Příklady k přednášce 3 - Póly, nuly a odezvy

Michael Šebek

Automatické řízení 2017

26-2-17

Schurův doplněk - odvození

$$\underset{(n+l)\times(n+l)}{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C(sI-A)^{-1} & I_l \end{bmatrix}} \underset{(n+l)\times(n+m)}{\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix}} \underset{(n+m)\times(n+m)}{\begin{bmatrix} I_n & -(sI-A)^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}} =$$

Obecně

$$= \begin{bmatrix} sI-A & 0 \\ 0 & C(sI-A)^{-1}B+D \end{bmatrix}$$

takže

$$\det \begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} sI-A & 0 \\ 0 & C(sI-A)^{-1}B+D \end{bmatrix}$$

$$= \det(sI-A)\det\left(C(sI-A)^{-1}B+D\right)$$

Speciálně pro $m=1, l=1$

$$= \det(sI-A)\left(C(sI-A)^{-1}B+D\right)$$

Nuly přenosu

Pro přenos $G(s)=(s+1)/(s+2)$ s pólem $s=-2$ a nulou $z=-1$ porovnejme odezvy

- Systém v klidu a vstupní signál $u(t)=2\times 1(t)\rightarrow u(s)=2/s$

$$y(s)=\frac{s+1}{s+2}\frac{2}{s}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s} \qquad y(t)=e^{-2t}+1(t)$$

odezva má obvyklou přirozenou a nucenou složku

- Systém v klidu a vstupní signál $u(t)=e^{-zt}=e^{-t}\rightarrow u(s)=1/(s+1)$

$$y(s)=\frac{s+1}{s+2}\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s+2} \qquad y(t)=e^{-2t}$$

nucená složka chybí a tedy vstupní frekvence je blokována

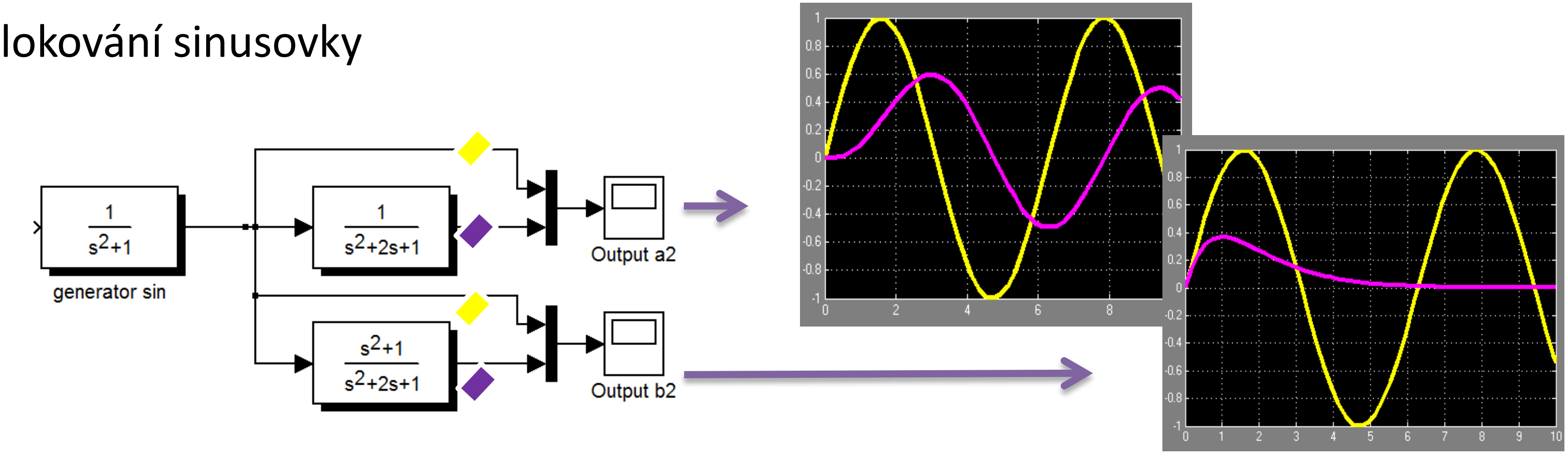
- Stejný vstupní signál a ještě $u(0^-)=0,\, y(0^-)=-1$

$$y(s)=\frac{s+1}{s+2}u(s)+\frac{1}{s+2}y(0-)=\frac{s+1}{s+2}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=0$$

