Doplňky k přednášce
23 – Diskrétní systémy
Diskrétní frekvenční charakteristiky

Michael Šebek

Automatické řízení 2011

Matematika: Komplexní exponenciála

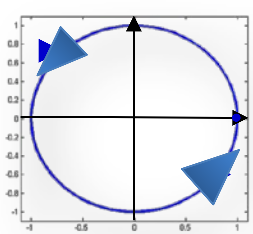
- Eulerův vztah $e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$
- Komplexní exponenciála

$$e^{\sigma+j\omega} = e^{\sigma}\left(\cos\omega + j\sin\omega\right)$$

Mimochodem, plyne z něj nejhezčí vztah matematiky $e^{j\pi} = -1$

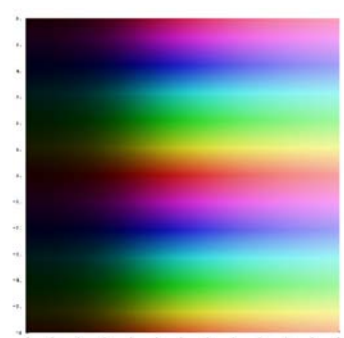
- Sinus a kosinus jsou periodické funkce s periodou 2π, proto i funkce
  $e^{\sigma+j\omega}$ je periodická s komplexní periodou $2\pi i$ a speciálně
  $e^{j\omega}$ (komplex. funkce reálné proměnné) je periodická s periodou 2π
  $e^{sh} = e^{j\omega h}$ je periodická s periodou $2\pi/h = \omega_s = 2\omega_N$
- Uvnitř periody jsou funkce symetrické, neboť sinus a kosinus jsou sym.

- Graf $e^{j\omega}$ v komplexní rovině



$$\left|e^{\omega}\right| = 1$$
$$\angle e^{j\omega} = \omega\,\mathrm{rad/s}$$

- „Graf“ $e^{\alpha+j\omega}$ v komplexní rovině



amplituda hodnot je vyznačená jasem, fáze hodnot barvou

$$\left|e^{\sigma+j\omega}\right| = e^{\sigma}$$
$$\angle e^{\sigma+j\omega} = \omega\,\mathrm{rad/s}$$

Frekvenční přenos a Bodeho graf

- frekvenční přenos $G(z) = G(e^{j\omega h})$ je periodická funkce ω s periodou

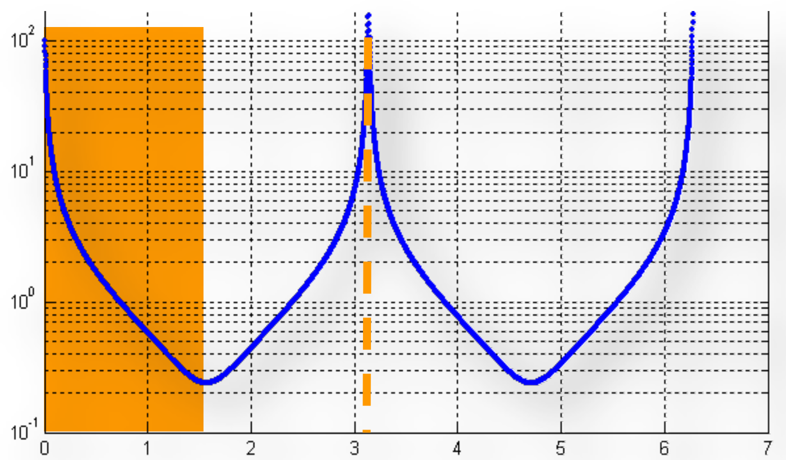
$$\frac{2\pi}{h_s} = \omega_s = 2\omega_N$$

- a uvnitř periody je symetrická

- graf $G(e^{j\omega h})$ proto často kreslíme

  jen pro $0 \le \omega \le \omega_N = \omega_s/2 = \pi/h$

- tedy na horní polovině kružnice



$\omega_N = \omega_s/2 = \pi/h$

$2\omega_N = \omega_s = 2\pi/h$

Příklad

- spojitý přenos $\dfrac{1}{s(s+1)}$ vzorkovaný s periodami $h = 0.2,\ 1,\ 2$

```
>> G=1/(1+s)/s
G = 1 / s(s+1)
>> Gz1=c2d(tf(G),0.2)
Transfer function:
 0.01873 z + 0.01752
----------------------
z^2 - 1.819 z + 0.8187
Sampling time: 0.2
>> Gz2=c2d(tf(G),1)
 Transfer function:
  0.3679 z + 0.2642
----------------------
z^2 - 1.368 z + 0.3679
Sampling time: 1
>> Gz3=c2d(tf(G),2)
Transfer function:
   1.135 z + 0.594
----------------------
z^2 - 1.135 z + 0.1353
Sampling time: 2
```

