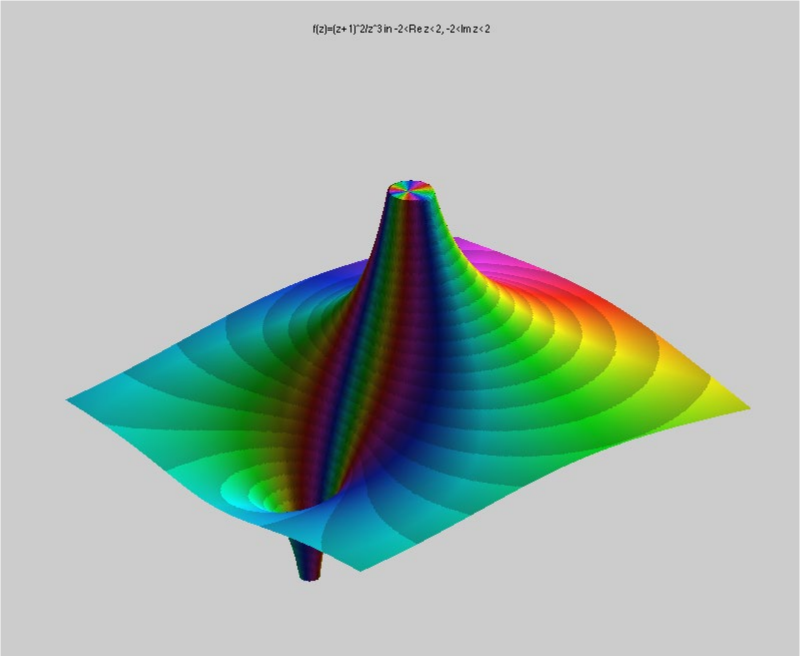
Příklady k přednášce
3 - Póly, nuly a odezvy

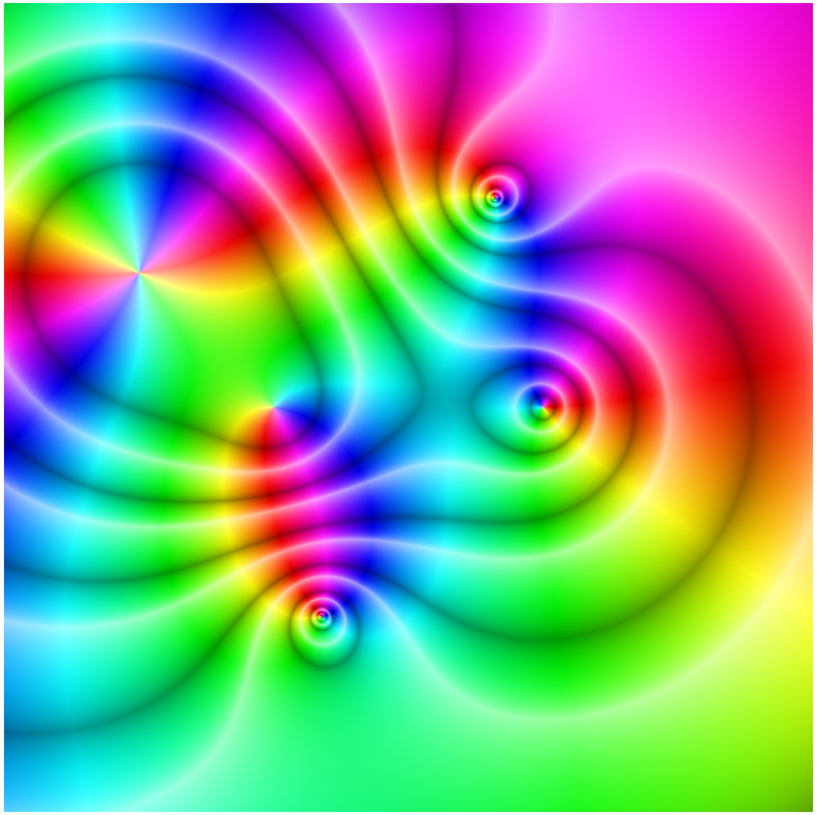
Michael Šebek

Automatické řízení 2019

21.02.2019

Póly





Nuly přenosu

Pro přenos $G(s)=(s+1)/(s+2)$ s pólem $s=-2$ a nulou $z=-1$ porovnejme odezvy

- Systém v klidu a vstupní signál $u(t)=2\times 1(t)\rightarrow u(s)=2/s$

$$y(s)=\frac{s+1}{s+2}\frac{2}{s}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s} \qquad y(t)=e^{-2t}+1(t)$$