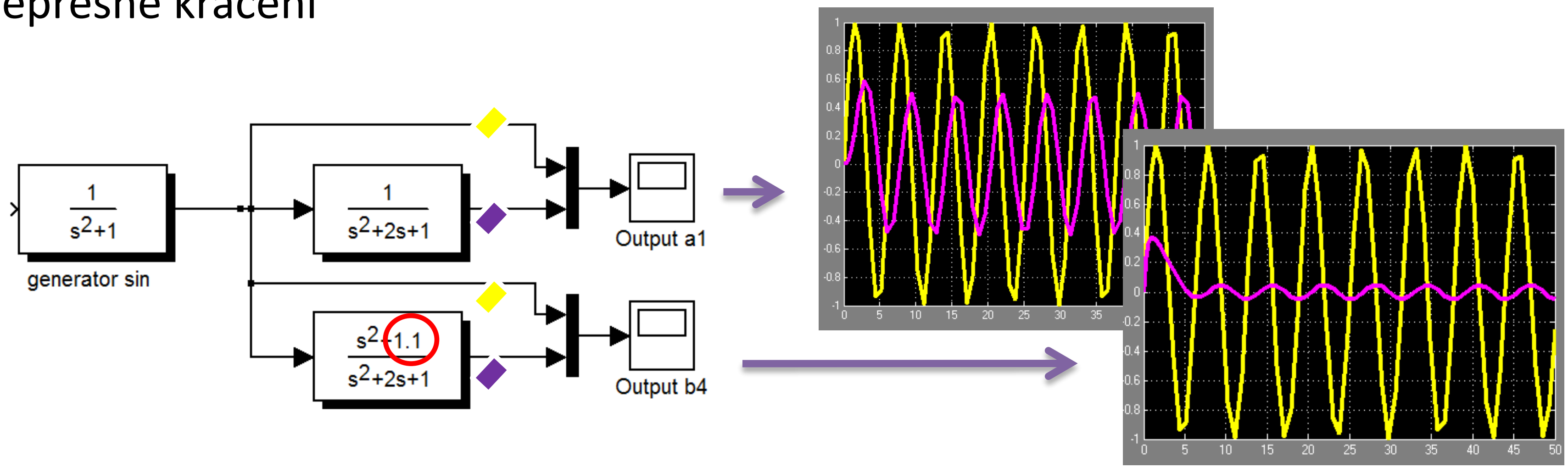
výstup je nulový při nenulovém vstupu

Příklad: Blokování vstupu

Blokování sinusovky



Nepřesné krácení



Systém 1. řádu: časová konstanta a doba náběhu

$$G(s) = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{1+Ts}$$

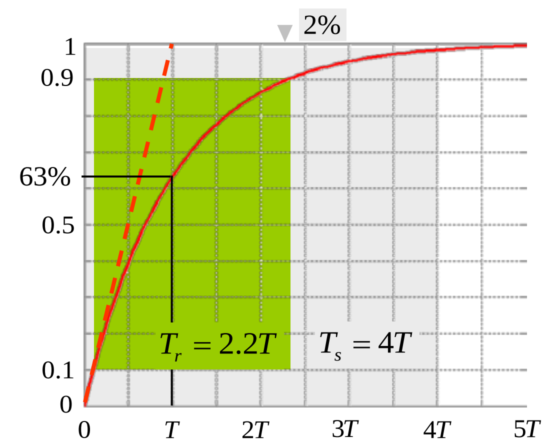
Klasické specifikace

Časová konstanta (time constant) = převrácená hodnota záporně vzatého reálného pólu

- systém se ustálí se za 3-4 T $\quad h(T) = 1 - e^{-3T/T} = 1 - e^{-3} = 0.9502$
- za T dosáhne cca 63% $\quad h(T) = 1 - e^{-4T/T} = 1 - e^{-4} = 0.9817$

$$h(T) = 1 - e^{-T/T} = 1 - 1/e = 0.6321$$

- Vzorec $\boxed{T = \frac{1}{a}}$



Doba náběhu (rise time) = čas mezi $y = 0.1$ a $y = 0.9$

- délka přechodového jevu,
- čas, za který se dostane „do blízkosti“ ustálené hodnoty
- Vzorec:

$$\boxed{T_r \approx 2.2T}$$

$$T_r = t_2 - t_1$$

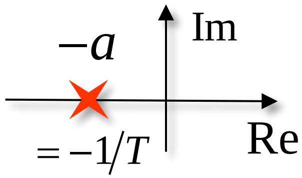
$$0.9 = 1 - e^{-\frac{t_2}{T}} \rightarrow e^{-\frac{t_2}{T}} = 0.1 \rightarrow t_2 = -T \ln 0.1 \approx 2.31T$$

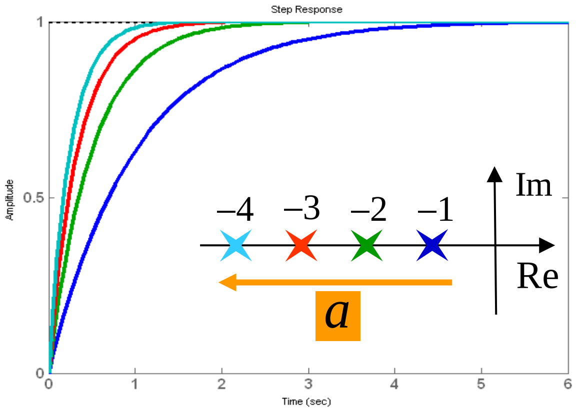
$$0.1 = 1 - e^{-\frac{t_1}{T}} \rightarrow e^{-\frac{t_1}{T}} = 0.9 \rightarrow t_1 = -T \ln 0.9 \approx 0.11T$$

Systém 1. řádu - doba ustálení (regulace)

Pro přenos

$$G(s)=\frac{a}{s+a}=\frac{1}{1+Ts}$$





je odezva na jednotkový skok

$$1-e^{-at}$$

Doba ustálení (regulace) :

je čas, za který se odezva přiblíží ustálené hodnotě na vzdálenost p , tedy $1-e^{-aT_s}=1-p$

Z toho

$$e^{-aT_s}=p \quad \Rightarrow \quad -aT_s=\ln p \quad \Rightarrow \quad T_s=\frac{-\ln p}{a}$$

A čitatel je

```
>> p=0.01; k = -log(p)= 4.6052
>> p=0.02; k = -log(p)= 3.9120
>> p=0.03; k = -log(p)= 3.5066
>> p=0.05; k = -log(p)= 2.9957
```

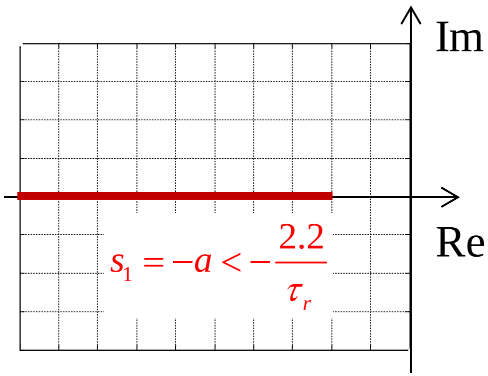
$$T_s=\frac{4}{a}=4T$$

Požadavky na odezvu pomocí polohy pólu pro 1. řád

Pro systém 1. řádu vyjádříme požadavky na časovou odezvu polohou pólu:

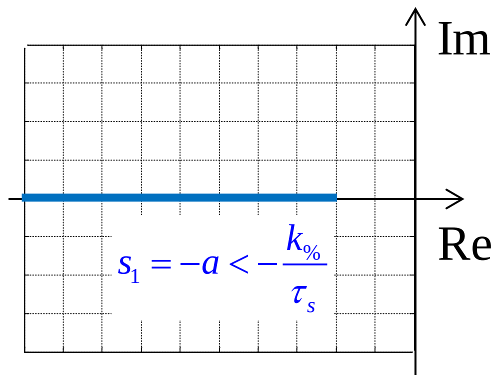
- Požadovaná doba náběhu

$$T_r < \tau_r \Leftrightarrow s_1 = -a < -\frac{2.2}{\tau_r}$$



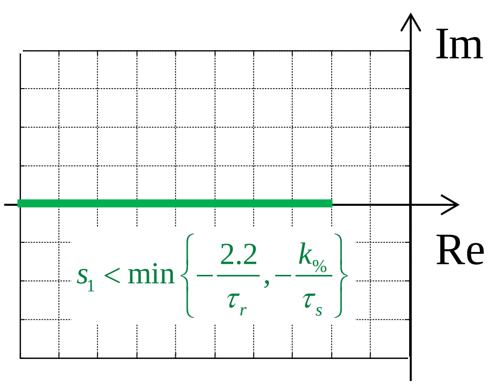
- Požadovaná doba ustálení

$$T_s < \tau_s \Leftrightarrow s_1 = -a < -\frac{k_{\%}}{\tau_s}$$

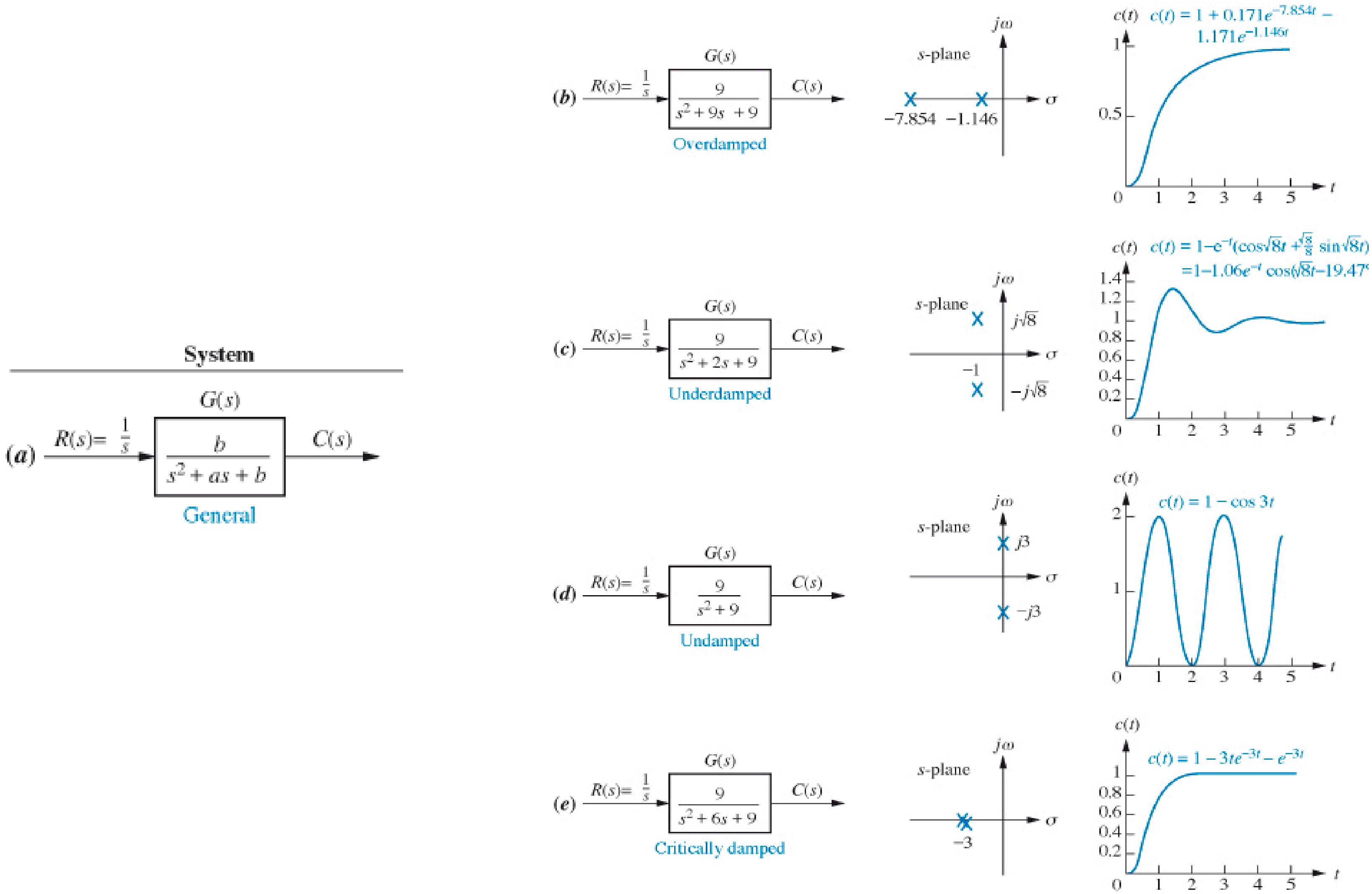


- Požadovaná doba náběhu a ustálení současně

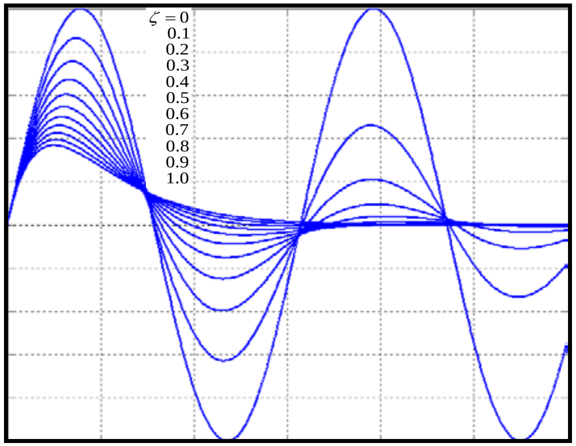
$$T_s < \tau_s \wedge T_r < \tau_r \Leftrightarrow s_1 < \min\left\{-\frac{2.2}{\tau_r}, -\frac{k_{\%}}{\tau_s}\right\}$$

