

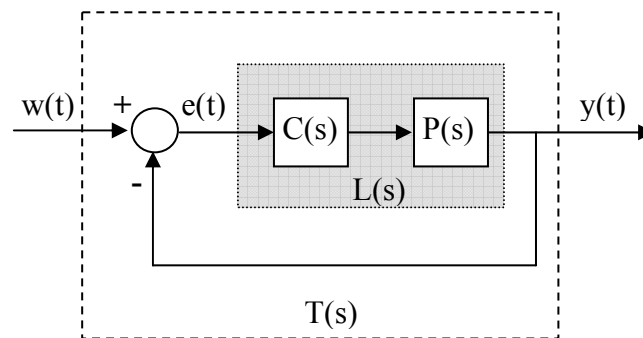
Frekvenční metody syntézy

Autor: Petr Havel, havelp@fel.cvut.cz

23.10.2005

Frekvenční metody návrhu se snaží upravit frekvenční charakteristiku *otevřené smyčky* $L(j\omega)$ tak, aby výsledná frekvenční charakteristika *uzavřené smyčky* $T(j\omega)$ měla požadovaný průběh. Mezi $L(j\omega)$ a $T(j\omega)$ existuje jednoznačný vztah

$$T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}. \quad (1)$$



Obr. 1 – Zpětnovazební řídicí systém

Typický přenos *uzavřené smyčky* bude vypadat jako dolní propust – bude mít $|T(s)| \cong 1$ až do jisté frekvence a od této frekvence dále bude amplituda přenosu klesat, $|T(s)| < 1$. V ideálním případě by měl mít jednotkovou amplitudu na všech frekvencích (za předpokladu nulové fáze by pak přenášel libovolně rychlé změny reference $w(t)$ v podstatě bez přechodového děje na výstup $y(t)$), to však není reálně uskutečnitelné (např. vlak by se rozjel okamžitě na 100 km/h) a navíc by se tím přenášely na výstup i nežádoucí vysokofrekvenční šумы.

Rezonanční převýšení a šířka přenášeného pásma

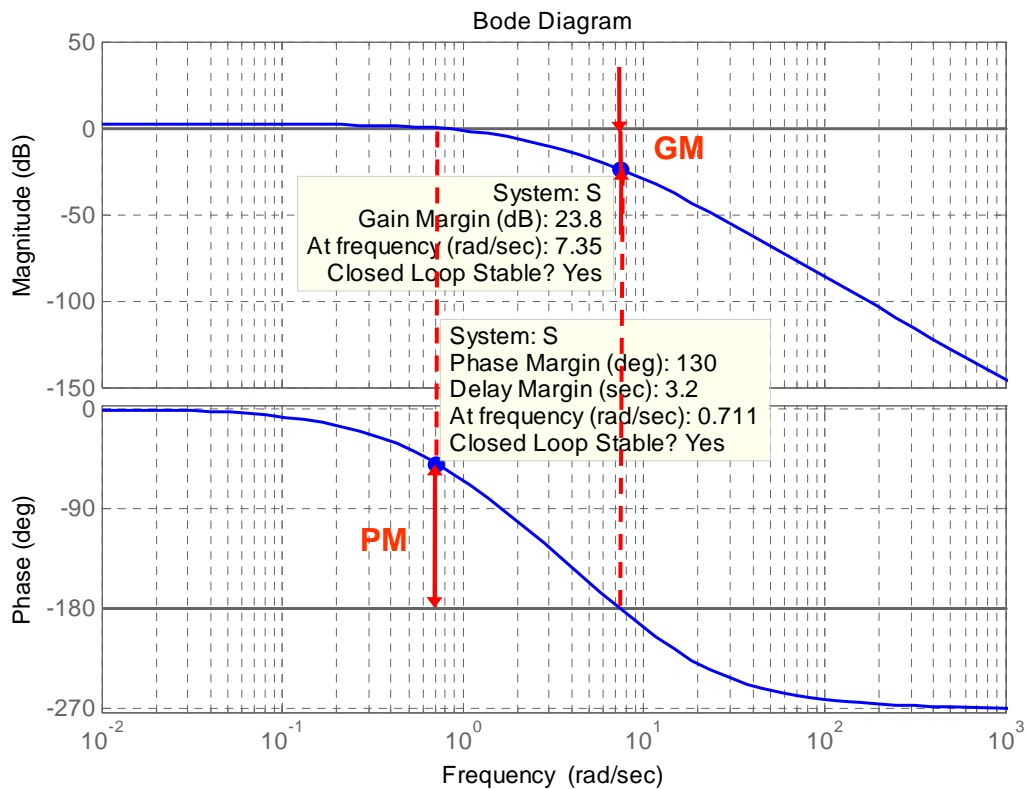
Pro hodnocení kvality řízení můžeme na frekvenční charakteristice *uzavřené smyčky* definovat následující míry:

- Rezonanční převýšení = maximální hodnota zesílení.
Velké rezonanční převýšení znamená velký překmit na přechodové charakteristice. Většina řídicích systémů se v praxi s rezonančním převýšením (1 až 3 dB) navrhuje, protože různé nelinearity typu necitlivost, které nejsou lineárním modelem popsány, totiž překmity zpravidla utlumí. Pokud by se vyžadovalo rezonanční převýšení nulové, tedy bez překmitu, byla by ve skutečnosti odezva zpětnovazebního řídicího systému zbytečně pomalá.
- Šířka přenášeného pásma = frekvence, na níž poklesne zesílení o 3 dB oproti zesílení na nízkých frekvencích.
Širší propustné pásmo znamená rychlejší odezvu systému, tj. kratší dobu náběhu přechodové charakteristiky (dobu, za kterou přejde výstup z 10 % na 90% ustálené

hodnoty). Na druhou stranu větší šířka přenášeného pásma však znamená, že systém může reagovat i na vysokofrekvenční rušení zpravidla přítomné na vstupech systému.