$h_1 = 0.2$

$\omega_s = 30 \times \omega_n$

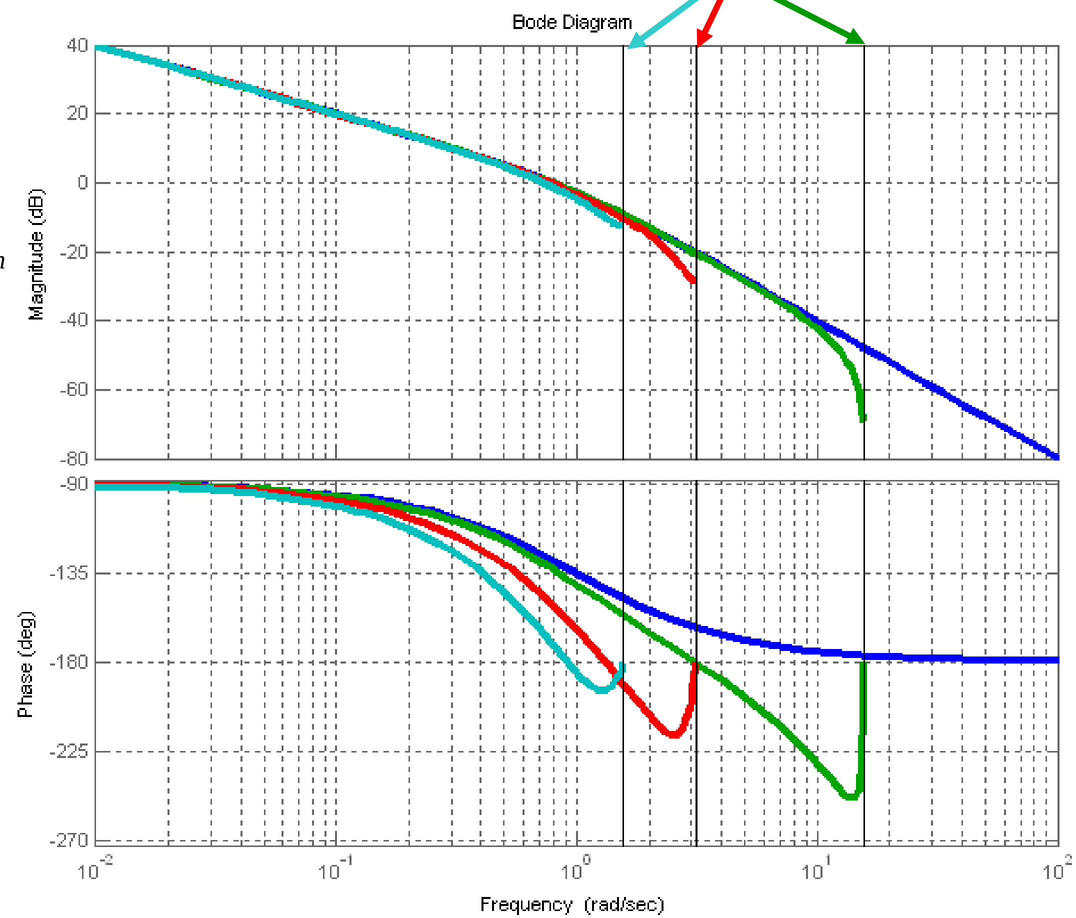
$h_2 = 1$

$\omega_s = 6 \times \omega_n$

$h_3 = 2$

$\omega_s = 3 \times \omega_n$

$\omega_N = \omega_s/2 = \pi/T_s$

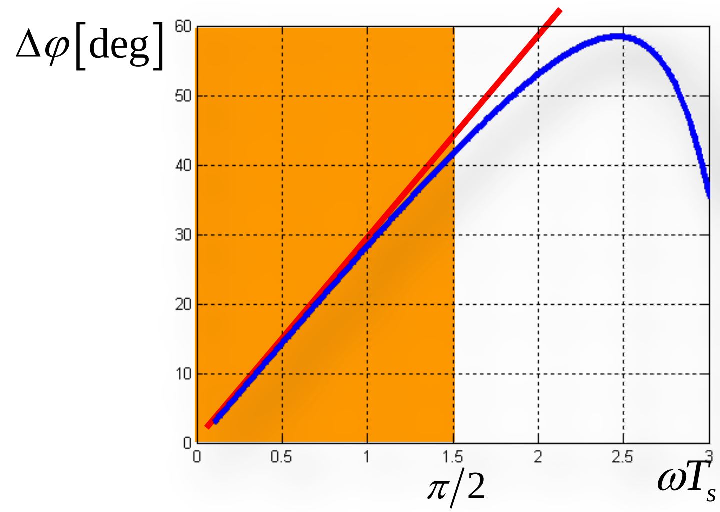


Diskrétní Bodeho graf

- nelze kreslit pomocí jednoduchých asymptot
- neplatí vztah mezi fází a derivací amplitudy v log-log souřadnicích
- vzorkování způsobuje přídavné fázové zpoždění

$$\Delta\varphi = \angle G(j\omega) - \angle G_z(j\omega)$$

$$\angle \frac{\omega T_s}{2}[\mathrm{rad}] \approx \angle 29\omega h[\deg]$$



- tato aproximace je dobrá do $\omega T_s = \pi/2$ tj. do $\omega = \omega_s/4$