odezva má obvyklou přirozenou a nucenou složku

- Systém v klidu a vstupní signál $u(t)=e^{-zt}=e^{-t}\rightarrow u(s)=1/(s+1)$

$$y(s)=\frac{s+1}{s+2}\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s+2} \qquad y(t)=e^{-2t}$$

nucená složka chybí a tedy vstupní frekvence je blokována

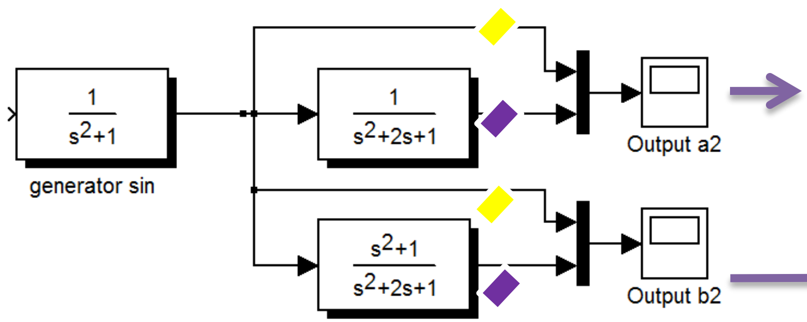
- Stejný vstupní signál a ještě $u(0^-)=0, y(0^-)=-1$

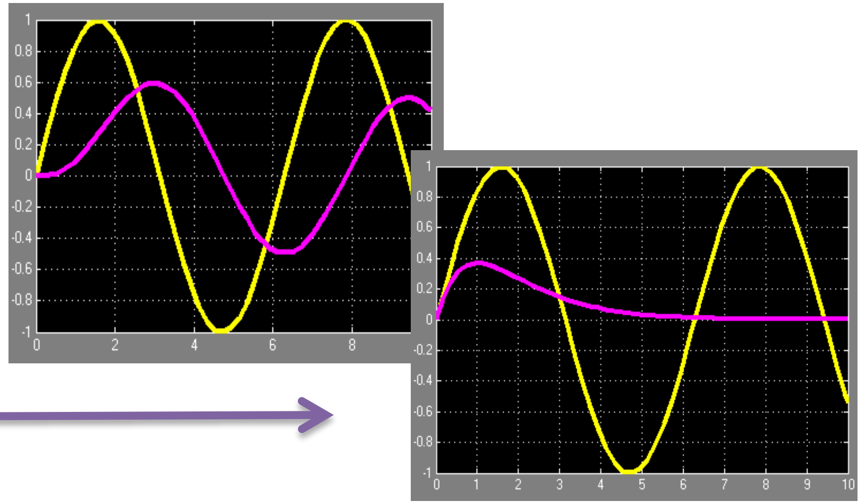
$$y(s)=\frac{s+1}{s+2}u(s)+\frac{1}{s+2}y(0-)=\frac{s+1}{s+2}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=0$$