Amplitudová a fázová bezpečnost

Z Nyquistova kritéria vyplývají dvě bezpečnostní meze. Amplitudová bezpečnost (gain margin, GM) říká, kolikrát se ještě může zvětšit zesílení v *otevřené smyčce*, než se zpětnovazební systém dostane na mez stability. Pokud systém $L(s)$ přenáší signály na jisté frekvenci ω_{GM} s fázovým posunutím -180° , dostane se tak výstup do protifáze se vstupem (bude mít záporné znaménko). Zápornou zpětnou vazbou pak tento signál přivedeme zpět na vstup $L(s)$, kde se však v tomto případě sečte se signálem původním. Pokud má zpětnou vazbou vrácený signál nižší amplitudu než signál budicí, zůstane výstup omezený a zpětnovazební obvod stabilní. Nastane-li opačný případ, tj. bude zesílen, zpětnovazební systém bude nestabilní. Je-li zesílení pro frekvenci ω_{GM} jednotkové, jsme na hranici stability. Při návrhu zpětnovazební řízení je dobré vědět, kolikrát ještě můžeme zvýšit zesílení, než se dostaneme na mez stability.



Obr. 2 – Fázová a amplitudová bezpečnost na Bodeho diagramu

Fázová bezpečnost (phase margin, PM) podobně říká, o jak velké zpoždění (fázi) si můžeme dovolit zpozdít vstupní signál na frekvenci ω_{PM} , pro kterou má přenos $L(s)$ jednotkové zesílení, než se fáze obrátí na -180° a zpětnovazební systém se tak dostane na hranici stability.

Jedním z parametrů při návrhu regulátoru pak může být předem určená fázová bezpečnost otevřené smyčky. Její hodnota souvisí s relativním tlumením, pro systém druhého řádu a hodnoty $PM < 70^\circ$ lze aproximovat vztahem

$$\zeta \cong \frac{PM}{100}, \quad (2)$$

podle kterého lze přibližně zvolit PM při požadovaném tlumení ζ .

V praxi se model nebo získaná frekvenční charakteristika řízené soustavy nikdy nebude přesně shodovat s realitou a proto při návrhu řízení na modelu zvolíme dostatečnou fázovou bezpečnost, abychom si byli jisti, že i při aplikaci na reálném, ne zcela totožném systému bude zajištěna stabilita uzavřené smyčky. V praxi se typicky používá fázová bezpečnost $PM = 45^\circ$.

Hodnoty fázové a amplitudové bezpečnosti lze snadno nalézt například na Bodeho diagramu (Obr. 2).

PD regulátor

PD regulátor použijeme tehdy, budeme-li chtít rozšířit propustné pásmo uzavřené smyčky a zvýšit tím rychlost odezvy systému na vstupní signál. Zkusme navrhnout PD regulátor pro systém s přenosem

$$P(s) = \frac{50}{(s+1)(s+4)(s+10)}. \quad (3)$$

Přenos PD regulátoru je

$$C(s) = k_p + k_D s = k_D \left(s + \frac{k_p}{k_D} \right) = k_D (s + \omega_D), \quad \omega_D = \frac{k_p}{k_D}. \quad (4)$$

Parametr ω_D , zlomovou frekvenci PD regulátoru, volíme tak, aby byla shodná se zatím neznámou frekvencí ω_{PM} , na níž budeme měřit fázovou bezpečnost výsledného přenosu otevřené smyčky $L(s)$, tedy zvolíme $\omega_D = \omega_{PM}$. Na této frekvenci zvýší PD člen fázi soustavy o 45°

$$\arg(L(j\omega_D)) = \arg(P(j\omega_D)) + \arg(C(j\omega_D)) = \arg(P(j\omega_D)) + 45^\circ. \quad (5)$$

Fázová bezpečnost PM je definována jako (viz. Obr. 2)

$$-180^\circ + PM = \arg(L(j\omega_D)). \quad (6)$$

Kombinací vztahů (5) a (6) získáme

$$\arg(P(j\omega_D)) = -180^\circ + PM - 45^\circ. \quad (7)$$

Pokud zvolíme $PM = 45^\circ$, vyjde fáze soustavy P na frekvenci ω_D splňující

$$\arg(P(j\omega_D)) = -180^\circ. \quad (8)$$

Neznámou frekvenci ω_D tedy najdeme na frekvenční charakteristice řízeného systému $P(s)$ v místě, kde jeho fáze prochází -180° . Pro zvolený systém, jehož frekvenční charakteristika je vykreslena na Obr. 2, vychází $\omega_D = 7,35$.