- protože přechodové frekvence bývají menší $\omega_c < \omega_s/4$
- odhadneme PM po vzorkování a tvarování tak, že od „spojitého“ PM prostě odečteme faktor

$$\Delta\varphi = \frac{\omega h}{2}[\mathrm{rad}] \approx 29\omega h[\deg]$$

Diskrétní Nyquistův graf

- $G(z)=G(e^{j\omega h})$ je periodická funkce ω s periodou $\omega_s = 2\omega_N = 2\pi/h$

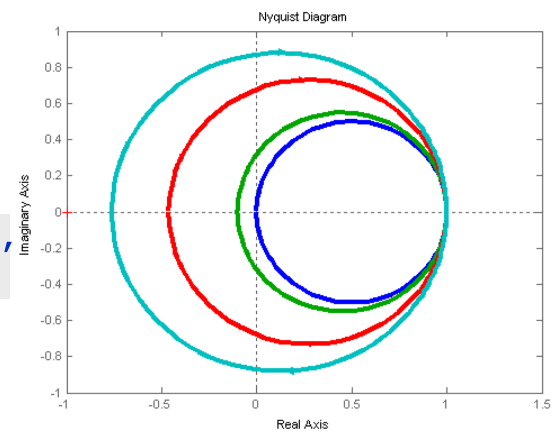
Diskrétní Nyquistův graf $G(e^{j\omega h})$

- proto ho často kreslíme jen pro $0 \le \omega \le \omega_N = \omega_s/2 = \pi/h$ (na horní polovině kružnice)
- Control System Tbx ho (default) kreslí na celé kružnici $-\omega_N \le \omega \le \omega_N$