výstup je nulový při nenulovém vstupu

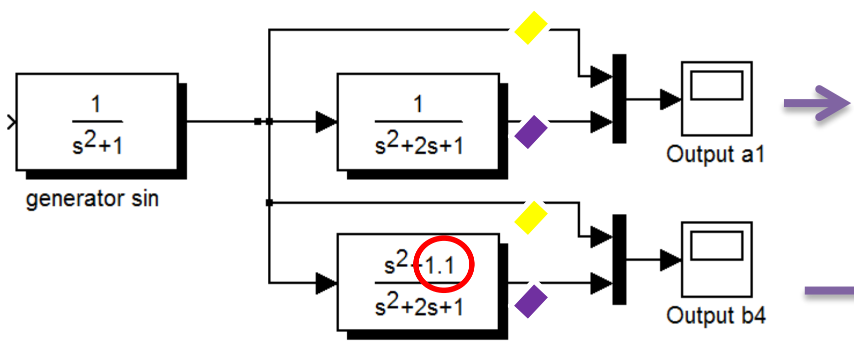
Příklad: Blokování vstupu

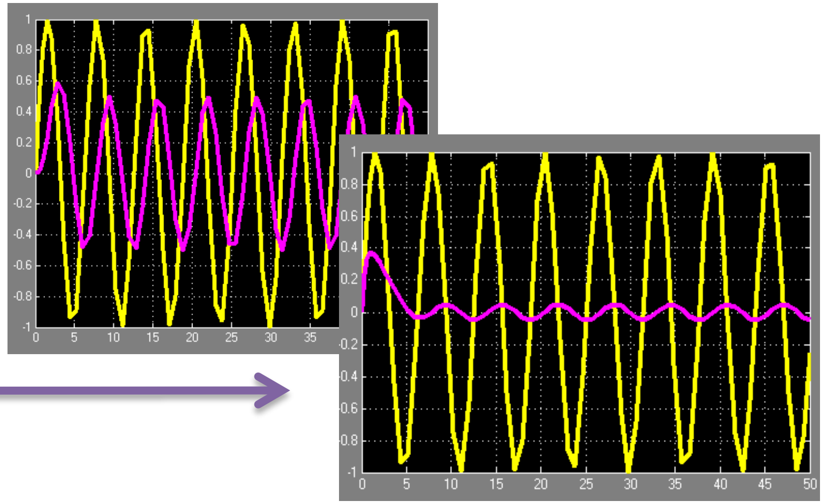
Blokování sinusovky





Nepřesné krácení





Schurův doplněk - odvození

Obecně

$$\underset{(n+l)\times(n+l)}{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C(sI-A)^{-1} & I_l \end{bmatrix}}\underset{(n+l)\times(n+m)}{\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix}}\underset{(n+m)\times(n+m)}{\begin{bmatrix} I_n & -(sI-A)^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} sI-A & 0 \\ 0 & C(sI-A)^{-1}B+D \end{bmatrix}$$

takže

$$\det\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} sI-A & 0 \\ 0 & C(sI-A)^{-1}B+D \end{bmatrix}$$

$$= \det(sI-A)\det\left(C(sI-A)^{-1}B+D\right)$$

Speciálně pro $m=1, l=1$

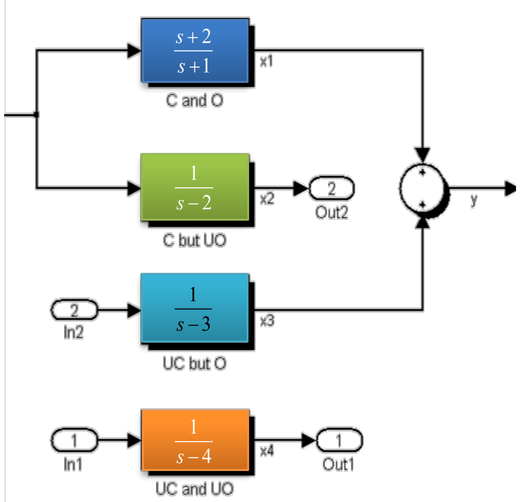
$$= \det(sI-A)\left(C(sI-A)^{-1}B+D\right)$$

Příklad: nuly systému

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+[1]u$$

$$\begin{bmatrix}sI-A & B\\ -C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1&0&0&0\\0&s-2&0&0\\0&0&s-3&0\\0&0&0&s-4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-1&-0&-1&-0\end{bmatrix} & [1]\end{bmatrix}$$



$$y(s)=\frac{(s+2)(s-2)(s-3)(s-4)}{(s+1)(s-2)(s-3)(s-4)}u(s)=\frac{(s+2)}{(s+1)}u(s)$$

```
>> A=diag([-1 2 3 4]); B=[1;1;0;0];C=[1 0 1 0];D=[1];
>> [rank([s*I-A, B;-C D]),rank([s*I-A, B]),rank([s*I-A;-C])]
ans =   5      4      4
>> zi=-2;[rank([zi*I-A, B;-C D]),rank([zi*I-A, B]),rank([zi*I-A;-C])]
ans =   4      4      4
>> zi=2;[rank([zi*I-A, B;-C D]),rank([zi*I-A, B]),rank([zi*I-A;-C])]
ans =   4      4      3
>> zi=3;[rank([zi*I-A, B;-C D]),rank([zi*I-A, B]),rank([zi*I-A;-C])]
ans =   4      3      4
>> zi=4;[rank([zi*I-A, B;-C D]),rank([zi*I-A, B]),rank([zi*I-A;-C])]
ans =   4      3      3
```

Vliv dalších pólů – Dominantní póly

$$y(s)=\frac{bc}{s\left(s^2+as+b\right)\left(s+c\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+as+b}+\frac{D}{s+c}$$

