26 – Nelineární systémy a řízení

Michael Šebek
Automatické řízení 2017

17-5-17

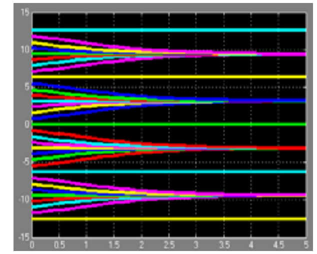
Lineární vs. nelineární

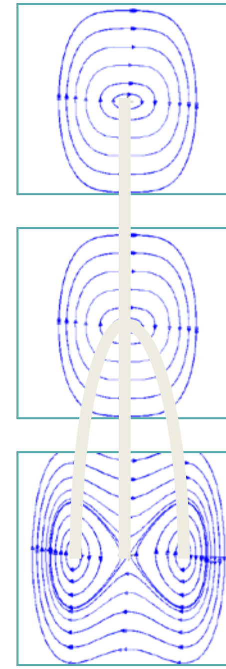
- Reálné systémy jsou většinou (ne vždy) nelineární, při relativně malých signálech (výchylkách) je často můžeme aproximovat lineární modelem
- Nelinearitu musíme vzít v úvahu když: jsou signály větší / projevuje se i pro malé signály / nelze ji linearizovat apod.
- Co neexistuje/nemá smysl pro nelineární systémy:
  - přenos (neplatí superpozice), póly, nuly
  - frekvenční přenos a charakteristiky (přenos frekvence závisí i na amplitudě, na výstupu mohou být nové frekvence, které nebyly na vstupu, …), neplatí věrnost frekvence
- Co má trochu jiný smysl:
  - stabilita (lokální vs. globální)
- Dochází k jevům u lineárních systémů nevídaným, příklady dále a na doplňkových slajdech
- Nelineární systémy popisujeme jen v časové oblasti nelineárními diferenciálními rovnicemi, často stavovým modelem

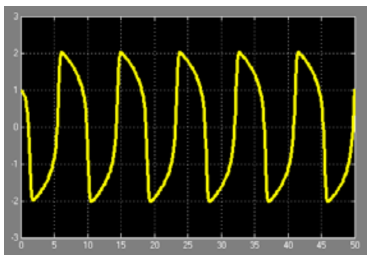
Nelineární jevy

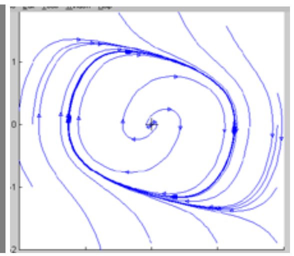
Jevy u lineárních systémů nevídané

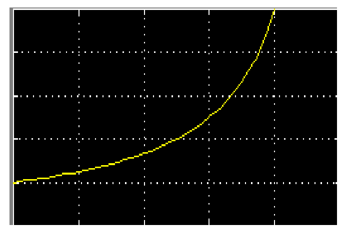
- řešení neexistuje nebo není jednoznačné
- více izolovaných ekvilibrií
- stabilní oscilace





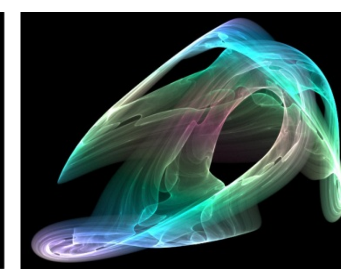






- únik v konečném čase
- bifurkace (změna parametrů mění kvalitativní rysy)
- synchronizace (vázané oscilátory se synchronizují)
- složité dynamické chování:
  turbulence , chaos, …

- viz další příklady na doplňkových slajdech



Nelinearita v soustavě a v aktuátoru

Je-li nelinearita v soustavě (systému, procesu), pak se

- většinou snažíme ji linearizovat a pak použít lineární model
- a to buď přibližně (přibližný lin. model v okolí pracovního bodu)
- anebo přesně pomocí ZV (nelineární nebo i lineární)

Je-li soustava lineární, ale nelinearita je v aktuátoru

- tedy ji do řídicího systému přidáváme my, neboť jinak nelze
- pak ji buď ignorujeme, navrhujeme „lineárně“ a ověříme výsledek
- nebo ji musíme vzít v úvahu od začátku
- snažíme se její vliv omezit (např. lineární ZV), zajistit malé signály apod.
- nikdy ji přibližně nelinearizujeme

- Někdy má smysl použít nelineární regulátor i pro lineární soustavu

Jak řídit nelineární soustavu?

