Příklady k přednášce
5 - Identifikace

Michael Šebek
Automatické řízení 2017

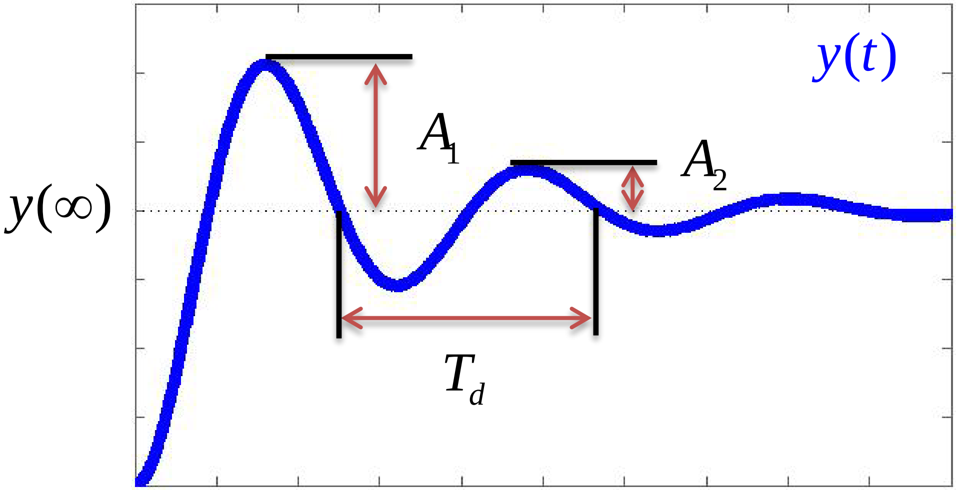
Jiná metoda pro 2. řád bez nul kmitavý

- Hledáme

$$G(s) = k\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Aplikujeme

$$u(s) = \frac{u(\infty)}{s}$$



1. Změříme $y(\infty), A_1, A_2, T_d$

2. Vypočteme

$$k = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}, \mu = \ln\frac{A_1}{A_2}, \zeta = \frac{\mu}{\sqrt{4\pi^2 + \mu^2}}, \omega_n = \frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Klasické názvosloví: A_1/A_2 faktor útlumu, T_0 časová konstanta
  μ tzv. logaritmický dekrement útlumu
- Pro zajímavost dále platí

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{\zeta\omega_n T_d}, \mu = \frac{1}{n-1}\ln\frac{A_1}{A_n} = \zeta\omega_n T_d, \omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$$

Jiná metoda - odvození

$$y(s)=k\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{u(\infty)}{s}\leftrightarrow y(t)=ku(\infty)\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi\right)\right]$$

- V limitě je závorka rovna nule, takže $y(\infty)=ku(\infty)\rightarrow k=y(\infty)/u(\infty)$
- Z definic je

$$T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\rightarrow\omega_n=\frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Při překmitu má závorka maximální hodnotu (tj. sin = -1), takže

$$A_1=y(t_{A_1})-ku(\infty)=ku(\infty)\left[1+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_{A_1}}\right]-ku(\infty)=ku(\infty)\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_{A_1}}$$

$$A_2=y(t_{A_1}+T_d)-ku(\infty)=ku(\infty)\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n\left(t_{A_1}+T_d\right)}$$