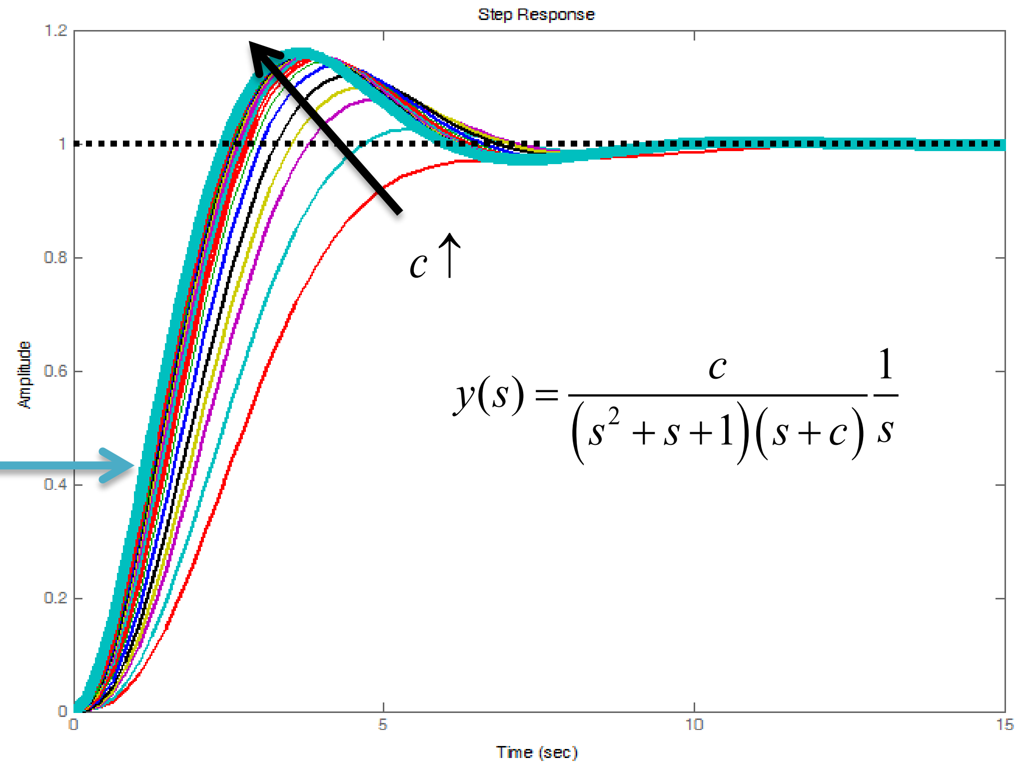
$$A=1, B=\frac{-c^2-ca}{c^2+b-ca}, C=\frac{-c^2a+ca^2-bc}{c^2+b-ca}, D=\frac{-b}{c^2+b-ca}$$