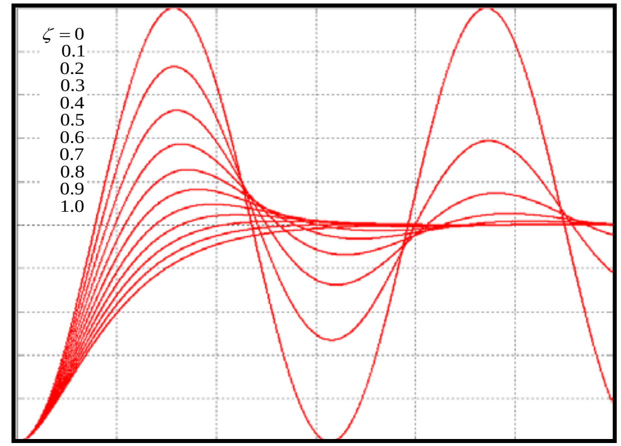


Příklad - 2. řád

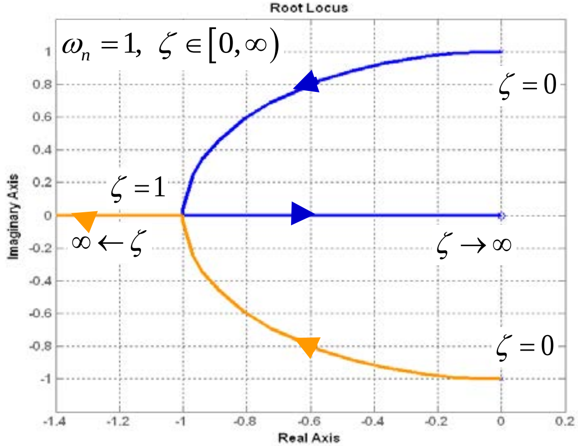


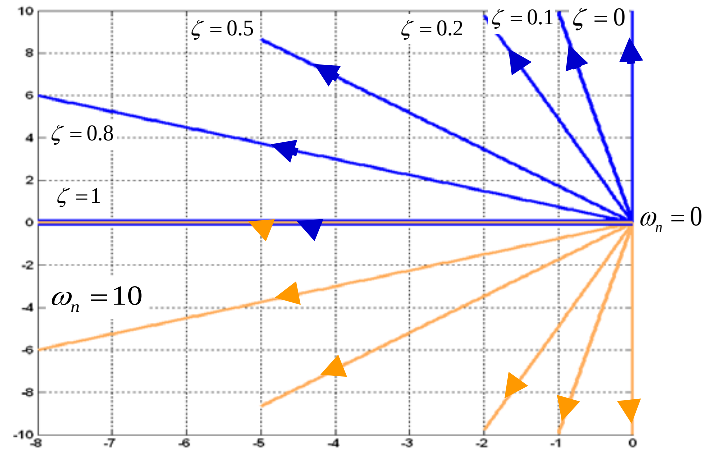
Vliv tlumení na časový průběh





Vliv tlumení a přirozené frekvence netlumeného systému na polohu pólů

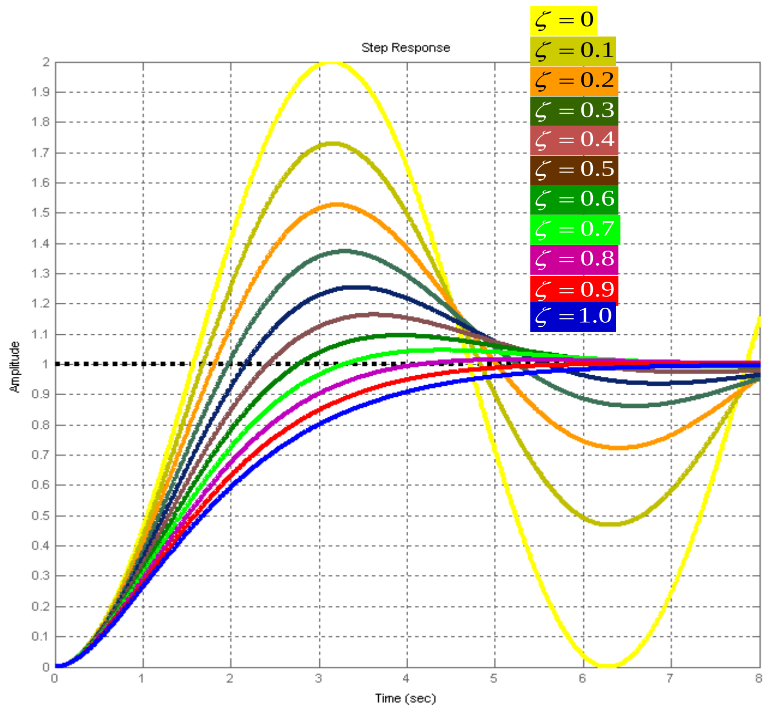


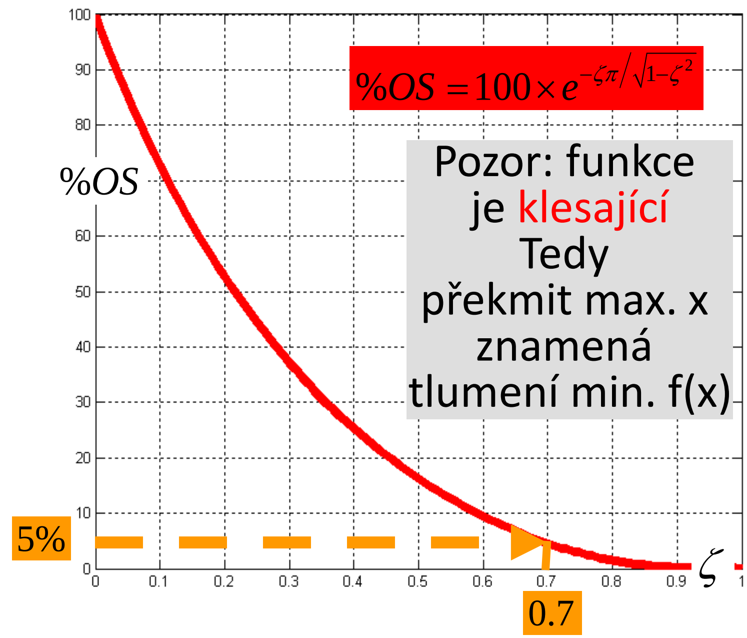


2. řád

- častým požadavkem zákazníka je maximální překmit. Ten si obvykle převádíme na požadované tlumení a to pomocí vzorečku
- z obrázku nebo z grafu

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$



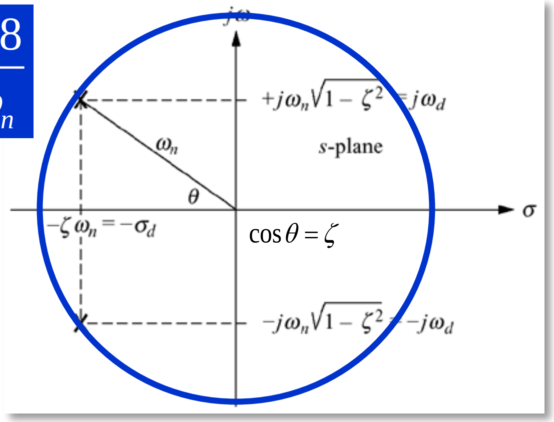


- Vzorec platí pro podtlumený systém.
- Blízko meze aperiodicity a na ní přestává platit

- Podtlumený systém 2. řádu má póly

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \zeta \in (0,1)$$

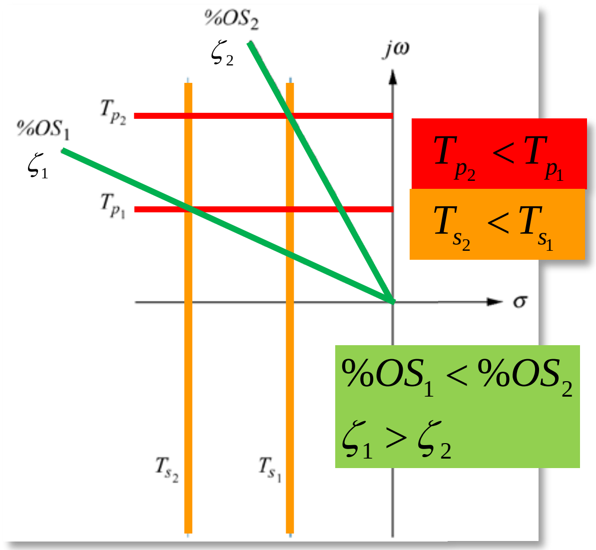
$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$



