Doplňky k přednášce
24 – Diskrétní řízení
Diskrétní metody analogické spojitým

Michael Šebek

Automatické řízení 2013

Metody diskrétního návrhu

- Metody diskrétního návrhu, které jsou stejné (velmi podobné) metodám spojitého návrhu podrobně nepřednášíme, jenom je ukážeme na příkladech
- Proto byly z hlavních přednáškových slajdů přesunuty sem
- Zde uvedené slajdy jsou hlavně pro ty studenty, kteří metody spojitého návrhu neznají
- Ostatním mohou posloužit studentů jako opakování

Stavová zpětná vazba – diskrétní verze

- Skoro stejné jako ve spojitém případě:

Soustava, regulátor (stavová ZV) a výsledný systém

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}u_k \qquad \mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\left(\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}\right)}_{\mathbf{F}_{\text{new}}}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}u_{C,k}$$

$$u_k = -\mathbf{K}\mathbf{x}_k + u_{C,k}$$

Úloha přiřazení charakteristického polynomu (pólů)

- Původní charakteristický polynom soustavy

$$\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F}\right) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

- chceme změnit na požadovaný charakteristický polynom

$$p_{new}(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \cdots + p_1 z + p_0 = \det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{new}}\right)$$

- Řešení - stejně, jako ve spojitém případě
- Např. Ackermannovým vzorcem

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} p_{\text{new}}(\mathbf{F})$$

Návrh stavové ZV ve zvláštním tvaru

- Pokud je soustava v kanonickém tvaru řiditelnosti

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- pak je v něm i celkový systém se ZV

$$\mathbf{F}_{\text{new}}=\mathbf{F}-\mathbf{GK}=\left[\begin{array}{cccc|c} -(a_{n-1}+k_1) & -(a_{n-2}+k_2) & \cdots & -(a_1+k_{n-1}) & -(a_0+k_n) \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- a k řešení stačí porovnat koeficienty

$$\begin{aligned} k_1 &= p_{n-1}-a_{n-1} \\ &\vdots \\ k_{n-1} &= p_1-a_1 \\ k_n &= p_0-a_0 \end{aligned}$$

Řešení: Obecný případ transformací

- Obecný případ můžeme vyřešit transformací souřadnic na triviální případ, řešením triviálního případu a transformací zpět do původních souřadnic
- Nejprve ze zadaných matic soustavy vypočteme její char. Polynom
$$\det\left(z\mathbf{I}-\mathbf{F}\right)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$
a z něj snadno napíšeme rovnice soustavy transformované do kanonického tvaru $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)=\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{x}}(k)+\tilde{\mathbf{G}}\tilde{u}(k)$
- z rovnic před a po transformaci teď najdeme transformační matici $\tilde{x}=T^{-1}x$ například pomocí matic řiditelnosti $T^{-1}=\tilde{C}C^{-1}$
kde $C=\begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{FG} & \dots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G}\end{bmatrix}$ a $\tilde{C}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{G}} & \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{G}} & \dots & \tilde{\mathbf{F}}^{n-1}\tilde{\mathbf{G}}\end{bmatrix}$
- v těchto souřadnicích snadno najdeme (řešením triviálního případu) požadovanou ZV matici $\tilde{\mathbf{K}}$
- a nakonec ji transformuje do souřadnic původních $\mathbf{K}=\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{T}^{-1}$

Jiný způsob výpočtu transformační matice

- výpočet transformační matice pomocí matice řiditelnosti a její inverze není numericky příliš spolehlivý
- ukážeme proto ještě alternativní postup
- díky zvláštní struktuře kanonického tvaru v něm má matice řiditelnosti i její inverze také zvláštní tvar
- např. pro soustavu řádu 3 je

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & -a_2 & a_2^2 - a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a také

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- obecně je

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jiný způsob výpočtu transformační matice

- protože pro inverzi transformační matice je

$$\mathbf{T}^{-1} = \tilde{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1}$$

- a přitom

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \ldots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

- a právě odvozené

$$\tilde{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- dostáváme celkem

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} + a_{n-1}\mathbf{G} & \ldots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} + a_{n-1}\mathbf{F}^{n-2}\mathbf{G} + \cdots + a_1\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

Řešení Ackermannovým vzorcem

Obecný případ můžeme vyřešit i přímo pomocí

Ackermannova vzorce

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} p_{cl}(\mathbf{F})$$

kde použijeme

- matici řiditelnosti

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \dots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

- a do požadovaného charakteristického polynomu

$$p_{cl}(z) = z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \cdots + p_1 z + p_0$$