$$\lim_{-c\to-\infty} A=1,$$

$$\lim_{-c\to-\infty} B=-1, \lim_{-c\to-\infty} C=-a,$$

$$\lim_{-c\to-\infty} D=0$$

$$y(s)=\frac{1}{s^2+s+1}\frac{1}{s}$$



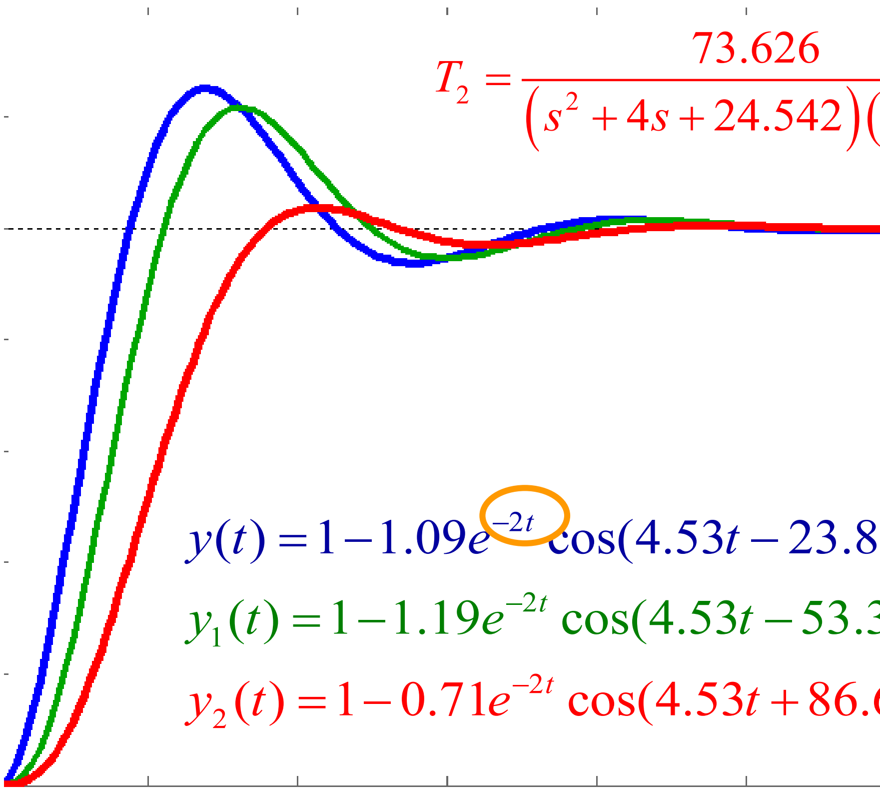
Příklad – dominantní póly

Můžeme zanedbat reálný pól v těchto přenosech ?

$$T = \frac{24.542}{s^2 + 4s + 24.542}$$

$$T_1 = \frac{245.42}{\left(s^2 + 4s + 24.542\right)\left(s + 10\right)}$$

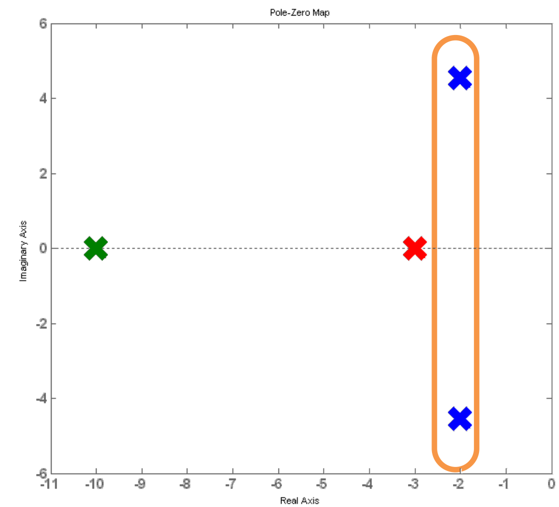
$$T_2 = \frac{73.626}{\left(s^2 + 4s + 24.542\right)\left(s + 3\right)}$$



$$y(t) = 1 - 1.09e^{-2t}\cos(4.53t - 23.81^\circ)$$

$$y_1(t) = 1 - 1.19e^{-2t}\cos(4.53t - 53.34^\circ) - 0.29e^{-10t}$$

$$y_2(t) = 1 - 0.71e^{-2t}\cos(4.53t + 86.63^\circ) - 1.1e^{-3t}$$



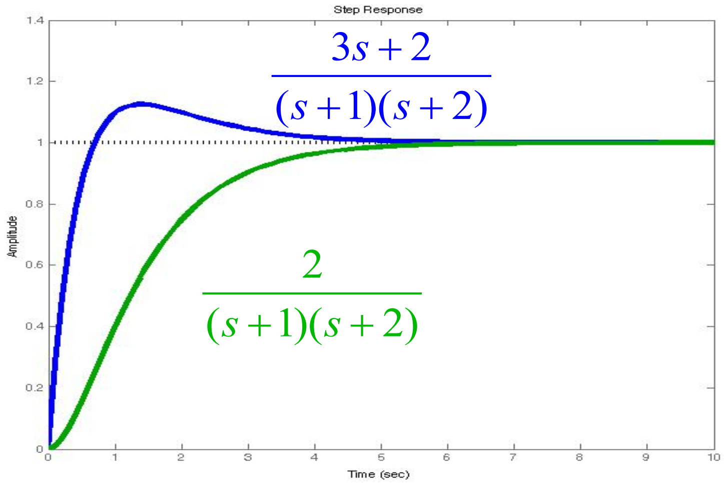
dominantní póly

Příklad: Vliv přidané nuly

- Přenos $\dfrac{2}{(s+1)(s+2)}$ je aperiodický
- a tedy odezva na skok nemá překmit

$$y_{step}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s} = -\frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s}$$

$$y_{step}(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1$$



- Přidáme-li nulu $\dfrac{3s+2}{(s+1)(s+2)}$

  pak odezva na skok překmit má

$$y_{step}(s) = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s}$$

$$y_{step}(t) = e^{-t} - 2e^{-2t} + 1$$

Obecně

- I odezva „aperiodického přenosu“ (tj. s reálnými póly) může mít vlivem nul konečný počet kmitů!
- Nemůže ale kmitat do nekonečna, k tomu je třeba „periodický přenos“, tj. dvojice komplexně sdružených pólů.

Poles and Zeros of Time-Domain Response Functions