- Doba ustálení je $T_s \doteq \dfrac{k_\%}{\zeta\omega_n} = \dfrac{k_\%}{\sigma}$ takže stejnou dobu ustálení mají systémy, se stejnými reálnými částmi pólů

$$k_{1\%} = 4.6, k_{2\%} = 4, \quad k_{3\%} = 3.5, k_{5\%} = 3$$

- Okamžik prvého maxima je $T_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{\pi}{\omega_d}$ takže ho mají stejný systémy se stejnými imaginárními částmi pólů



- Stejné tlumení a tedy stejný překmit mají systémy s póly ležícími na přímkách procházejících počátkem pod úhlem

$$\theta = \arccos\zeta$$
$$\cos\theta = \zeta$$

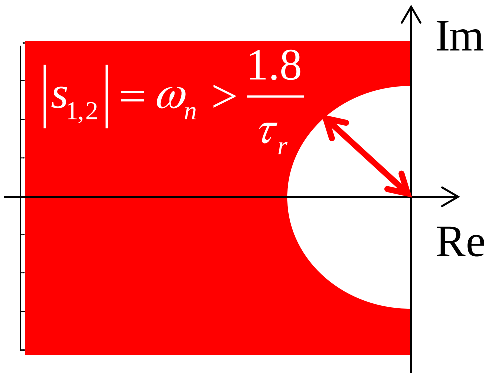
Požadavky na odezvu pomocí polohy pólu: Řád 2

Pro systém 2. řádu vyjádříme požadavky na časovou odezvu polohou pólů:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

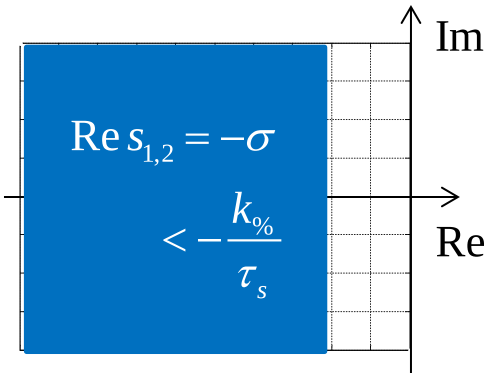
- Požadovaná doba náběhu:
  Velmi přibližně

$$T_r < \tau_r \Leftrightarrow \left|s_{1,2}\right| = \omega_n > \frac{1.8}{\tau_r}$$



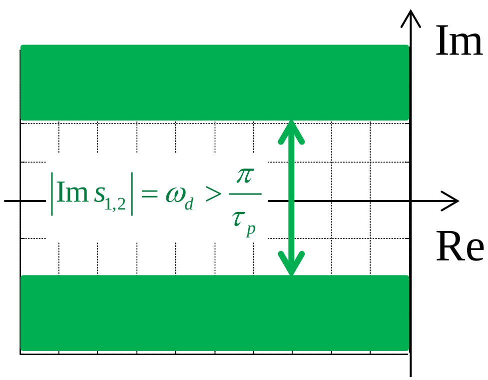
- Požadovaná doba ustálení

$$T_s < \tau_s \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, s_{1,2} = -\sigma < -\frac{k_{\%}}{\tau_s}$$



- Okamžik prvního maxima

$$T_p < \tau_p \Leftrightarrow \left|\mathrm{Im}\, s_{1,2}\right| = \omega_d > \frac{\pi}{\tau_p}$$



Požadavky na odezvu pomocí polohy pólu: Řád 2

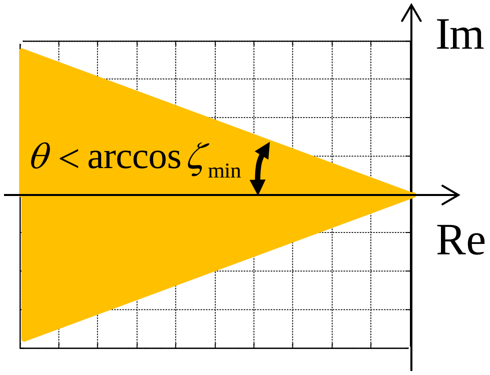
$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Pro systém 2. řádu vyjádříme požadavky na časovou odezvu polohou pólů:

- Požadovaný maximální překmit

$$\%OS < p_{\max} \Leftrightarrow \zeta > \zeta_{\min} = \frac{-\ln\left(p_{\max}/100\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(p_{\max}/100\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\mathrm{Re}\, s_{1,2}\right|}{\left|s_{1,2}\right|} \frac{\sigma}{\omega_n} > \zeta_{\min} \Leftrightarrow \theta < \arccos\zeta_{\min}$$

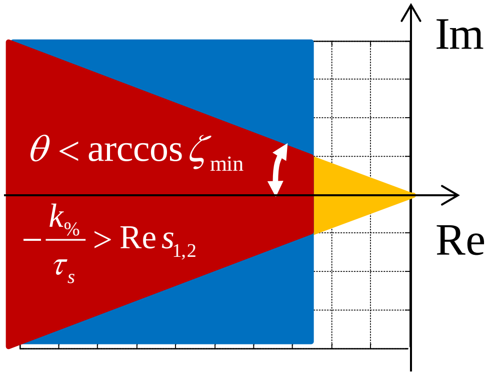


Typické jsou kombinované požadavky, např.

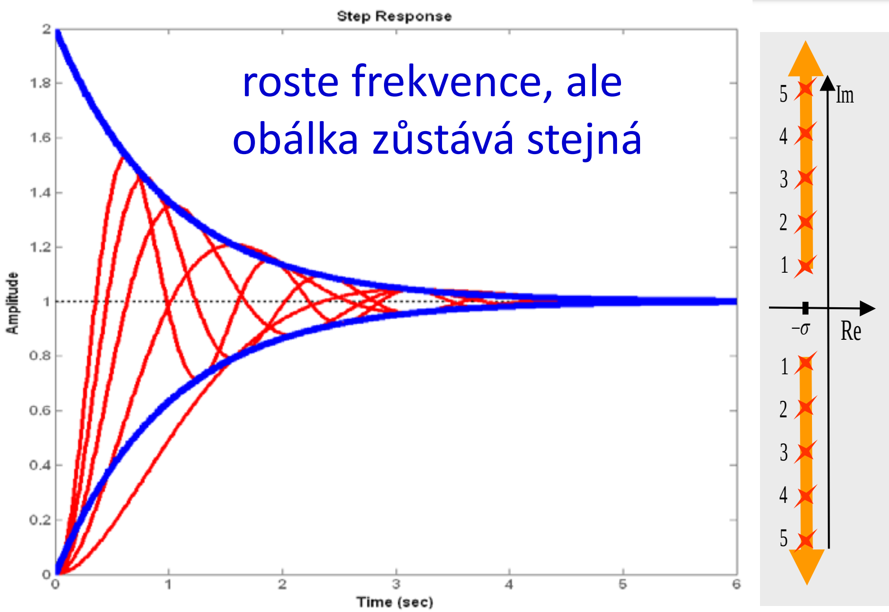
- Požadovaný maximální překmit a současně
- maximální doba ustálení

