27 – Systémy s více vstupy a výstupy

Michael Šebek

Automatické řízení 2017

Stavový model MIMO systému

- Má obecně
  - m vstupů
  - p výstupů

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

- $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ už nejsou vektory, ale matice

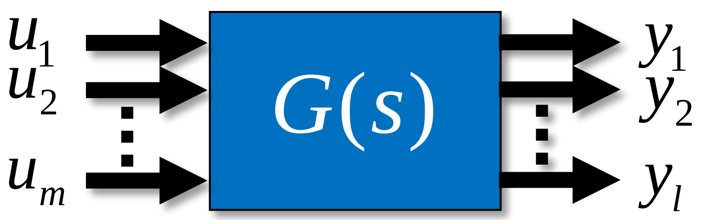
$$\mathbf{B} : n \times m$$
$$\mathbf{C} : p \times n$$
$$\mathbf{D} : p \times m$$

- Z toho plynou rozdíly, např.:
  - Kanonické tvary jsou složitější
  - Matice řiditelnosti je obdélníková (dlouhá): $n \times mn$
  - Matice pozorovatelnosti je obdélníková (vysoká): $pn \times n$
  - Stavová ZV a výstupní injekce nejsou vektory, ale matice

$$\mathbf{K} : m \times n$$
$$\mathbf{L} : n \times p$$

Vnější model MIMO systému

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$



$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix}$$

$$y(s) = G(s)u(s)$$

Pozor na pořadí násobení!

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_l(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s), g_{12}(s), \ldots, g_{1m}(s) \\ g_{21}(s), g_{22}(s), \ldots, g_{2m}(s) \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \quad \vdots \\ g_{l1}(s), g_{l2}(s), \ldots, g_{lm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix}$$

- Nevadí ani tak počet vstupů/výstupů,
  ale interakce (= nenulové prvky mimo diagonálu)

Frekvenční odezva MIMO systému

- Když na *l*-tý vstup přivedeme sinusový signál $u_l(t) = u_{l0}\sin(\omega t + \alpha_l)$
  a na ostatní vstupy nic, bude po odeznění přechodových jevů
- na *k*-tém výstupu také sinusový signál stejné frekvence

$$y_k(t) = y_{k0}\sin(\omega t + \beta_k)$$

- Zesílení a fázový posun jsou $\dfrac{y_{k0}}{u_{l0}} = \left|g_{kl}(j\omega)\right|,\ \beta_k - \alpha_l = \angle g_{kl}(j\omega)$

  kde $g_{kl}(j\omega) = \left[G_{kl}(j\omega)\right]_{kl}$

- Tedy platí

$$y_k(j\omega) = g_{kl}(j\omega)u_l(j\omega)$$

- Celková odezva při sinusových signálech na všech vstupech je dána součtem $y_k(j\omega) = \sum_l g_{kl}(j\omega)u_l(\omega)$
- nebo maticově $y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega)$

Směry pro MIMO systém

- Pro SISO systém je zesílení na frekvenci ω jednoduše

$$\frac{|y(j\omega)|}{|u(j\omega)|}=\frac{|G(j\omega)u(j\omega)|}{|u(j\omega)|}=\frac{|G(j\omega)||u(j\omega)|}{|u(j\omega)|}=|G(j\omega)|$$

jde vykrátit

Zesílení tedy závisí na frekvenci, ale ne na amplitudě vstupu

- U MIMO to tak jednoduché není: signály jsou vektory a tak musíme nejdříve velikosti jednotlivých prvků „sečíst“ pomocí nějaké normy
- Když vybereme Euklidovskou normu pro vektory, pak

$$\|u(j\omega)\|_2=\sqrt{\sum|u_l(j\omega)|^2}=\sqrt{u_{10}^2+u_{20}^2+\cdots}$$
$$\|y(j\omega)\|_2=\sqrt{\sum|y_k(j\omega)|^2}=\sqrt{y_{10}^2+y_{20}^2+\cdots}$$

- a zesílení systému pro daný vstup (!) $u(j\omega)$ je

$$\frac{\|y(j\omega)\|_2}{\|u(j\omega)\|_2}=\frac{\sqrt{y_{10}^2+y_{20}^2+\cdots}}{\sqrt{u_{10}^2+u_{20}^2+\cdots}}=\frac{\|G(j\omega)u(j\omega)\|_2}{\|u(j\omega)\|_2}$$

nejde jednoduše vykrátit

- Zesílení nezávisí na amplitudě, závisí na ω a také na směru vstupu !