- návrh řízení provedeme metodami nelineární teorie (probírá se až v magisterském předmětu Nelineární systémy)
- soustavu často přibližně linearizujeme a pak
  - navrhujeme pro linearizovaný systém lineárními metodami a snažíme se zajistit „malé signály“
  - výsledek vždy ověříme simulacemi s nelineárním modelem
- někdy můžeme soustavu linearizovat přesně (exaktně)
  - nejprve navrhneme nelineární regulátor, který soustavu linearizuje
  - tak vznikne nový – lineární – systém
  - pak navrhneme další – lineární – regulátor, který ten nově vzniklý lineární systém řídí
  - přesnou linearizaci provedeme buď
    - nelineární ZV nebo
    - nelineární PF
- také můžeme linearizovat částečně lineární ZV

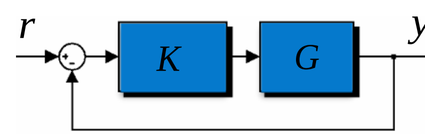
Linearizační efekt ZV

Lokálně linearizační efekt ZV

- Zavedením vhodné ZV držíme výstup soustavy poblíž požadovaného pracovního bodu, kde dobře platí lineární modely použité při návrhu
- Tak vlastně ZV ospravedlňuje užití lineárních modelů v kurzu SRI

Globálně linearizační efekt ZV

- Už jsme viděli, jak je výhodné použít ZV s velkým zesílením
- Teď to odvodíme obecněji:
  pro systémy lineární i nelineární



Lineární:

$$y = GKr - GKy \;\Rightarrow\; y = \frac{GK}{1+GK} r$$

$$|GK| >> 1 \;\Rightarrow\; y \approx r$$

Nelineární:

$$y = G\langle K\langle r-y\rangle\rangle \;\Rightarrow\; y = r - K^{-1}\langle G^{-1}\langle y\rangle\rangle$$

$$|G\langle K\langle \circ\rangle\rangle| >> 1 \;\Leftrightarrow\; K^{-1}\langle G^{-1}\langle \circ\rangle\rangle \approx 0$$

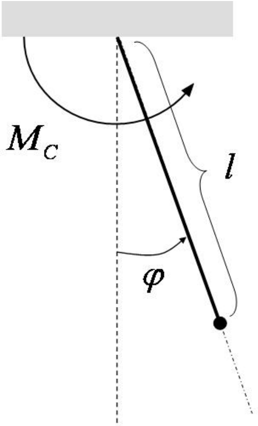
$$\Rightarrow\; y \approx r$$

- Velké zesílení potlačí vliv neurčitostí i nelinearit
- Bohužel často také destabilizuje – nutný kompromis dle frekvencí
- Často užíváme integrátor (pro malé frekvence má nekonečné zesílení)

Exaktní linearizace zpětnou vazbou

- nelineární členy odečteme a přidáme k řízení
- výsledkem je přesně lineární systém
- pokud řídicí počítač vypočte nelineární člen rychle

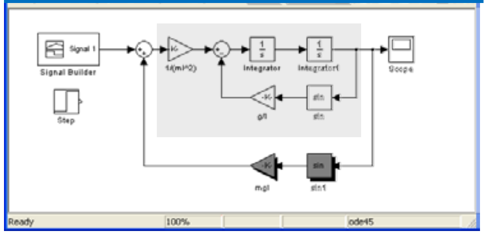
Příklad: kyvadlo řízené momentem



$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = M_C \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\varphi} = \overbrace{M_C - mgl\sin\varphi}^{u}$$

- výsledná rovnice $ml^2\ddot{\varphi} = u$ je lineární i pro velká φ ,
- ale k řízení se přičte nelineární ZV $M_C = u + mgl\sin\varphi$
- používá se to např. pro řízení robotů jako metoda computed torque (zvládneme 3-dílná ramena)
- funguje to dobře, když nelinearitu realizujeme dobře (= rychle)
- Srovnej s přibližnou linearizací v okolí dolní polohy $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\varphi = \dfrac{M_C}{ml^2}$