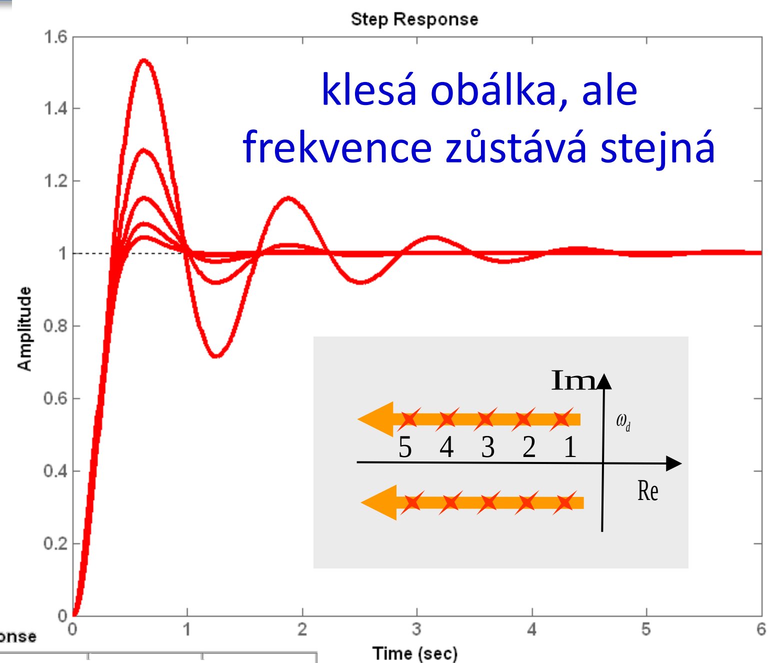
$$\left(T_s < \tau_s\right) \wedge \left(\%OS < p_{\max}\right) \Leftrightarrow$$

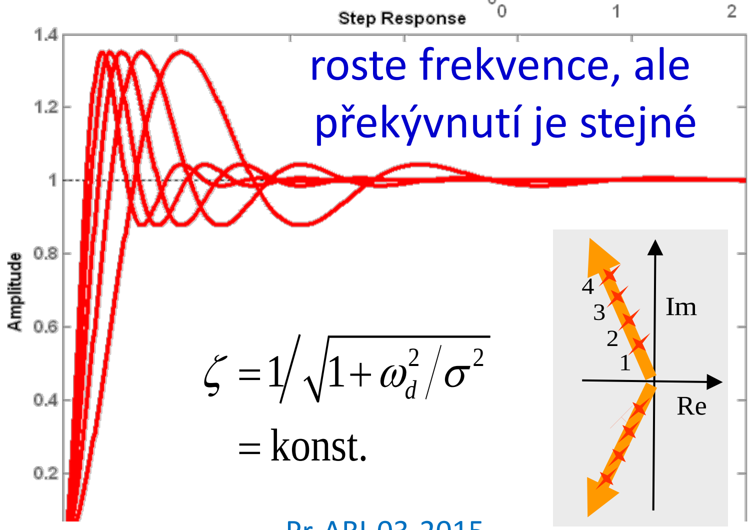
$$\left(\mathrm{Re}\, s_{1,2} < -\frac{k_{\%}}{\tau_s}\right) \wedge \left(\theta < \arccos\zeta_{\min}\right)$$



2. řád


Step Response
roste frekvence, ale
obálka zůstává stejná
Amplitude
Time (sec)
Im
Re
−σ
1
2
3
4
5


Step Response
klesá obálka, ale
frekvence zůstává stejná
Amplitude
Time (sec)
Im
Re
ω_d
5 4 3 2 1


Step Response
roste frekvence, ale
překývnutí je stejné
Amplitude
$\zeta = 1\Big/\sqrt{1+\omega_d^2/\sigma^2}$
$= \text{konst.}$
Im
Re
4
3
2
1

Skoková odezva podtlumeného systému 2. řádu $\zeta < 1$

$$h(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2 s+k_3}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{s}-\frac{(s+\zeta\omega_n)+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

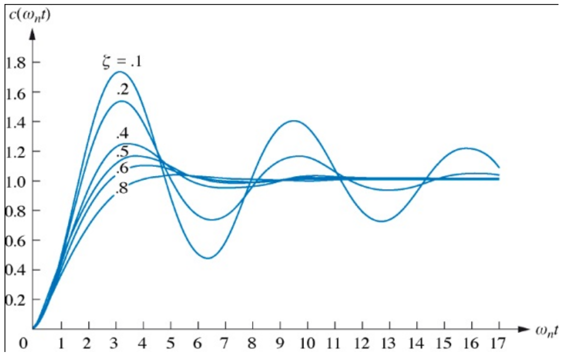
$$=\frac{1}{s}-\frac{(s+\zeta\omega_n)}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

$$\varphi=\arccos\zeta,\quad \phi=\operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$h(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi\right)$$

$$=1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$$

$$=1-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\phi\right)$$



Doba prvního maxima - odvození

$\zeta < 1$

- Najdeme čas, kdy je poprvé derivace skokové odezvy = 0
- Derivaci výhodně vypočteme v L-transformaci

$$\mathcal{L}_{-}\left\{\dot{h}(t)\right\} = sh(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_n^2\left(1-\zeta^2\right)}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t \approx 0 \Rightarrow \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t = n\pi$$

$$n = 0 \rightarrow t = 0$$

$$n = 1 \rightarrow \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t = \pi$$

$$\boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Překmit - odvození

$$\zeta < 1$$

- Z definice je

$$\%OS = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100$$

- Přitom

$$h_{\max} = h(T_p) = h(t) = 1 - e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\pi\right) = 1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$h(\infty) = 1$$