Póly přenosové matice MIMO systému

- Pól je komplexní číslo, pro které je některý prvek přenosové matice = ∞ , je to tedy pól některého prvku matice
- je-li matice čtvercová, také se pozná z $\det G(s)$
- Poloha pólů toho u MIMO systému zas tak moc toho neříká, záleží na struktuře: viz např. „dva integrátory“

Příklad:

- Systém s přenosovou maticí

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{s-1}{s+1}\\ \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{s}{s+3}\end{bmatrix}$$

- má póly v ***s* = 0, -1, -2, -3**

$$\det G(s)=\frac{s(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

```
>> G=[1./s (s-1)./(s+1);1./(s+2)
s./(s+3)]
G =
     1          (s-1)
     -          -----
     s          (s+1)

      1           s
    -----       -----
    (s+2)       (s+3)
 >>   (poles(G))'
ans =   0 -3.00  -2.00  -1.00
>> pformat rootr, det(G)
ans =          s(s+5.00)
      ----------------------------
        s(s+3.00)(s+2.00)(s+1.00)
```

Nuly přenosové matice MIMO systému

- Nula s_i je komplexní číslo, po jehož dosazení přenosová matice $G(s_i)$ ztrácí původní hodnost: $\operatorname{rank} G(s_i) < \operatorname{rank} G(s)$
- Na první pohled se z matice nepozná: není to nula konkrétního prvku!
- U matice čtvercové je to nula jejího determinantu, jinak nutno postupovat dle definice
- Pozor: Po dosazení nuly matic ztrácí původní hodnost, ale obecně se nestane nulovou maticí.
- Vstupní signál příslušné frekvence tedy nemusí být blokován – záleží to ještě na jeho směru!

Pokračování příkladu

- systém z příkladu má nuly v s = 0, -5

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s-1}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{s}{s+3} \end{bmatrix}, \det G(s) = \frac{s(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

```
>> r=roots(G)
r =
         0
   -5.0000
>> rank(G)
ans = 2
>> rank(value(G,r(2)))
ans = 1
```

Nula a směr

- Je-li $\boldsymbol{s}_\mathbf{i}$ nulou $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s})$, tak nejen $\operatorname{rank} F(s_i) < \operatorname{rank} F(s)$, ale ještě existují nenulové vektory
$$u_{s_i}, y_{s_i} : F(s_1)u_{s_i} = 0 y_{s_i}$$
- Obvykle je normalizujeme na jednotkovou délku
- u_{s_i} je vstupní nulový směr (který směr vstupů nemá vliv na výstup)
- y_{s_i} je výstupní nulový směr (který směr výstupů je těžké řídit)

Poznámky

- Jestliže má výstup přímou informaci o všech stavech, systém nemá nuly (tj. jestliže $\operatorname{rank} C = n$ a $D = 0$)
- U SISO systémů nelze odstranit vliv nestabilní nuly
- U MIMO systémů je možné je obecně možné vliv nestabilní nuly přesunout na méně důležitý výstup
- Někdy to nejde: pokud je nula „přišpendlena“ k nějakému výstup, nejde z něj přesunout na jiný (souvisí s nulovými prvky ve směrovém vektoru)

Pól a směr

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Také pól MIMO systému má směry:

- Je-li $\boldsymbol{q}_\mathbf{i}$ pravý vlastní vektor matice systému $\boldsymbol{A}$: $Aq_i = p_i q_i$

  a $\boldsymbol{t}_\mathbf{i}$ levý vlastní vektor matice systému $\boldsymbol{A}$: $t_i A = t_i p_i$