Nyní zbývá určit druhý parametr PD regulátoru. Ten určíme z podmínky, že pokud je ω_D frekvence, na které se odečítá fázová bezpečnost, musí na ní zesílení otevřené smyčky $L(j\omega_D)$ být jednotkové

$$\begin{aligned} |L(j\omega_D)| &= |C(j\omega_D)| \cdot |P(j\omega_D)| = |k_D \cdot (j\omega_D + \omega_D)| \cdot |P(j\omega_D)| \\ &= |k_D| |j\omega_D + \omega_D| |P(j\omega_D)| = k_D \omega_D \sqrt{2} \cdot |P(j\omega_D)| = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Po úpravě získáme

$$k_D = \frac{1}{\omega_D \sqrt{2} \cdot |P(j\omega_D)|} \quad (10)$$

nebo po využití vztahu (4)

$$k_P = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot |P(j\omega_D)|}. \quad (11)$$

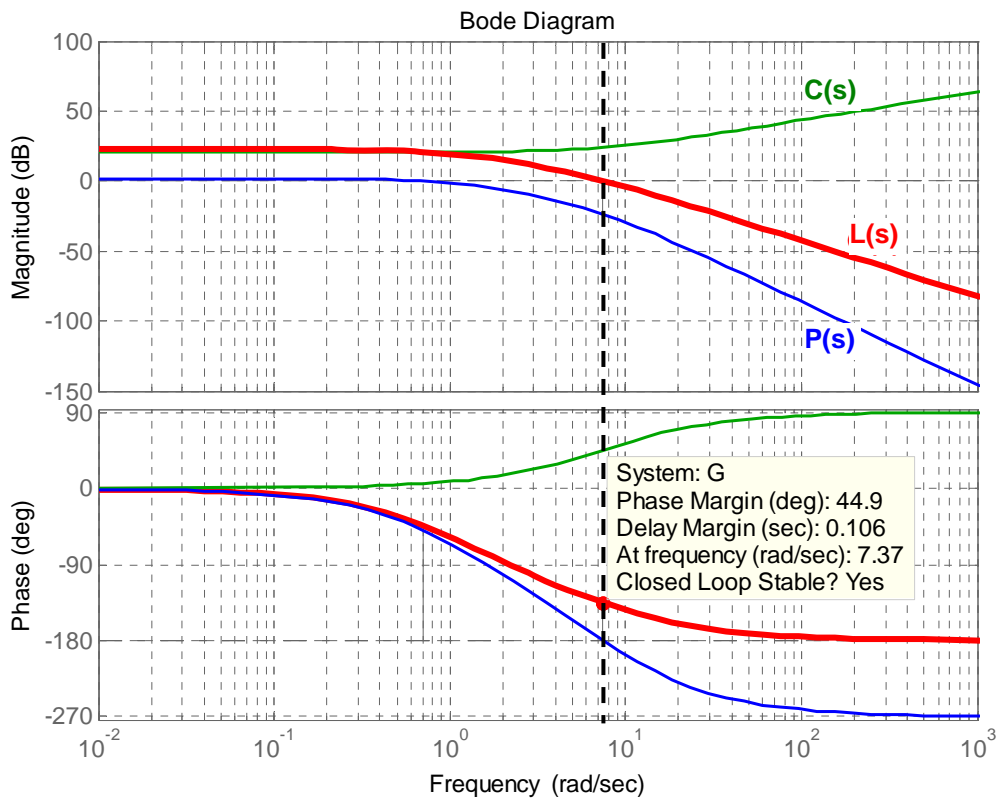
Zesílení $|P(j\omega_D)|$ opět odečteme z Obr. 2, $|P(j\omega_D)|_{dB} = -23,8 \text{ dB}$, neboli $|P(j\omega_D)| = 0,064$.

Po dosazení do (11) vyjde $k_P = 10,95$, případně $k_D = 1,49$.

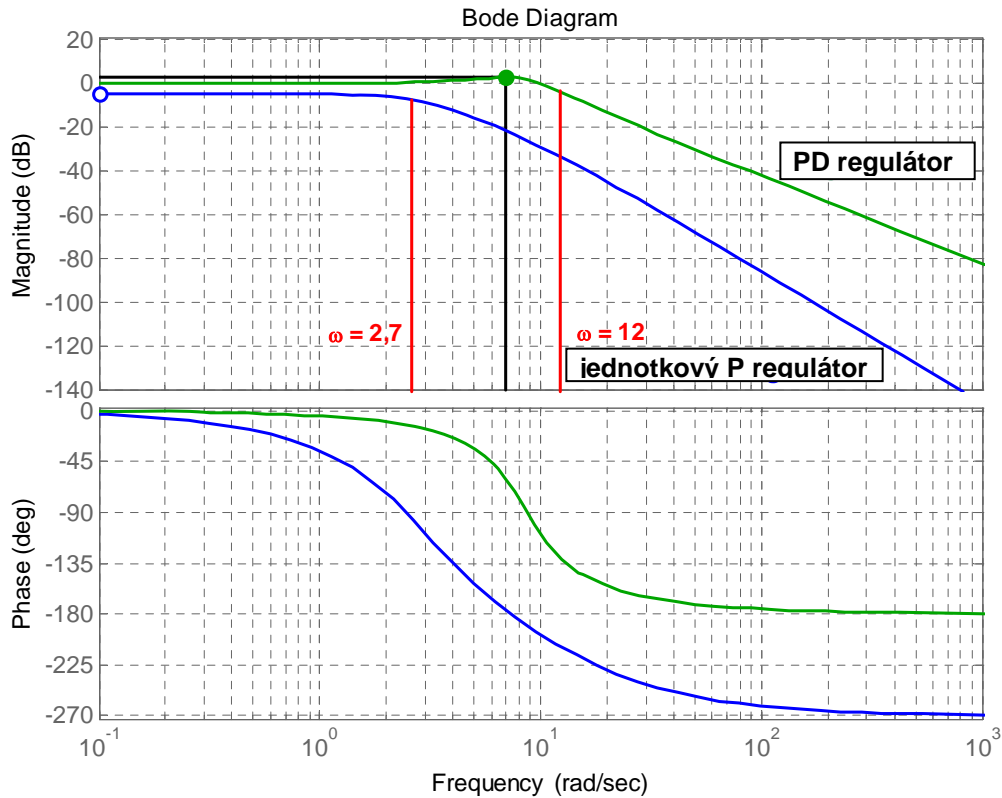
Nyní již můžeme vykreslit výslednou frekvenční charakteristiku otevřené smyčky $L(s)$, která je výsledkem sečtení charakteristik $C(s)$ a $P(s)$ v Bodeho diagramu, viz. Obr. 3. Lze se přesvědčit, že fázová bezpečnost je skutečně zvolených 45° .