- Takže po dosazení

$$\boxed{\%OS = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100}$$

- a z toho opačně

$$\boxed{\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}}$$

Doba ustálení pro 2. řád - odvození

- Musíme najít čas, kdy skoková odezva dosáhne pás $\pm 2\%$ kolem ustálené hodnoty a zůstane v něm $\qquad \zeta < 1$
- Amplituda (obálka) tlumené sinusovky dosáhne 0.02, když

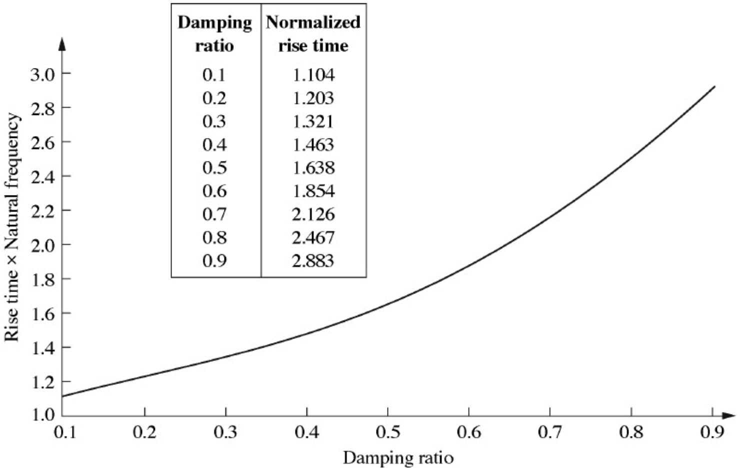
$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} = 0.02 \quad \Rightarrow \quad T_s = \frac{-\ln\left(0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n}$$

- To je velmi konzervativní odhad, neboť předpokládá, že v čase *t* (okamžiku dosažení pásma ustálení) bude právě $\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\phi\right)=1$
- Výpočtem zjistíme, že se při změně

$$\zeta \in [0, 0.9] \Rightarrow -\ln\left(0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right) \in [3.91, 4.74]$$

- Dohodněme se na odhadu nezávislém na tlumení

$$\boxed{T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}}$$



Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Doba náběhu pro 2. řád

- Vztah mezi dobou náběhu a tlumením nelze najít analyticky $\zeta < 1$
- Postupným dosazováním různých hodnot do

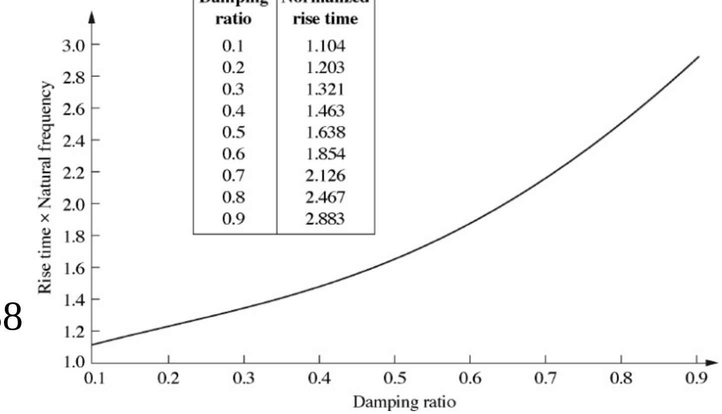
$$h(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

a „měřením“ T_r dostaneme graf

- Polynomiální aproximací (fce **`polyfit`** v Matlabu) lze dostat třeba vztahy (Nise)

$$T_r = \frac{1.76\zeta^3 - 0.417\zeta^2 + 1.039\zeta + 1}{\omega_n}$$

$$\zeta = 0.115(\omega_n T_r)^3 - 0.883(\omega_n T_r)^2 + 2.504(\omega_n T_r) - 1.738$$



Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

- Někteří (Franklin) požívají velmi přibližný vzorec získaný pro „průměrnou hodnotu“ $\zeta = 0.5$ (ospravedlněný jen názorem, že se t v závislosti na ζ „moc nemění“)

$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

- Dokonce i definice se liší. Někdo používá dobu 0%-100% pro podtlumené, 5%-95% pro kriticky tlumené and 10%-90% pro přetlumené systémy 2. řádu

Vliv dalších pólů – Dominantní póly

$$y(s)=\frac{bc}{s\left(s^2+as+b\right)\left(s+c\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+as+b}+\frac{D}{s+c}$$

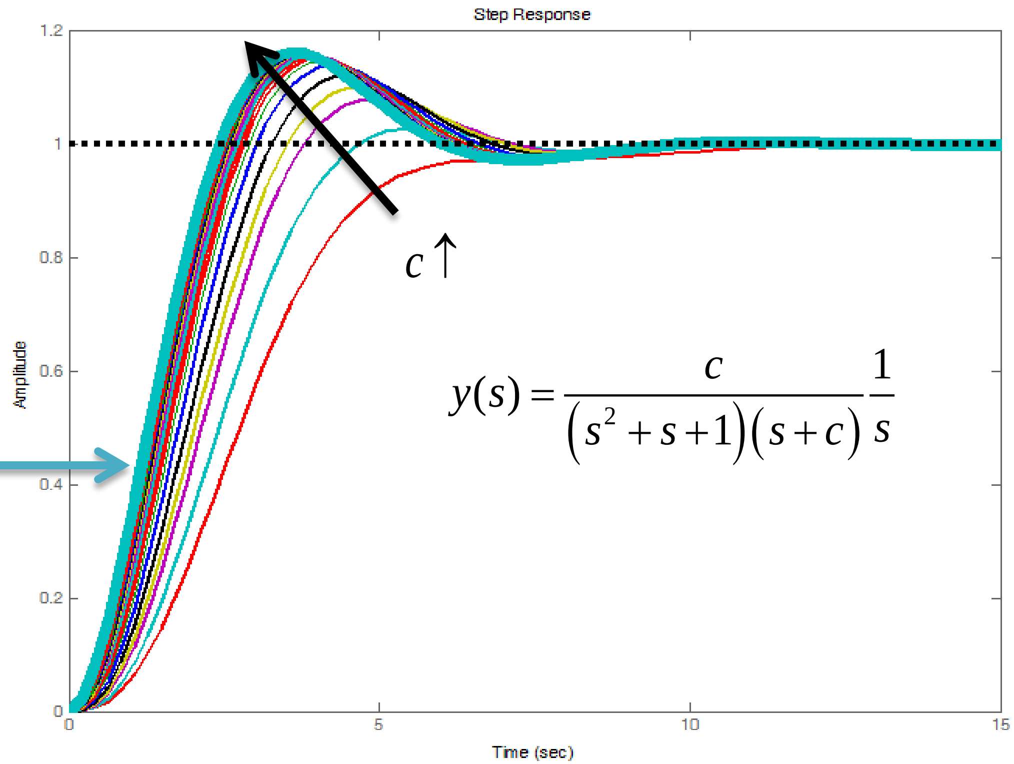
$$A=1, B=\frac{-c^2-ca}{c^2+b-ca}, C=\frac{-c^2a+ca^2-bc}{c^2+b-ca}, D=\frac{-b}{c^2+b-ca}$$