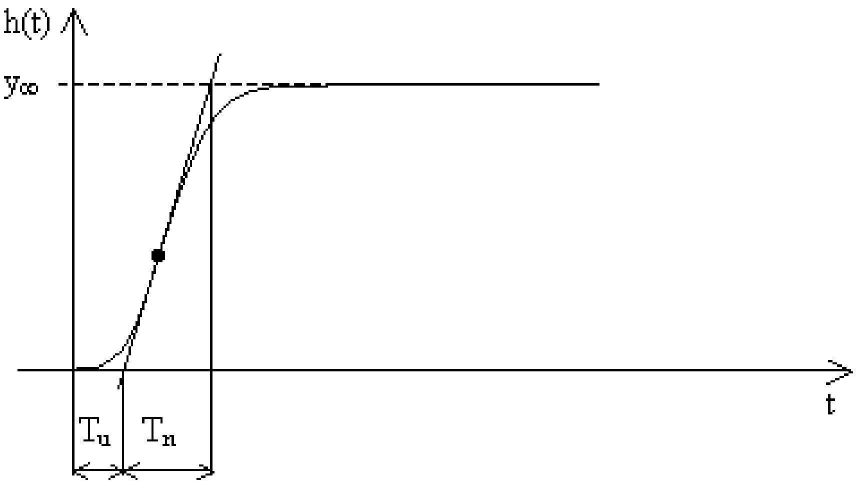
- a z toho

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{e^{-\zeta\omega_n t_{A_1}}}{e^{-\zeta\omega_n\left(t_{A_1}+T_d\right)}}=e^{\zeta\omega_n T_d}\rightarrow\mu=\ln\frac{A_1}{A_2}=\zeta\omega_n T_d=\zeta\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\mu^2-\mu^2\zeta^2=4\pi^2\zeta^2\rightarrow\mu^2=\left(4\pi^2+\mu^2\right)\zeta^2\rightarrow\zeta=\frac{\mu}{\sqrt{4\pi^2+\mu^2}}$$

Strejcova metoda identifikace

- Pro aperiodické průběhy
- Najdeme inflexní bod, změříme T_u (doba průtahu) a T_n (doba „náběhu“)



- a vypočteme parametr

$$\tau = \frac{T_u}{T_n}$$

- Podle jeho velikosti aproximujeme průběh různými přenosy

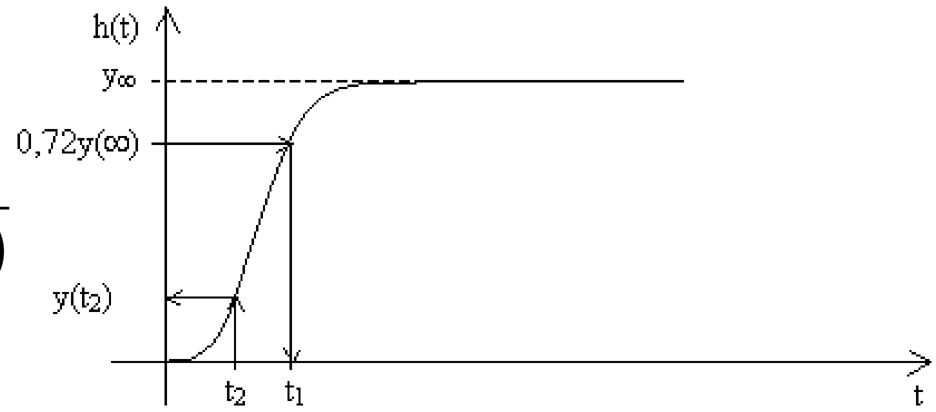
$$\tau < 0.1 \rightarrow G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$\tau \geq 0.1 \rightarrow G(s) = \frac{k}{(Ts + 1)^n}$$

Strejcova metoda

Případ $\tau < 0.1$, kdy hledáme parametry přenosu

$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$



v těchto krocích

1) $k = \dfrac{y(\infty)}{u(\infty)}$

2) $t_1 : \; y(t_1) = 0.72 y(\infty)$

3) $T_1 + T_2 = \dfrac{t_1}{1.2564}$

4) $t_2 = 0.3574(T_1 + T_2)$

5) $y(t_2)$

6) $\tau_2 = \dfrac{T_1}{T_2}$

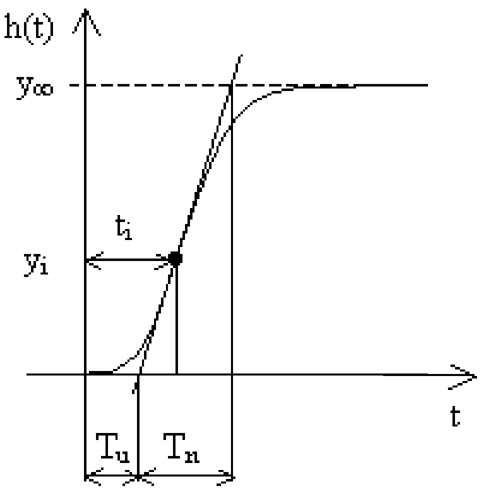
7) T_1, T_2

$y(t_2)$	τ_2	$y(t_2)$	τ_2
0.30	0.000	0.22	0.183
0.29	0.023	0.21	0.219
0.28	0.043	0.20	0.264
0.27	0.063	0.19	0.322
0.26	0.084	0.18	0.403
0.25	0.105	0.17	0.538
0.24	0.128	0.16	1.000
0.23	0.154		