$\ddot{\varphi} + g/l\sin\varphi = M_C/ml^2$

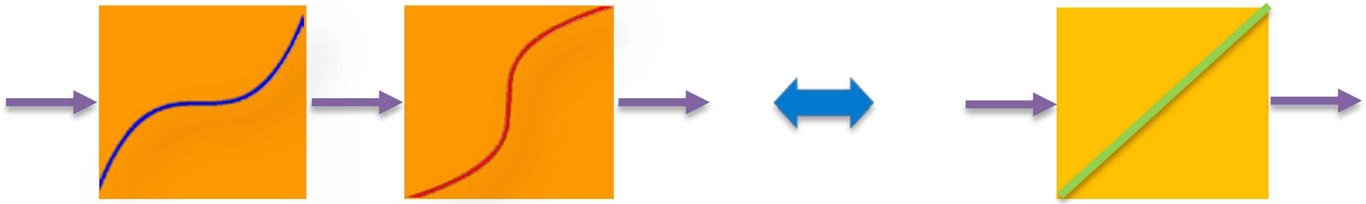


Linearizace inverzní nelinearitou

- pro soustavy s oddělenou lineární dynamikou
- a statickou nelinearitou na vstupu můžeme použít

Linearizaci inverzní nelinearitou

- k některým nelineárním funkcím $f\langle\circ\rangle$
- existuje inverzní nelinearita $h\langle\circ\rangle = f^{-1}\langle\circ\rangle$
- takže jejich sériové spojení $f\left\langle h\langle\circ\rangle\right\rangle = f\left\langle f^{-1}\langle\circ\rangle\right\rangle = \circ$ je lineární

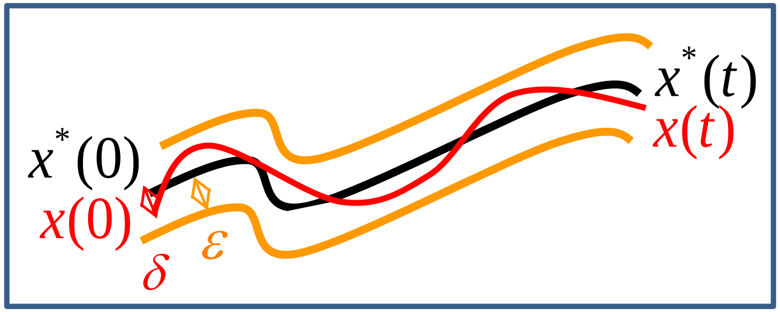


- používá se hlavně pro korekci mírně nelineárních senzorů a aktuátorů

Stabilita řešení nelineárního systému

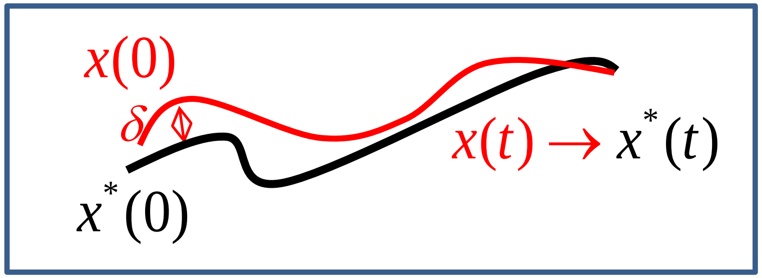
- Zhruba: řešení nelineárního systému je stabilní když malá změna počátečních podmínek způsobí jen malou změnu toho řešení
- Nechť systém $\dot{x}(t) = f(x(t))$ má pro počáteční stav $x^*(0)$ řešení $x^*(t)$. Toto řešení je
- stabilní (Lyapunovsky stabilní) když

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \\ \left| x^*(0) - x(0) \right| < \delta \Rightarrow \left| x^*(t) - x(t) \right| < \varepsilon$$



- asymptoticky stabilní když

$$\exists \delta > 0 : \\ \left| x^*(0) - x(0) \right| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \left| x^*(t) - x(t) \right| = 0$$



- u nelineárních systémů: ani jedna z vlastností obecně neimplikuje druhou
- u lineárních systémů: asymptotická stabilita implikuje Lyapunovskou