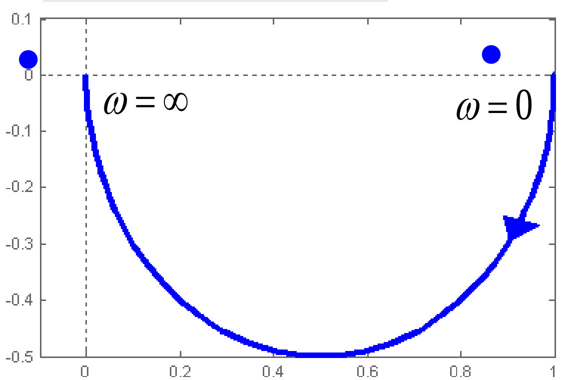
Příklad

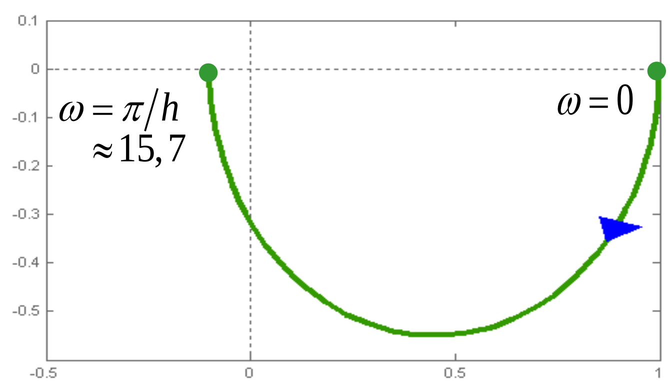
$G(s)=1/1+s$

```
G=1/(1+s);nyquist(tf(G),c2d(tf(G),0.2),
  c2d(tf(G),1),c2d(tf(G),2))
```




```
G,nyquist(G)
G = 1 / 1 + s
```






```
Gz=c2d(tf(G),0.2),
nyquist(Gz)
Transfer function:
  0.1813
----------
z - 0.8187
Sampling time: 0.2
```

Příklad

- spojitý přenos $\dfrac{1}{s(s+1)}$ vzorkovaný s periodami $h = 0.2,\, 1,\, 2$ s

```
>> G=1/(1+s)/s
G = 1 / s(s+1)
>> Gz1=c2d(tf(G),0.2)
Transfer function:
 0.01873 z + 0.01752
 -----------------------
z^2 - 1.819 z + 0.8187
Sampling time: 0.2
>> Gz2=c2d(tf(G),1)
 Transfer function:
  0.3679 z + 0.2642
 -----------------------
z^2 - 1.368 z + 0.3679
Sampling time: 1
>> Gz3=c2d(tf(G),2)
Transfer function:
   1.135 z + 0.594
 -----------------------
z^2 - 1.135 z + 0.1353
Sampling time: 2
```

$h_1 = 0.2$

$\omega_s = 30 \times \omega_n$

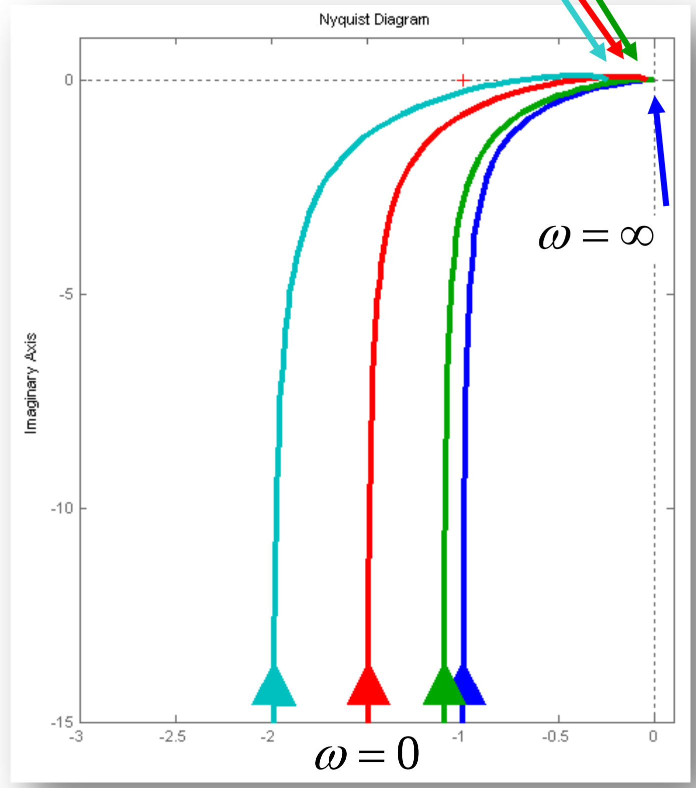
$h_2 = 1$

$\omega_s = 6 \times \omega_n$

$h_3 = 2$

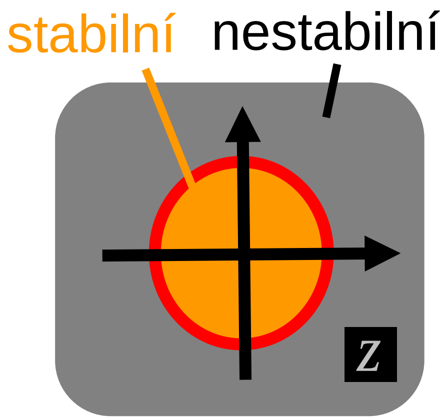
$\omega_s = 3 \times \omega_n$

$\omega_N = \omega_s / 2 = \pi / h$



Diskrétní Nyquistovo kritérium stability

Na rozdíl od spojitého případu



na rozdíl od spojitého případu

- nestabilita je vně jednotkové kružnice, ale tuto oblast není jednoduché obkroužit konturou
- proto naopak obkroužíme oblast stability a
- omezíme se na případy, kdy funkce $H(z)$ má stejný počet nul a pólů – označíme ho *n*
- To je splněno skoro vždy, např. když $L(z)$ je striktně ryzí
- Tedy pro $H(z)=1+L(z)$ označíme (jako ve spojitém případě)