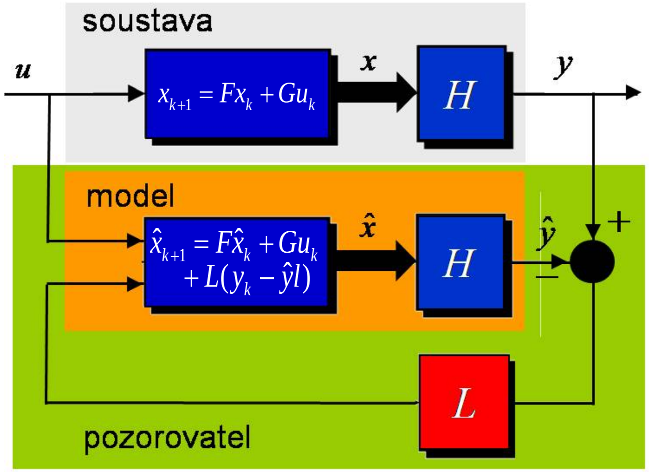
- dosadíme matici soustavy

$$p_{cl}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^n + p_{n-1}\mathbf{F}^{n-1} + \cdots + p_1\mathbf{F} + p_0\mathbf{I}$$

Pozorovatel pro diskrétní soustavu

- Pokud chceme použít stavovou ZV, ale nedokážeme měřit všechny stavy, můžeme použít pozorovatele
- Pro diskrétní soustavu

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}u_k,\, y_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k$$



- se pozorovatel skládá z modelu soustavy a injekce z výstupu

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}u_k + \mathbf{L}(y_k - \hat{y}_k)$$
$$\hat{y}_k = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k$$

- Pro odchylku odhadování $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ platí

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \left(\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H}\right)\tilde{x}_k = \mathbf{F}_{\text{poz}}\tilde{\mathbf{x}}_k$$

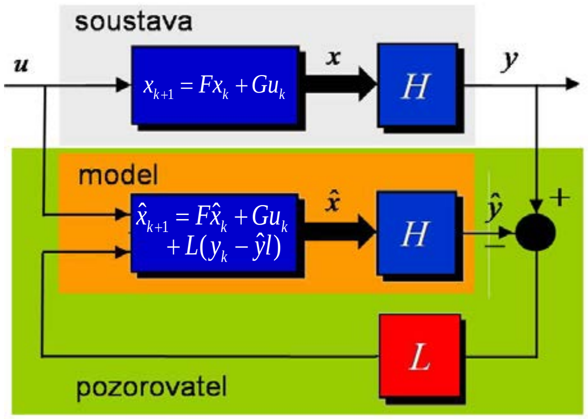
Pozorovatel pro diskrétní soustavu

- Vhodnou volbou matice $\mathbf{L}$ zajistíme, aby matice pozorování

$$\mathbf{F}_{\text{poz}} = \mathbf{F} - \mathbf{LH}$$

- měla požadovaný charakteristický polynom

$$p_{\text{poz}}(z) = \det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{poz}}\right) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$



- Jeho kořeny (póly pozorovatele) obvykle je volíme 2× až 6× rychlejší než póly regulátoru. Jen když je šum senzoru tak silný, že je hlavním problémem, volíme póly pozorovatele 2× pomalejší než póly regulátoru
- Při návrhu postupuje jako ve spojitém případě (tj. duálně k stav. ZV)
- Např. užijeme duální Ackermannův vzorec

Vše jako ve spojitém případě

$$\mathbf{L} = p_{\text{poz}}(\mathbf{F})\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix}0 & \ldots & 0 & 1\end{bmatrix}^T$$

kde matice pozorovatelnosti

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix}\mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1}\end{bmatrix}$$

Nepovinné: Luenbergerův redukovaný pozorovatel

- Právě probraný pozorovatel s rovnicí $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}u_k + \mathbf{L}(y_k - \hat{y}_k)$ obsahuje zbytečné zpoždění, neboť jeho stav $\hat{x}_k$ v čase k závisí jen na měřeních provedených do času k-1
- Vůbec nevyužívá znalosti výstupu v čase k, který je také k dispozici
- Protože lze výstup přímo měřit (a považovat za jednu ze stavových veličin), stačí vlastně odhadovat o 1 stav méně
- Je tedy výhodnější pozorovatel s rovnicí

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}u_{k-1} + \mathbf{L}\left[y_k - \mathbf{H}\left(\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}u_{k-1}\right)\right] \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}\right)\left(\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}u_{k-1}\right) + \mathbf{L}y_k\end{aligned}$$