Obr. 4 porovnává frekvenční charakteristiky uzavřené smyčky bez regulátoru a se zapojeným regulátorem. Je vidět, že jsme dosáhli požadavku na zvýšení propustného pásma (tj. zrychlení odezvy systému) a přitom amplitudové převýšení je na rozumné hodnotě 2,37 dB. Hodnoty na fázové charakteristice jsou vyšší a zmenšilo se tedy zpoždění v systému. Na Obr. 5, který ukazuje přechodovou charakteristiku, je vidět, že se podařilo zrychlit odezvu systému, tedy zmenšit dobu náběhu přechodové charakteristiky.

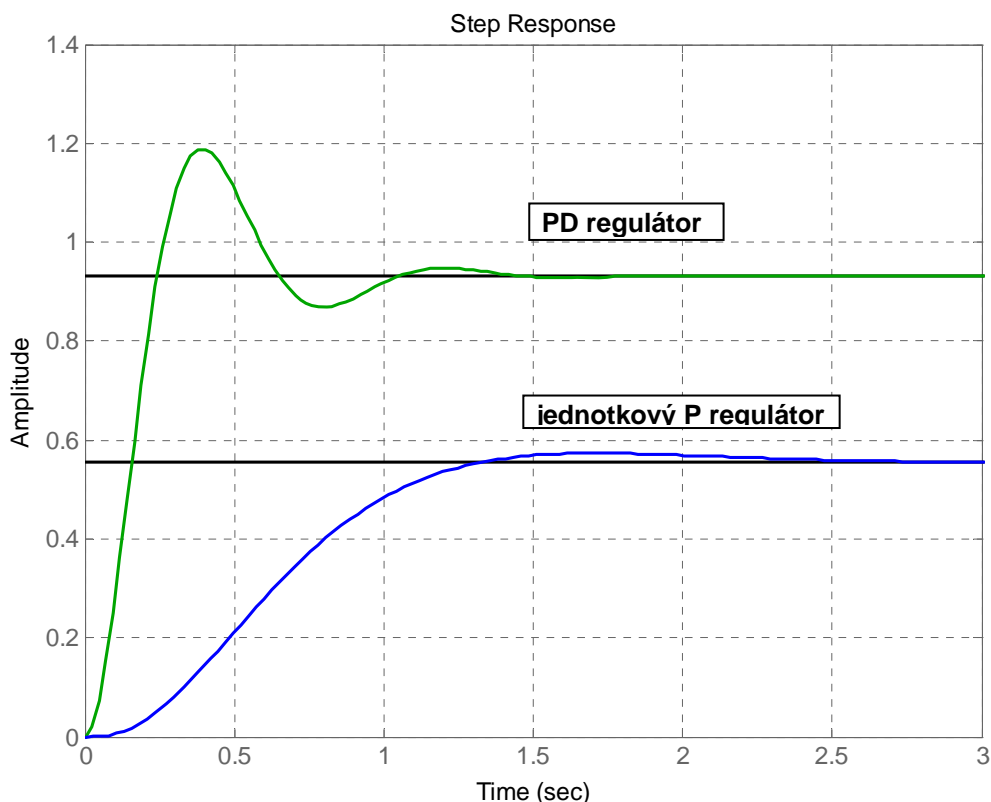
Výstup systému se však neustálil na žádané hodnotě 1, ustálená hodnota regulační odchylky $e(t)$ je nenulová. To je dáno tím, že přenos $L(s)$ není astatický, tj. ani regulátor ani soustava neobsahuje faktor $1/s$. Pokud je naším cílem nulová ustálená odchylka pro konstantní požadovanou veličinu, zvolíme např. PI regulátor.



Obr. 3 – Frekvenční charakteristika otevřené smyčky $L(s)$ s PD regulátorem



Obr. 4 – Frekvenční charakteristika uzavřené smyčky $T(s)$ s PD regulátorem



Obr. 5 – Přejchodová charakteristika s PD regulátorem

PI regulátor

Přenos PI regulátoru je

$$R(s) = k_p + k_I \frac{1}{s} = \frac{k_p}{s} \left(s + \frac{k_I}{k_p} \right) = \frac{k_p(\omega_I + s)}{s}, \quad \omega_I = \frac{k_I}{k_p} \quad (12)$$