  Z … počet nestabilních CL pólů = počet nestabilních nul funkce $H(z)$
  P … počet nestabilních OL pólů = počet nestabilních nul funkce $H(z)$
  N … počet obkroužení kritického bodu -1 Nyquistovým grafem $L(z)$ ve stejném směru, ve kterém obkružujeme jednotkovou kružnici (obvykle proti směru hod. ručiček), opačná obkr. počítáme záporně

Pak z principu argumentu plyne:

- $N =$ počet stabilních nul $H(z)$ – počet stabilních pólů $H(z)$

$$N=(n-Z)-(n-P)=P-Z\Rightarrow Z=P-N$$

Diskrétní Nyquistovo kritérium stability

Diskrétní

CL systém má $\boxed{Z = P - N}$ nestabilních pólů, kde

N … počet bodu -1 Nyquistovým grafem $L(s)$

P … počet nestabilních OL pólů.

Nyquistovo kritérium stability

CL systém je stabilní $\Longleftrightarrow$ $\boxed{P = N}$

N … počet obkroužení Nyquistova grafu $L(s)$

P … počet nestabilních OL pólů

- Zvláštní případ: stabilní OL systém

Nyquistovo kritérium stability pro stabilní OL systém

Je-li OL systém stabilní, pak je i CL systém stabilní

$\Longleftrightarrow$ Nyquistův graf $L(s)$ neobkrouží kritický bod -1

Spojitý

pro srovnání

$Z = N + P$

ale tady je *N*

$P = -N$

ale tady je –*N* , takže je to vlastně stejně

Odvození obojího - pro srovnání

- n … počet nul fce $H(z)$ (= OL pólů) = počet pólů $H(z)$ (= CL pólů)
  Z … počet nestabilních CL pólů = počet nestabilních nul funkce
  P … počet nestabilních OL pólů = počet nestabilních nul funkce
  N … počet obkroužení kritického bodu -1 Nyquistovým grafem
  ve stejném směru, ve kterém obkružujeme uvažovanou oblast

Spojitý

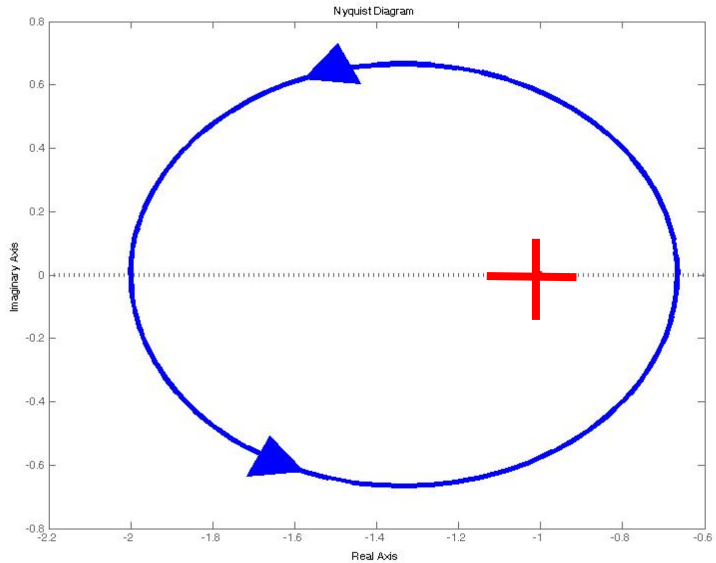
- obkružujeme oblast nestability po směru hodinových ručiček
- z Principu argumentu plyne
$$N = Z - P$$
- Z toho plyne
$$Z = P + N$$
- CL stabilní když $Z = 0$, tj. když
$$P = -N$$
tedy obkroužení opačným směrem
- tedy proti směru hodin. ručiček