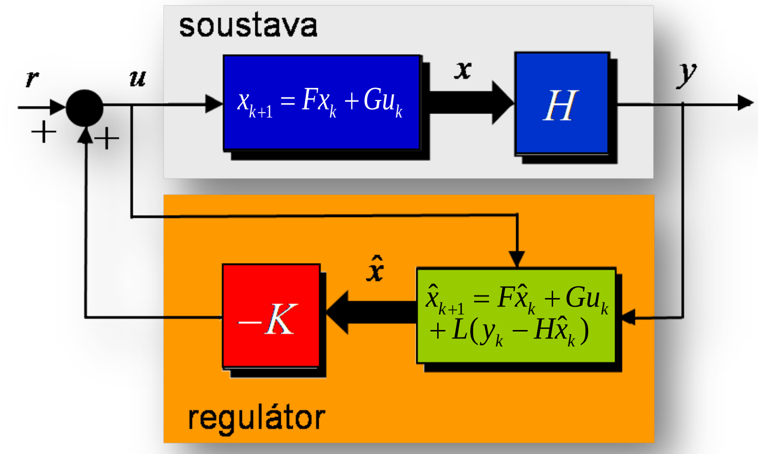
- Pro jeho chybu odhadu platí $\tilde{\mathbf{x}}_k = \left(\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{F}\right)\tilde{\mathbf{x}}_{k-1} = \widehat{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}$
- a volbou matice $\mathbf{L}$ opět můžeme nastavit libovolná vlastní čísla
- Dále $y_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H}\tilde{x}_k = \left(\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{H}\right)\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}$ a pokud vybereme $\mathbf{L}$ tak, aby $\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{H} = \mathbf{0}$, je výstup odhadován bez chyby a můžeme eliminovat jednu rovnici! Redukovaný pozorovatel neobsahuje model soustavy!

Spojení pozorovatele a stavové ZV

- Připojíme-li matici stavové ZV ke stavům pozorovatele (namísto stavů soustavy)
- Dostaneme klasickou ZV z výstupu
- Vše známe ze spojitého řízení tu platí:
- Takový regulátor má stavové rovnice

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \left(\mathbf{F} - \mathbf{LH} - \mathbf{GK}\right)\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{L}y_k + \mathbf{G}r_k$$

$$u_k = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_k + r_k$$



Vše jako ve spojitém případě

- A přenos

$$u(z) = -\mathbf{K}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH} + \mathbf{GK}\right)^{-1}\mathbf{L}y(z) + \left(1 - \mathbf{K}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH} + \mathbf{GK}\right)^{-1}\mathbf{G}\right)r(z)$$

- Celkový systém má (ve stavech $x, \tilde{x}$) hezké rovnice

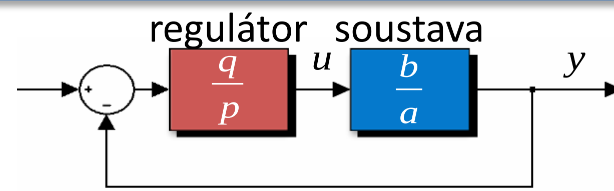
$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{k+1}\\ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F} - \mathbf{GK} & \mathbf{GK}\\ \mathbf{0} & \mathbf{F} - \mathbf{LH}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k\\ \tilde{\mathbf{x}}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{G}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} r_k$$

takže jeho póly jsou:

póly regulace

+póly pozorování

Přiřazení pólů polynomiálně



Polynomiální řešení v *z* - stejné jako spojité

- Pro danou soustavu $b(z)/a(z)$

  a danou poloho pólů, vyjádřenou CL charakteristickým pol. $c(z)$
- Vyřešíme rovnici $a(z)p(z)+b(z)q(z)=c(z)$

Polynomiální řešení v *d*

- Podobné $b(d)/a(d),c(d) \Rightarrow a(d)p(d)+b(d)q(d)=c(d) \Rightarrow q(d)/p(d)$