Od přenosu PD regulátoru (4) se v podstatě liší pouze členem $1/s$, postup bude proto podobný. Člen $1/s$ způsobí, že na rozdíl od PD regulátoru, na frekvenci $\omega_I = \omega_{PM}$ sníží PI člen fázi soustavy o 45° , takže po úpravě rovnice (5) dostaneme

$$\arg(P(j\omega_I)) = -90^\circ \quad (13)$$

Z frekvenční charakteristiky $P(s)$ tedy odečteme frekvenci ω_I v místě, kde fáze prochází -90° , viz. Obr. 2, $\omega_I = 1,63$. Zbývá určit zesílení regulátoru tak, aby na frekvenci ω_I bylo výsledné zesílení jednotkové

$$\begin{aligned} |L(j\omega_I)| &= |C(j\omega_I)| \cdot |P(j\omega_I)| = \left| \frac{k_p}{j\omega_I} (j\omega_I + \omega_I) \right| \cdot |P(j\omega_I)| = \\ &= \frac{k_p}{\omega_I} \omega_I \sqrt{2} \cdot |P(j\omega_I)| = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

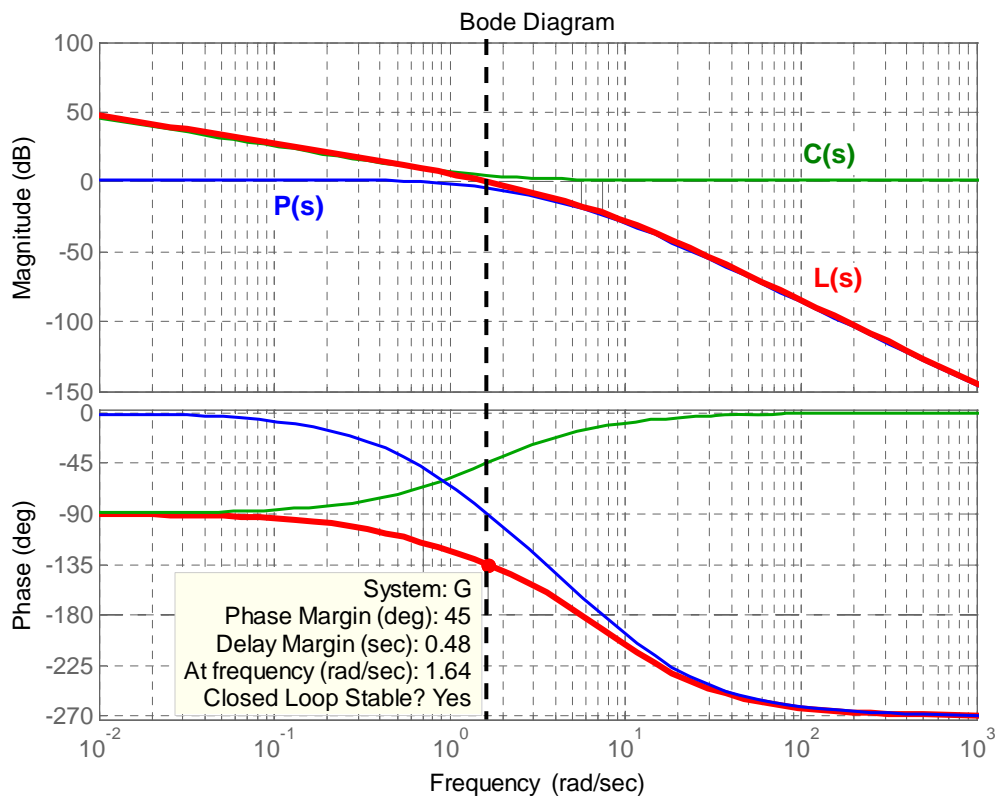
Pro zesílení k_p nebo k_I následně získáme

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot |P(j\omega_I)|}, \quad k_I = \frac{\omega_I}{\sqrt{2} \cdot |P(j\omega_I)|} \quad (15)$$

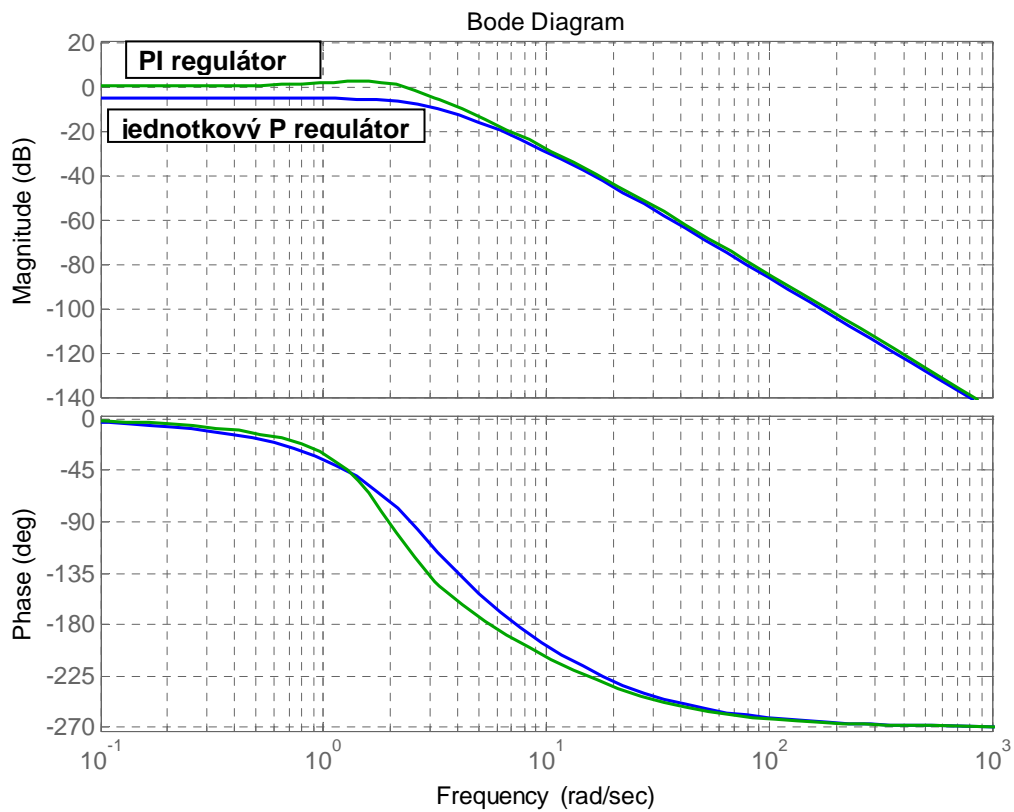
Zesílení $|P(j\omega_I)|$ opět odečteme z Obr. 2, $|P(j\omega_I)|_{dB} = -4,53 \text{ dB}$, neboli $|P(j\omega_I)| = 0,59$. Po dosazení do (15) vyjde $k_p = 1,19$, případně $k_I = 1,94$. Výsledný přenos uzavřené smyčky je