Diskrétní

- obkružujeme oblast stability proti směru hodinových ručiček
- z Principu argumentu plyne
$$N = (n - Z) - (n - P) = P - Z$$
- z toho plyne
$$Z = P - N$$
- CL stabilní když $Z = 0$, tj. když
$$P = N$$
tedy obkroužení stejným směrem
- tedy proti směru hodinových ručiček

Příklad

- Přenos otevřené smyčky $L(z)=\dfrac{2}{z-2}$
- je nestabilní, tedy $P=1$
- Nyquistův graf je




```
>> a=z-2,b=2
a =
    -2 + z
b =
     2
>> nyquist(b/a)
>> a+b
ans =
     z
```

tedy je $N=1$

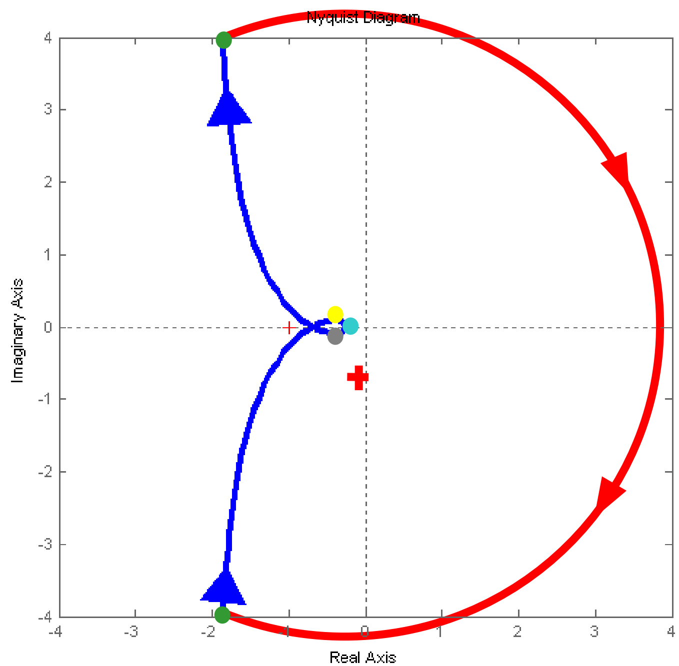
- a uzavřená smyčka je stabilní
- Opravdu charakteristický polynom uzavřené smyčky je $c(z)=\left(z-2\right)+2=z$, tedy stabilní

Příklad

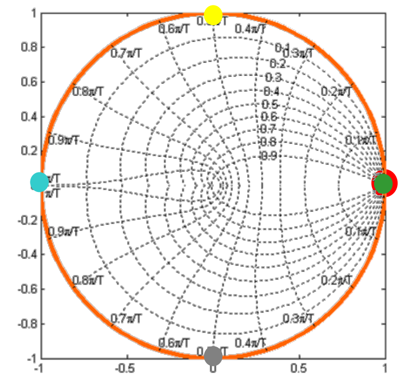
Vyhodnoťte CL stabilitu diskrétního systému

- se soustavou $G(s) = 1/s(s+1)$
- vzorkovanou s frekvencí 0.5 Hz (tj. s periodou vzorkování $h = 2\ \mathrm{s}$)
- s tvarovacím členem nultého řádu (ZOH)
- a diskrétním proporcionálním regulátorem ($L(z) = KG(z)$)

```
>> G=1/(1+s)/s
G = 1 / s(s+1)
>> Gz3=c2d(tf(G),2)
Transfer function:
   1.135z + 0.594
---------------------
z^2 - 1.135z + 0.1353
Sampling time: 2
>> zpk(Gz3)
Zero/pole/gain:
1.1353 (z+0.5232)
-----------------
(z-1) (z-0.1353)
Sampling time: 2
K=1;Lz=K*Gz3;
nyquist(Lz)
```



