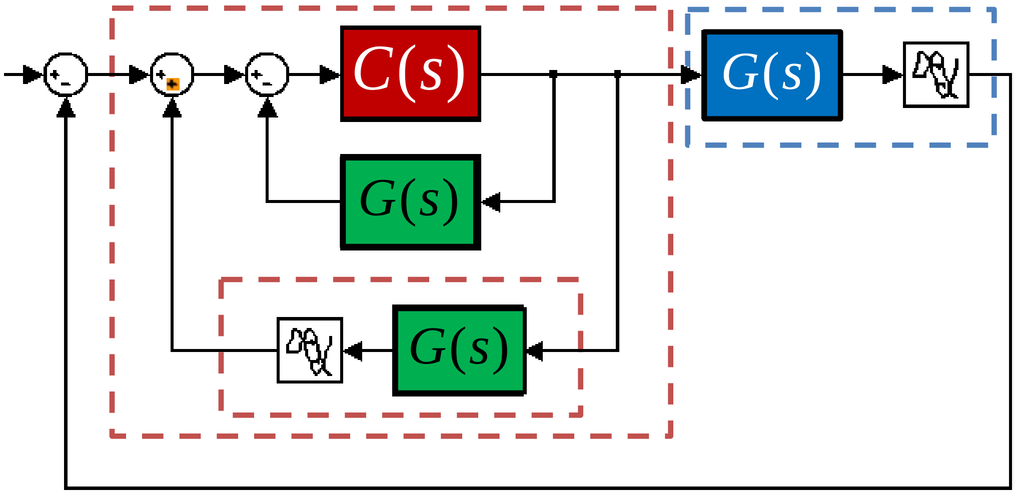
a pro něj opravdu

$$T(s)=\frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1+C(s)G(s)}$$

- Smithův prediktor – autor O.J.M. Smith 1958

Smithův prediktor

$$C_{\text{Smith}}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)\left[G(s) - G(s)e^{-\tau s}\right]}$$



- ZV s modelem soustavy v regulátoru vyruší vnější ZV
- pak funguje jen ta vnitřní - bez zpoždění
- Realizace: musíme realizovat čisté zpoždění
  - číslicově není problém
  - analogově obvykle Padého aproximací
- prediktor je užitečný hlavně v případech, kdy je dopravní zpoždění velké ve srovnání s časovými konstantami soustavy
- válcování, výroba papíru, pásový dopravník, …
- citlivé na přesnou znalost délky zpoždění (jinak se vliv neodečte)

25 – Doplněk: Systémy proměnné v čase

Michael Šebek

Automatické řízení 2016

Systémy proměnné v čase

- Lineární v čase proměnný systém: LTV (linear time-varying)
- koeficienty jsou funkce času
- Stavový model

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)u(t)$$

- Model typu vstup-výstup

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b_m(t)u^{(m)}(t) + \cdots + b_0(t)u(t)$$

- Pojmy přenos, pól a nula nemají smysl
- Stabilitu nutno zkoumat jinak
- Nastávají nové jevy, které u LTI nejsou
- Např. parametrická rezonance