Stabilita ekvilibria

- Opakování: Řešení, které začne v ekvilibriu, tam také setrvá navždy
- Stabilita ekvilibria = stabilita řešení, které v něm začne (a skončí)
- Říkáme, že ekvilibrium je stabilní, asymptoticky stabilní, nestabilní právě když toto řešení je takové

Definice

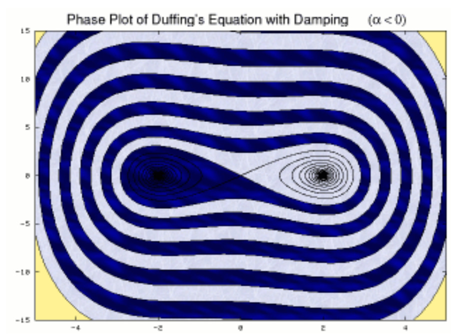
Ekvilibrium je tedy lokálně stabilní (asymptoticky stabilní) právě když všechna řešení začínající blízko něj zůstanou blízko (konvergují k němu)

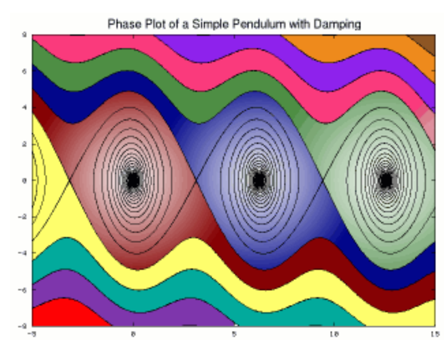
- to je zřejmě žádaná vlastnost, ale ještě lepší je, když to platí pro úplně všechna řešení:

Definice

Ekvilibrium x_e je globálně asymptoticky stabilní, právě když je stabilní a

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e \quad \forall x(0)$$





- Pokud je stabilní jen lokálně, pak má svou doménu atrakce neboli povodí

Stabilita ekvilibria

Intuitivně čekáme, že

- ekvilibrium x_0 systému $\dot{x}(t) = f(x(t), u_0)$ je stabilní, je-li stabilní přibližná linearizace v jeho okolí

$$z = x - x_0, v = u - u_0$$
$$\dot{z} = \mathbf{A}z + \mathbf{B}v$$

Přesněji platí tohle: Má-li matice $\mathbf{A}$

- všechna vlastní čísla stabilní, pak je ekvilibrium stabilní
- aspoň jedno vlastní číslo nestabilní, pak je ekvilibrium nestabilní
- aspoň jedno vlastní číslo na mezi stability a žádné nestabilní, pak o stabilitě ekvilibria jen ze znalosti $\mathbf{A}$ nemůžeme rozhodnout

Lyapunovova funkce

- V příkladech jsme určovali stabilitu z toho, zda kvadrát vzdálenosti řešení od počátku s časem roste nebo klesá: $d^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$
  Tuto myšlenku dál zobecníme:
- Uvažme systém $\dot{x} = f(x)$ s ekvilibriem x_0 a předpokládejme existenci funkce V takové, že

	positivně def.	neg.semidef.	
$V(x_0) = 0$	$V(x) > 0, x \neq x_0$	$V_x(x) f(x) \leq 0$ derivace podél trajektorie	kde $V_x(x) \overset{\text{def}}{=} [\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}]$

V musí být spojitá a mít spojité derivace

- Funkce splňující v nějakém okolí x_0 se nazývá Lyapunovova má význam energie či zobecnělé vzdálenosti řešení x od bodu x_0
- S rostoucím časem klesá pro všechna řešení $\dot{x} = f(x)$, neboť

$$d/dt\big(V\left(x(t)\right)\big) = V_x(x)\dot{x}(t) = V_x\left(x(t)\right) f\left(x(t)\right) \leq 0$$

- Pokud splňuje ještě další podmínky, slouží k testům stability
- Podmínky jsou vždy postačující (najdeme-li vhodnou fci., pak stabilita) hledáme vždy pro určitý systém, často je problém vhodnou fci. najít

Stabilita a další podmínky na Lyapunovovu

- Pokud pro danou soustavu existuje Lyapunovova funkce splňující ještě další podmínky, pak je soustava v nějakém smyslu stabilní
- Různé další podmínky ➡ různé věty o stabilitě (postačující pod.)