Deadbeat polynomiálně - zvláštní případ přiřazení pólů

- V z volíme $c(z)=z^m$, kde $m \geq$ (2× řád soustavy) – 1 , řešíme

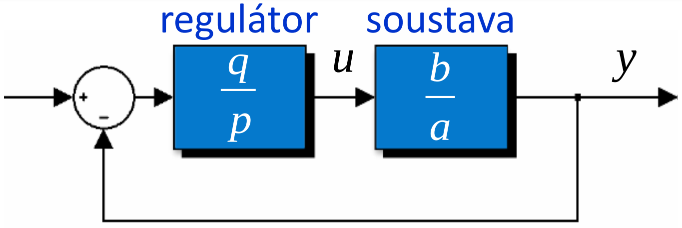
$$a(z)p(z)+b(z)q(z)=z^m$$

  a vybereme řešení minimálního stupně ve q
- Při řešení v z^{-1} je to ještě jednodušší: Řešíme rovnici

$$a(z^{-1})p(z^{-1})+b(z^{-1})q(z^{-1})=1$$

Umístění pólů polynomiálně: v z

Polynomiální řešení v *z*

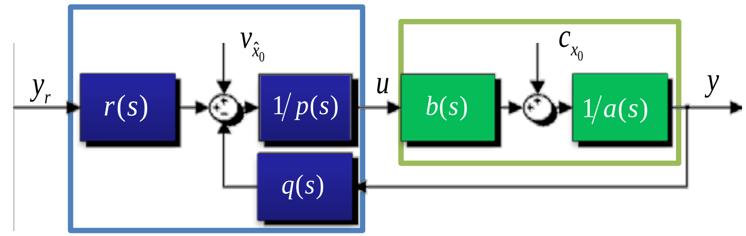


- Je stejné, jako spojité řešení v *s*
- Pro danou soustavu $b(z)/a(z)$

  a danou poloho pólů, vyjádřenou CL charakter. polynomem $c(z)$
- Vyřešíme $a(z)p(z)+b(z)q(z)=c(z)$ a dostaneme $q(z)/p(z)$

Regulátor 2DOF

- Pokud má řídicí systém referenční vstup
- Je přirozené použít regulátor se dvěma stupni volnosti (2DOF)



$$u(z) = -\frac{q(z)}{p(z)}y(z) + \frac{r(z)}{p(z)}y_r(z) \qquad p(z)u(z) = -q(z)y(z) + r(z)y_r(z)$$

- pro kauzalitu musí být $\deg p \geq \deg\left[q(z), r(z)\right]$
- klasické řízení odchylkou (1DOF) je zvláštní případ, kdy $q(z) = r(z)$
- při návrhu vypočteme ZV část ze známé rovnice

$$a(z)p(z) + b(z)y(z) = c(z)$$

- kde vhodně volíme CL charakteristický polynom
- ze srovnání se stavovým přístupem plyne, že $c(z) = c_c(z)c_o(z)$
- kde faktory jsou $c_c(z) = \det\left(zI - F + GK\right), c_o(z) = \det\left(zI - F + LH\right)$

Přímá větev

- výsledný přenos celého systému je

$$y(z) = \frac{b(z)r(z)}{a(p)p(z)+b(z)q(z)}y_r(z)$$

$$= \frac{b(z)r(z)}{c(z)}y_r(z) = \frac{b(z)r(z)}{c_c(z)c_o(z)}y_r(z)$$

- přímou větev volíme např. tak, aby vykrátila póly pozorovatele tj. $c_o(z) \mid r(z)$ tedy například jako

$$r(z) = t_0 c_o(z)$$

$$y(z) = \frac{t_0 b(z)}{c_c(z)}y_r(z)$$

- pak jsou řídicí signály zavedeny tak, že negenerují odchylku pozorování
- konstantu t_0 volíme tak, abychom zajistili požadované statické zesílení
- obvykle má být statické zesílení = 1, takže nastavíme $t_0 = c_c(1)/b(1)$

Diskrétní sledování – asymptotické a deadbeat

Asymptotické sledování je u diskrétních systémů stejné jako u spojitých

- rovnice jsou stejné

  $ap + bq = m, \qquad f^{-}t + br = m, \qquad m$ stabilní

- Podmínky jsou stejné

  1) $\gcd(a,b)$ stabilní; 2) $\gcd(f^{-},b) = 1$; 3) $f^{-} \mid a$

- řešení je stejné v z i v z^{-1}, až na to, že při řešení v $\boldsymbol{z}$ ještě musíme vybrat m patřičně vysokého stupně

Na rozdíl od spojitého případu tu ale existuje varianta deadbeat , tedy sledování za konečný počet kroků:

- Pokud postupujme v *z*, volíme $m(z) = z^{n-1}$

  pokud v z^{-1}, volíme $m(z^{-1}) = 1$
- a vybereme řešení minimálních stupňů (nastává koincidence)
- řešení existuje, právě když $\gcd(a,b) = 1$

  ostatní podmínky jsou stejné.