- Pak nazýváme $u_{p_i} = B^H q_i$ vstupní vektor pólu $\boldsymbol{p}_\mathbf{i}$

  a $y_{p_i} = Ct_i$ výstupní vektor pólu $\boldsymbol{p}_\mathbf{i}$

- Platí např. (pro póly různé a vlastní vektory škálované na $q_i^H t_i = 1$):

$$G(s) = \sum_1^n \frac{Ct_i q_i^H B}{s - p_i} + D = \sum_1^n \frac{y_{p_i} u_{p_i}^H}{s - p_i} + D$$

- u_{p_i} ukazuje, jak moc je *i*-tý mód vybuzen (a tedy řízen) vstupy
- y_{p_i} ukazuje, jak moc je *i*-tý mód pozorován výstupy
- Přenosová matice je ve směru pólu „nekonečná“

$$G(p_i)u'_{p_i} = \infty y'_{p_i} \qquad u'_{p_i} = u_{p_i} \Big/ \left\| u_{p_i} \right\|_2, \; y'_{p_i} = y_{p_i} \Big/ \left\| y_{p_i} \right\|_2$$

Interakce

- Řízení MIMO systémů není složitější ani tak kvůli počtu vstupů a výstupů, ale kvůli interakci: obecně každý vstup ovlivňuje každý výstup

Příklad: mísící vanová baterie: klasická vs. páková

 × 

$$\begin{array}{llcll} \text{průtok studené} & u_1 & \rightarrow & \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} & \rightarrow & y_1 & \text{teplota} \\ \text{průtok horké} & u_2 & \rightarrow & & \rightarrow & y_2 & \text{průtok} \end{array}$$

- Ideálně je přenosová matice je diagonální a interakce je nulová. Pak říkáme, že systém je rozpojený (decoupled).
- Čím větší křížová interakce (coupling), tím větší jsou problémy
- Jaká je míra interakce?

Problém párování

- Chceme-li využít SISO metody pro MIMO systémy
musíme najít, který vstup silně ovlivňuje který výstup. To je
- Problém párování
- Pro *m* x *m* soustavu je obecně *m*! možností (permutací)
- K nalezení párování a také ke zhodnocení míry interakce se tradičně používá Relative Gain Array – RGA
- Pro čtvercovou matic i přenosů G(s) definujeme vztahem

$$\mathrm{RGA}(G) = \Lambda(G) = \left[G_{ij}(0) G_{ji}^{-1}(0) \right]_{ij} = G(0) .* G^{-T}(0)$$

$.*$ je „součin po prvcích“
(tzv. Hadamardův, Schurův, v Matlabu „array multiplication“)

$G_{ij}(0)$ - DC zesílení z u_i na y_j, když jsou ostatní vstupy nulové

$G_{ji}^{-1}(0)$ - převrácená hodnota tohoto zes., když ostatní výstupy nulové

- Snažíme se o RGA diagonální (s kladnou diagonálou)
nebo alespoň s velkými diagonálními prvky

Návrh regulátoru pro MIMO soustavy

Diagonální regulátor: čtvercový, nediagonální prvky = 0

- funguje pro soustavu diagonální (má nediagonální prvky nulové) a soustavu „skoro diagonální“ (nediagonální prvky malé)
- navrhuje se SISO metodami, každý prvek odděleně

Dvoustupňový návrh

1. Decoupling, tedy úprava přenosu na „diagonální“ tvar:
   Navrhneme $W_1(s)$, aby $G_{diag}(s) = G(s)W_1(s)$
   - byla diagonální matice (tzv. dynamický decoupling), např. $W_1(s) = G^{-1}(s)$
   - nebo alespoň pro nějakou frekvenci (třeba steady-state decoupling)
2. Pak provedeme „diagonální návrh“ pro $G_{diag}(s)$, tj. několik skalárních

- Hlavní problém: typicky citlivé na chyby/změny parametrů

MIMO regulátor s obecnou strukturou

- potřebujeme MIMO metody $F(s) = A^{-1}(s)B(s), K(s) = Q(s)P^{-1}(s)$
- např. polynomiálně $A(s)P(s) + B(s)Q(s) = C(s)$