Jestliže existuje Lyapunovova funkce a navíc

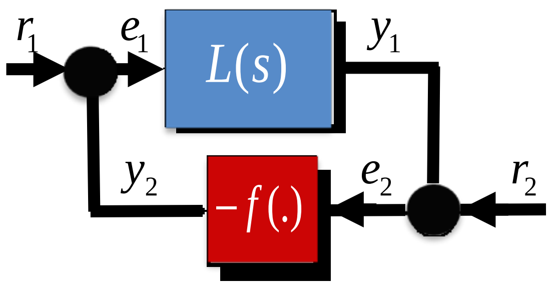
bez dalších podmínek ➡ $\boldsymbol{x_0}$ je (lokálně) Lyapunovsky stabilní

\+ $V_x(x) f(x) < 0, x \neq x_0$ ➡ $\boldsymbol{x_0}$ je (lokálně) asymptoticky stabilní

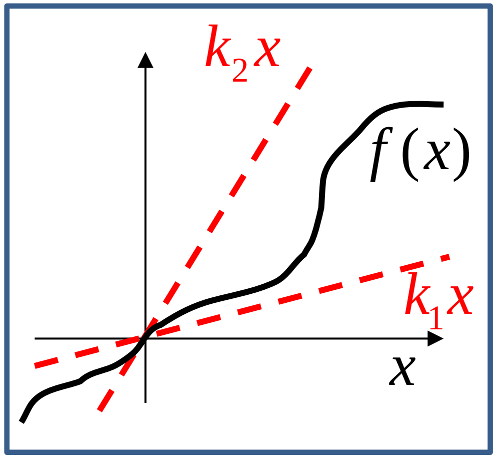
\+ $V_x(x) f(x) < 0, x \neq x_0$, $V(x) \to \infty, |x| \to \infty$ ➡ $\boldsymbol{x_0}$ je globálně asymptoticky stabilní = celý systém je asymptoticky stabilní

Kruhové kritérium stability

- Uvažme systém s nelinearitou ve zpětné vazbě



$$y_2 = -f(e_2)$$



- kde nelinearita splňuje podmínky

$$f(0)=0,\ \ k_1 \le \frac{f(x)}{x} \le k_2, x \ne 0, k_1 \ge 0, k_2 > 0$$

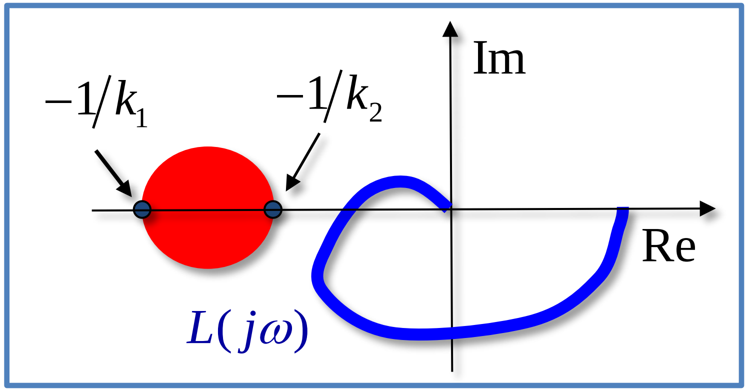
- pak platí obecnější verze Věty o malém zesílení:

  ZV je stabilní jestliže $\boldsymbol{L}$ je stabilní a

$$k_2 \sup_{\omega} \left| L(j\omega) \right| < 1$$

- to je postačující podmínka, ale většinou moc konzervativní (protože je $\boldsymbol{L}$ často větší, aspoň pro některé frekvence)

Kruhové kritérium stability



- nakresleme Nyquistův graf $L(j\omega)$
- a k němu přikresleme kruh
  se středem na reálné ose,
  který prochází body $-1/k_1$ a $-1/k_2$

Věta – kruhové kritérium

Systém se

- Stabilním L
- nelinearitou splňující podmínky a takový, že
- Nyquistův graf $L(j\omega)$ neobkrouží kruh ani jím neprochází

je BIBO stabilní

- Pokud je ještě L racionální a nesoudělný, pak je systém (jeho ekvilibrium v počátku) globálně asymptoticky stabilní
- podmínka je to jen postačující, nikoli nutná
- pro lineární f přechází v Nyquistovo kritérium stability
- k_1 může být 0