$$T(s) = \frac{59,5s + 97}{s^4 + 15s^3 + 54s^2 + 99,5s + 97} \quad (16)$$

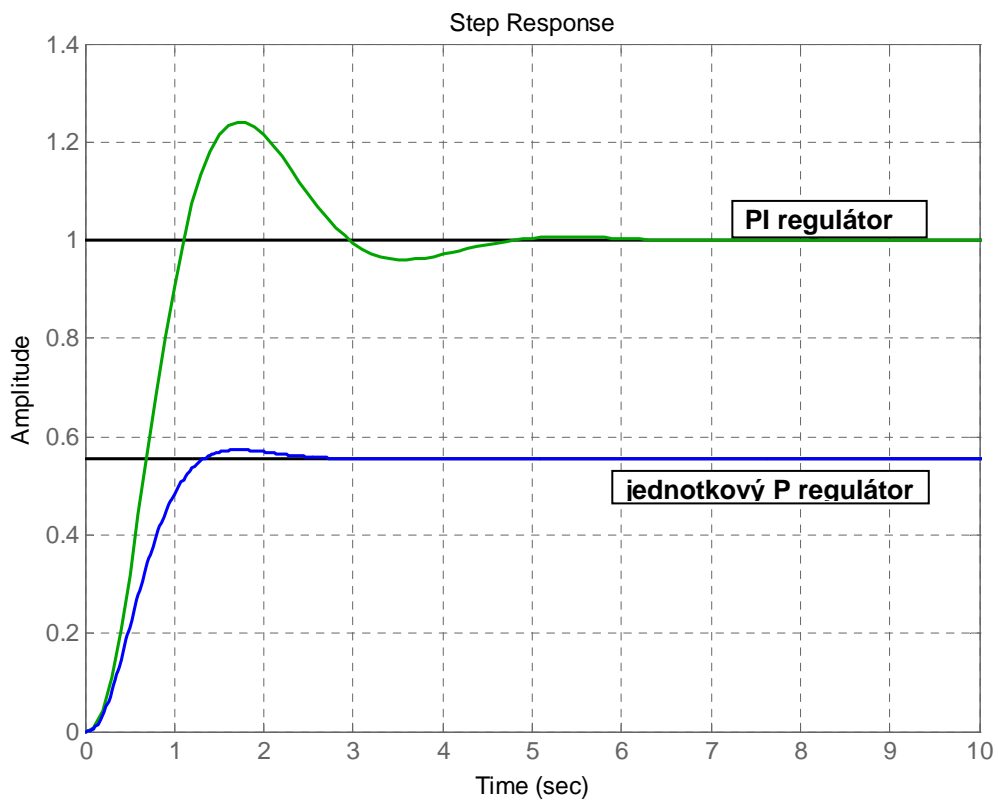
Úpravou přenosu otevřené smyčky $L(s)$ jsme opravdu dosáhli toho, že přenos uzavřené smyčky $T(s)$ má zesílení 1 a tedy ustálená regulační odchylka je nulová. To lze pozorovat i na frekvenční charakteristice na Obr. 7 i na přechodové charakteristice na Obr. 8. Integrovaná složka však snížila fázi uzavřené smyčky na jistých frekvencích (zvýšila zpoždění signálu), čímž se prodloužila doba regulace.



Obr. 6 – Frekvenční charakteristika otevřené smyčky $L(s)$ s PI regulátorem



Obr. 7 – Frekvenční charakteristika uzavřené smyčky $T(s)$ s PI regulátorem



Obr. 8 – Přechodová charakteristika s PI regulátorem

PID regulátor

Při návrhu PID regulátoru postupujeme podobně jako u PD regulátoru s tím, že frekvenci ω_I zvolíme takovou, aby se vliv integrační korekce na frekvenci $\omega_D = \omega_{PM}$, kde budeme měřit fázovou bezpečnost, téměř neprojevil, tj. typicky zvolíme $\omega_I = 0,1 \omega_D$.