Strejcova metoda

Případ $\tau \geq 0,1$ kdy hledáme parametry přenosu v těchto krocích

$$\boxed{G(s) = \frac{k}{(Ts+1)^n}}$$



1) $k = \dfrac{y(\infty)}{u(\infty)}$

2) Skokovou odezvu normujeme na $y(\infty) = 1$

3) Sestrojíme tečnu v inflexním bodě a určíme $\tau = \dfrac{T_u}{T_n}$

4) Podle hodnoty určíme v tabulce nejbližší vyšší řád *n* a přesnější souřadnici y_i inflexního bodu

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ	0.104	0.218	0.319	0.41	0.493	0.57	0.642	0.709	0.773
y_i	0.264	0.327	0.359	0.371	0.384	0.394	0.401	0.407	0.413

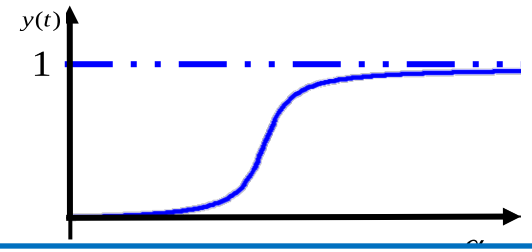
5) Z grafu určíme $t_i: \ y(t_i) = y_i$

6) $T = \dfrac{t_i}{n-1}$

Vyšší řád a nuly - nekmitavý případ

- Monotónní hladká odezva (dobře funguje pro odezvy tvaru „S“)

$$y(t)=y(\infty)+Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}+Ce^{-\gamma t}+\cdots$$



- Odečteme ustálenou hodnotu
  a předpokládáme, že $-\alpha$ je nejpomalejší pól

$$\begin{aligned} y(t)-y(\infty) &\cong Ae^{-\alpha t} \\ \ln\left(y(t)-y(\infty)\right) &\cong \ln A-\alpha t\ln e \\ &\cong \ln A-\alpha t \end{aligned}$$

- To je rovnice přímky: směrnice určuje α
  a průsečík s osou určuje A
- Umístíme-li ji na graf $\ln\left(y(t)-y(\infty)\right)$
  (nebo $\ln\left(y(\infty)-y(t)\right)$ pro $A<0$)
- A určíme konstanty α, a
- Pak totéž opakujeme pro

$$y(t)-\left(y(\infty)+ae^{-\alpha t}\right)\cong Be^{-\beta t}$$

Pokud je $y(t)-y(\infty)<0$
(jako v prvním kroku a
možná v některém z dalších),
je $A<0$.
Pak postup modifikujeme

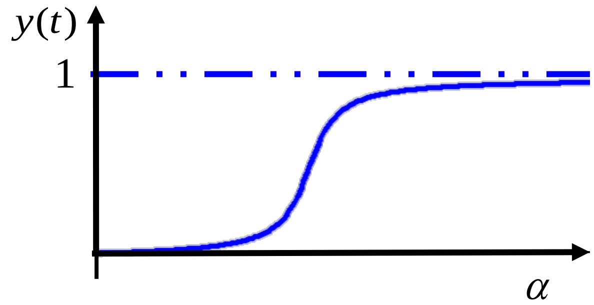
$$\begin{aligned} y(\infty)-y(t)- &\cong -Ae^{-\alpha t} \\ \ln\left(y(\infty)-y(t)\right) &\cong \ln|A|-\alpha t \end{aligned}$$