$$\lim_{-c\to-\infty} A=1,$$

$$\lim_{-c\to-\infty} B=-1, \lim_{-c\to-\infty} C=-a,$$

$$\lim_{-c\to-\infty} D=0$$

$$y(s)=\frac{1}{s^2+s+1}\frac{1}{s}$$



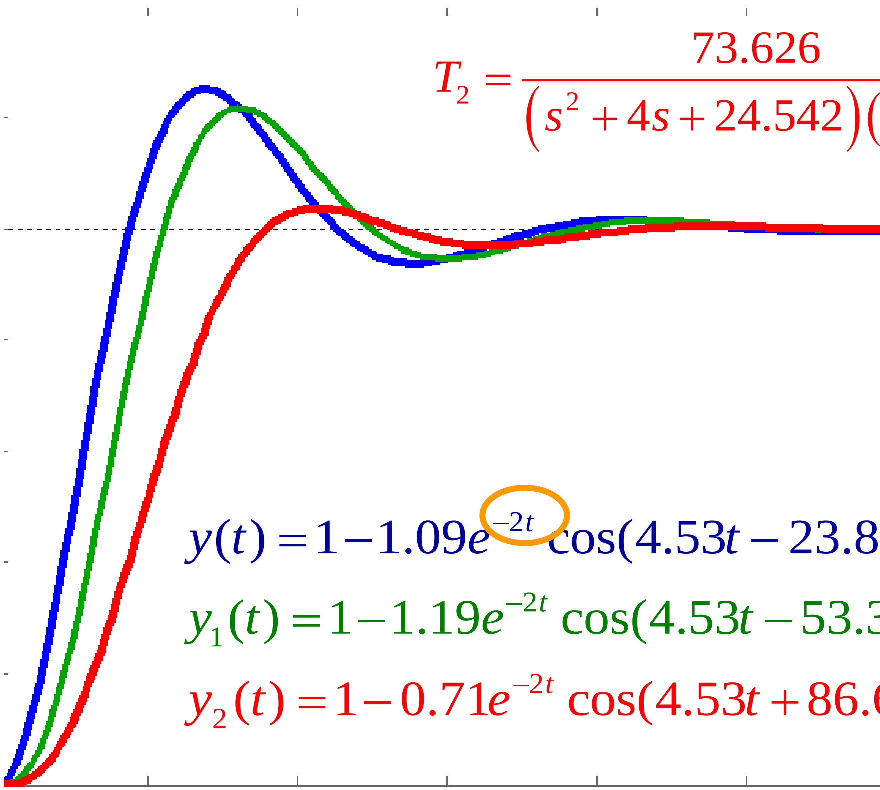
Příklad – dominantní póly

Můžeme zanedbat reálný pól v těchto přenosech ?

$$T = \frac{24.542}{s^2 + 4s + 24.542}$$

$$T_1 = \frac{245.42}{\left(s^2 + 4s + 24.542\right)\left(s + 10\right)}$$

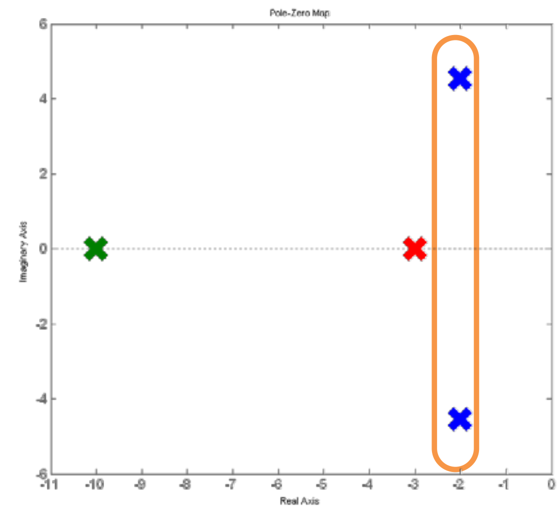
$$T_2 = \frac{73.626}{\left(s^2 + 4s + 24.542\right)\left(s + 3\right)}$$



$$y(t) = 1 - 1.09e^{-2t}\cos(4.53t - 23.81^\circ)$$

$$y_1(t) = 1 - 1.19e^{-2t}\cos(4.53t - 53.34^\circ) - 0.29e^{-10t}$$

$$y_2(t) = 1 - 0.71e^{-2t}\cos(4.53t + 86.63^\circ) - 1.1e^{-3t}$$



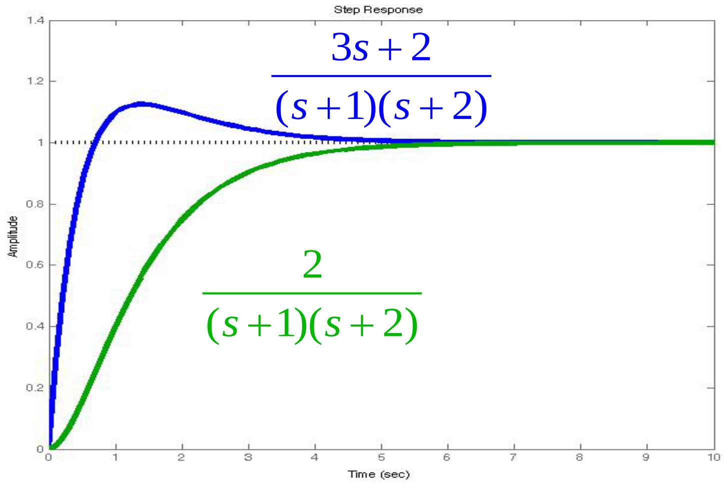
dominantní póly

Příklad: Vliv přidané nuly

- Přenos $\dfrac{2}{(s+1)(s+2)}$ je aperiodický
- a tedy odezva na skok nemá překmit

$$y_{step}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s} = -\frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s}$$

$$y_{step}(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1$$



- Přidáme-li nulu $\dfrac{3s+2}{(s+1)(s+2)}$

  pak odezva na skok překmit má

$$y_{step}(s) = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s}$$

$$y_{step}(t) = e^{-t} - 2e^{-2t} + 1$$

Obecně

- I odezva „aperiodického přenosu“ (tj. s reálnými póly) může mít vlivem nul konečný počet kmitů!
- Nemůže ale kmitat do nekonečna, k tomu je třeba „periodický přenos“, tj. dvojice komplexně sdružených pólů.