Přenos PID regulátoru je

$$\begin{aligned} C(s) &= k_P + k_D s + k_I \frac{1}{s} = \frac{k_D}{s} \left(s^2 + \frac{k_P}{k_D} s + \frac{k_I}{k_D} \right) = \frac{k_D}{s} (s + \omega_I)(s + \omega_D) = \\ &= \frac{k_D}{s} (s^2 + (\omega_I + \omega_D)s + \omega_I \omega_D) \end{aligned} \quad (17)$$

kde vztahy mezi zlomovými frekvencemi a zesíleními jednotlivých složek jsou

$$\omega_I + \omega_D = \frac{k_P}{k_D}, \quad \omega_I \omega_D = \frac{k_I}{k_D}. \quad (18)$$

Do rovnice (5) musíme v tomto případě přidat fázi, o kterou se sníží fáze otevřené smyčky na frekvenci ω_D díky integrační složce, pro $\omega_D = 10 \omega_I$ bude úbytek právě $5,7^\circ$ (viz frekvenční charakteristika PID regulátoru)

$$\arg(L(j\omega_D)) = \arg(P(j\omega_D)) + \arg(C(j\omega_D)) = \arg(P(j\omega_D)) + 45^\circ - 5,7^\circ \quad (19)$$

Pokud zvolíme požadovanou fázovou bezpečnost $PM = 39,3^\circ$, vyjde fáze soustavy $P(s)$, na které budeme odečítat frekvenci ω_D stejně jako pro případ PD regulátoru

$$\arg(P(j\omega_D)) = -180^\circ, \quad (20)$$

tedy $\omega_D = 7,35$. Podmínka jednotkového zesílení pro PID regulátor je

$$\begin{aligned} |L(j\omega_D)| &= |C(j\omega_D)| \cdot |P(j\omega_D)| = \left| \frac{k_D}{j\omega_D} (j\omega_D + \omega_I)(j\omega_D + \omega_D) \right| \cdot |P(j\omega_D)| = \\ &= \left| \frac{k_D}{j\omega_D} (j\omega_D + 0,1\omega_D)(j\omega_D + \omega_D) \right| \cdot |P(j\omega_D)| = \frac{k_D}{\omega_D} \omega_D \sqrt{1 + 0,01\omega_D} \sqrt{2} \cdot |P(j\omega_D)| = 1 \end{aligned} \quad (21)$$

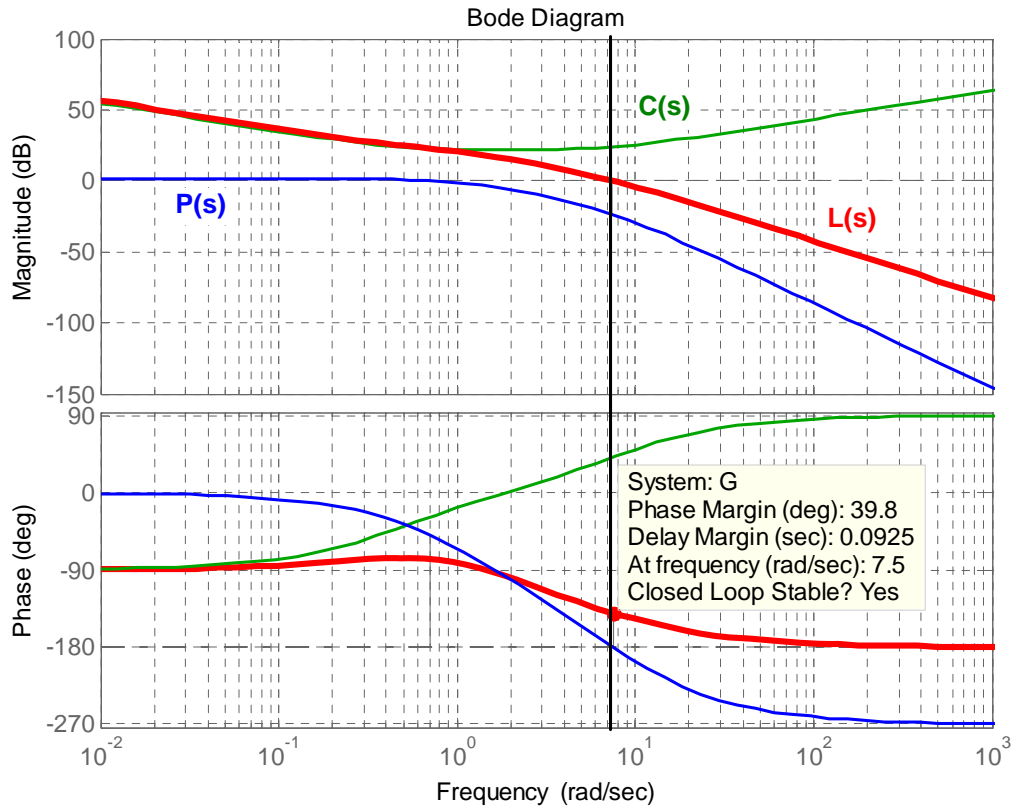
Pokud v posledním výrazu pod odmocninou zanedbáme člen 0,01 oproti jedničce, vyjde nám