$$N = 0, P = 0 \Rightarrow Z = 0$$



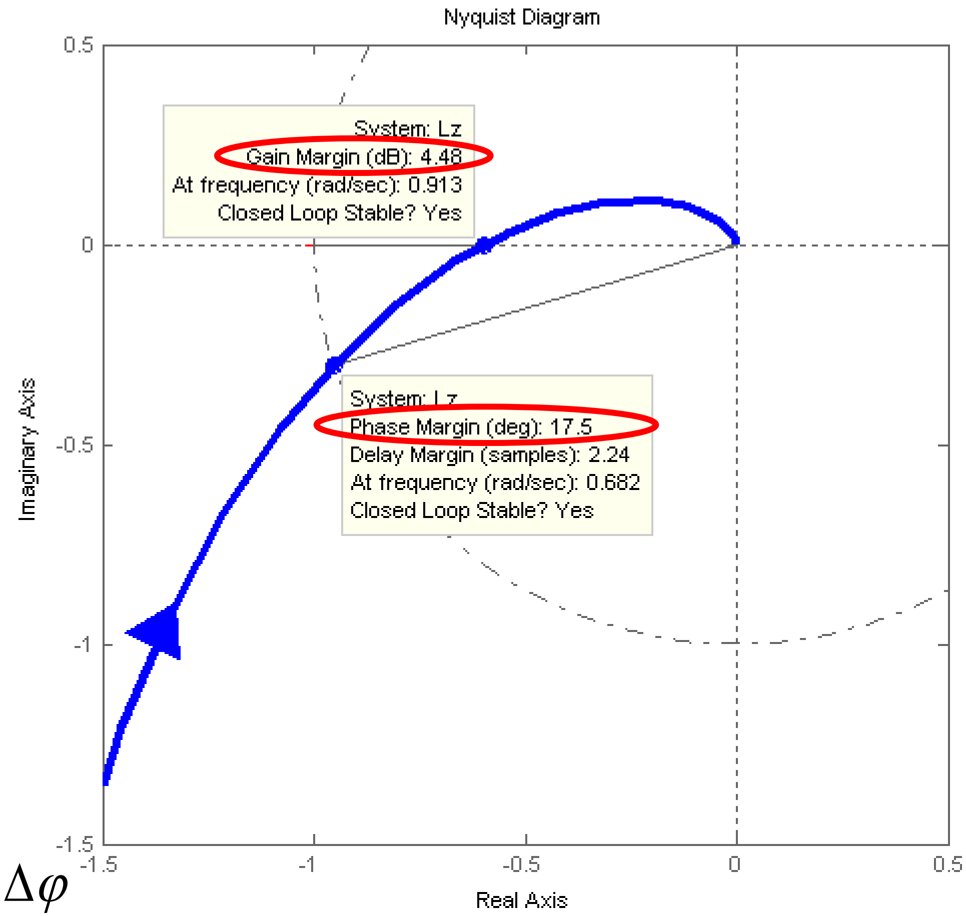
```
>> pformat rootc
>> Gzp=sdf(Gz3);
>> K=1;Lz=K*Gzp;
>> cl_char=Lz.num+Lz.den
cl_char =
   (z+0.8540i)(z-0.8540i)
>> isstable(cl_har_pol)
ans = 1
```

Příklad: Diskrétní PM a GM

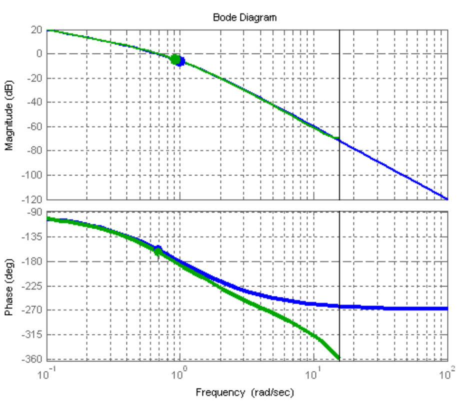
Pro soustavu $G(s) = 1/s(s+1)^2$ vzorkovanou s frekvencí $5\ \mathrm{Hz}$, ZOH a diskrétní P regulátor s $K = 1$

- najděte diskrétní PM a GM

```
>> Gz=c2d(tf(1/(1+s)^2/s),1/5,'zoh');
>> zpk(Gz)
Zero/pole/gain:
0.0012077(z+3.381)(z+0.2422)
---------------------------
      (z-1)(z-0.8187)^2
Sampling time: 0.2
>> Lz=Gz;nyquist(Lz)
```



- GM ≈ 1.7 ≈ 5dB, PM ≈ 17.5º
- spojité hodnoty skoro stejné:



GM ≈ 6dB

PM ≈ 21º

Korekce:

$$PM_{\text{dis}} = PM_{\text{spoj}} - \Delta\varphi$$

$$= PM_{\text{spoj}} - 29\omega h = 21^\circ - 29^\circ \times 0.6 \times 0.2 = 21^\circ - 3.5^\circ = 17.5^\circ$$