$$k_D = \frac{1}{\omega_D \sqrt{2} \cdot |P(j\omega_D)|}, \quad (22)$$

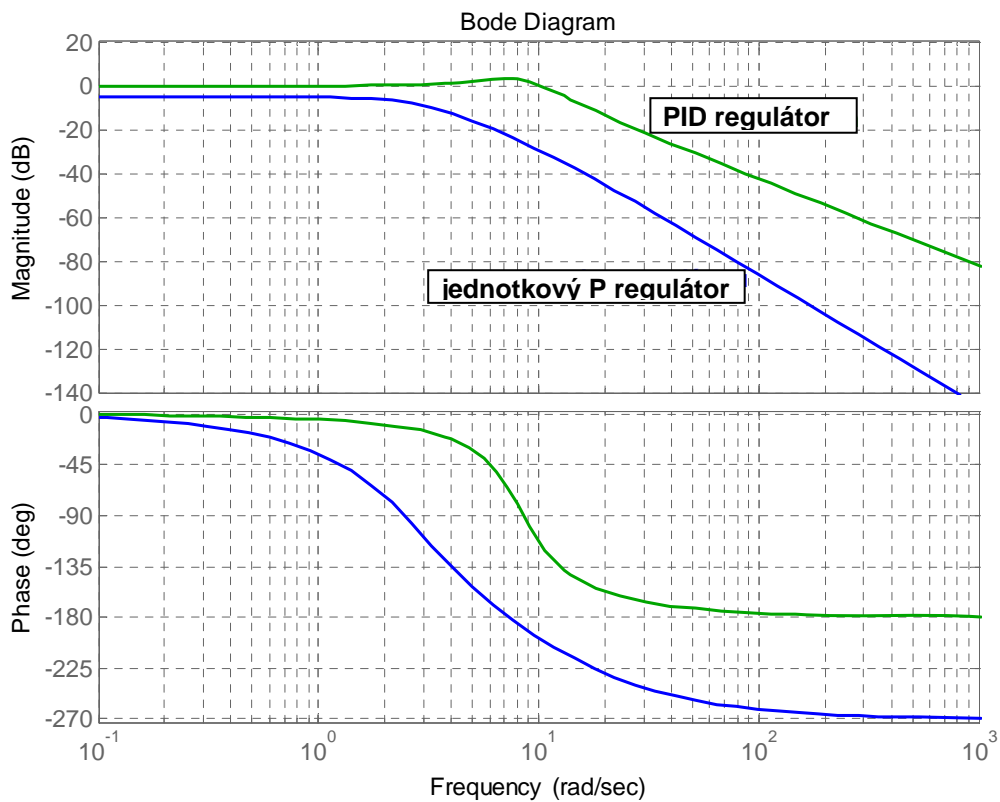
a s využitím (18)

$$k_p = 1,1\omega_D k_D, \quad k_I = 0,1k_D\omega_D^2 \quad (23)$$

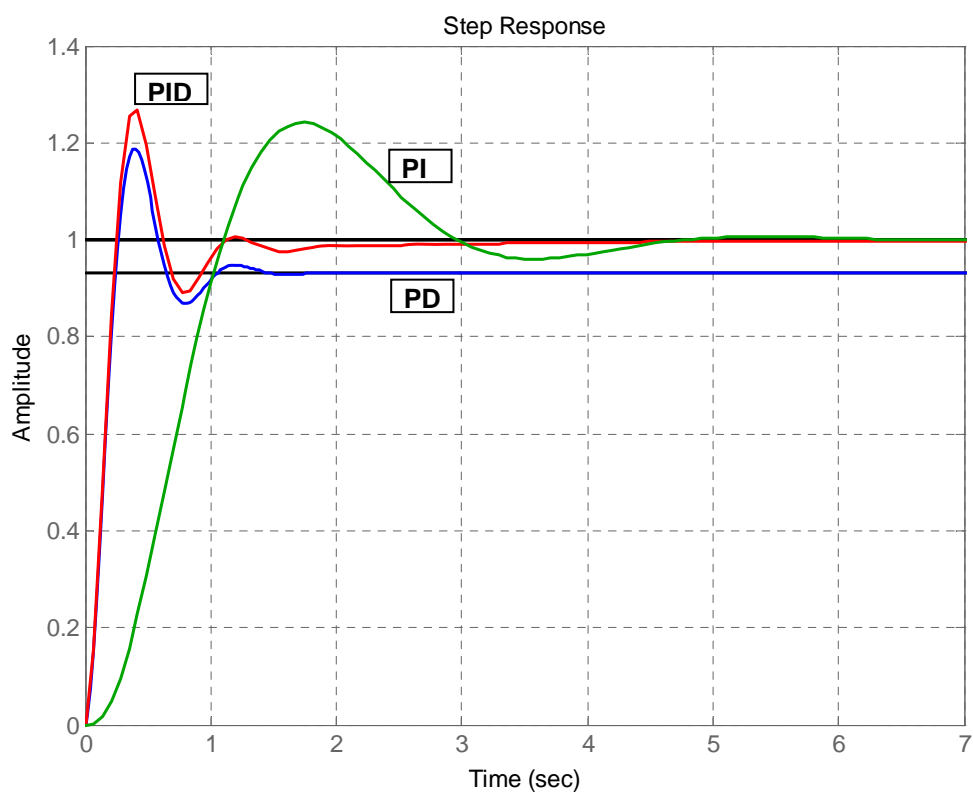
Dosadíme-li číselné hodnoty, dostaneme $k_D = 1,50$, $k_p = 12,15$, $k_I = 8,12$. Princip sčítání charakteristik a výsledná charakteristika otevřené smyčky je vidět na Obr. 9. Frekvenční charakteristika uzavřené smyčky vykazuje jak zvýšení propustného pásma, tak i jednotkové zesílení pro nízké frekvence. Porovnání odezvy na skok pro uzavřenou smyčku s PD, PI a PID regulátorem je uvedeno na Obr. 11.



Obr. 9 – Frekvenční charakteristika otevřené smyčky $L(s)$ s PID regulátorem



Obr. 10 – Frekvenční charakteristika uzavřené smyčky $T(s)$ s PID regulátorem



Obr. 11 – Přeřodová charakteristika s PD, PI a PID regulátorem

Literatura

[1] John, J. *Systémy a řízení*, Praha: Vydavatelství ČVUT, 1999.

[2] Horáček, P., *Systémy a modely*, Praha: Vydavatelství ČVUT, 1999.