Zjistíme $|A|$ a přidáme
znaménko „-“

Další detaily a vlastnosti
na příkladových slajdech

Další detaily k metodě „logaritmování“

- Pokud je $y(t) - y(\infty) < 0$ (jako v prvním kroku a možná v některém z dalších), je $A < 0$. Pak postup modifikujeme



$$y(\infty) - y(t) - \cong -Ae^{-\alpha t}$$

$$\ln\left(y(\infty) - y(t)\right) \cong \ln|A| - \alpha t$$

  Zjistíme $|A|$ a přidáme znaménko „-“
- Místo výpočtu logaritmů je možno přímo kreslit na semilogaritmický papír – ty bývají pro $\log_{10}$ takže je lépe užít dekadický logaritmus. Pozor na $\log_{10} e \approx\sim 0.4343$
- Metoda je citlivá na nastavení přímek.
- V rozumných případech (kvalitní data s málo šumem), dává dobrý fit odezvy
- Což ale neznamená, že jsme dobře trefili časové konstanty

- Hezký příklad s ukázkou „numerických“ problémů je v učebnici Franklin-ed.6, s. 142, sekce 3.7

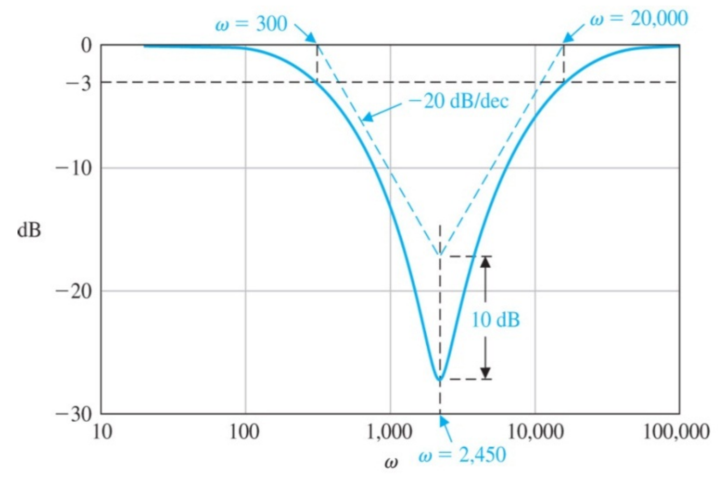
Identifikace z frekvenční odezvy

(Dorf ed.11- 8.3 s 517)

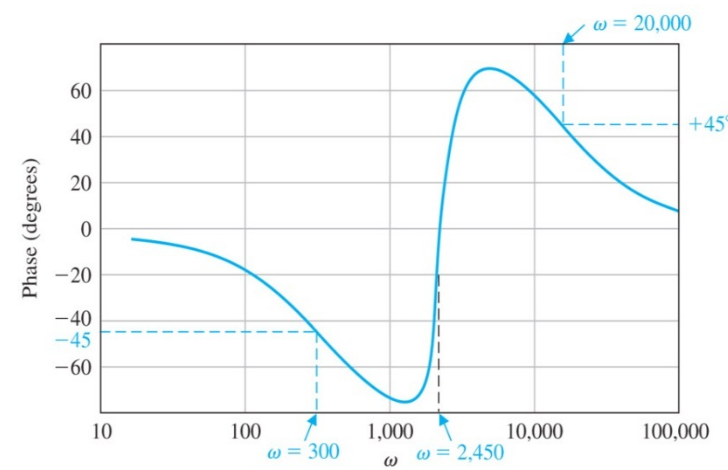
1. Mezi 100-1000 rad/s amplituda klesá cca -20 dB/dekádu, $|G(j300)| = -3\,\mathrm{dB}$ odhadujeme pól $p_1 = 300$
2. Fáze strmě roste (+180°) a $\varphi(j2540) = 0°$ odhadujeme pár komplex. nul v $\omega_n = 2450$
3. Směrnice amplitudy se vrací k 0, za $\omega = 50,000$ tušíme další pól: Tento pól je na $p_2 = 20,000$ protože $|G(j20,000)| = -3\,\mathrm{dB}$ a fáze je tam +45°
4. Zakreslíme asymptoty na máme

$$G(s) = \frac{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n s + 1}{(s/p_1 + 1)(s/p_2 + 1)}$$

5. Rozdíl hodnoty asymptot od skutečné
6. na „rohové frekvenci“ $\omega_n = 2450$ je 10dB, z toho $\zeta = 0.16$



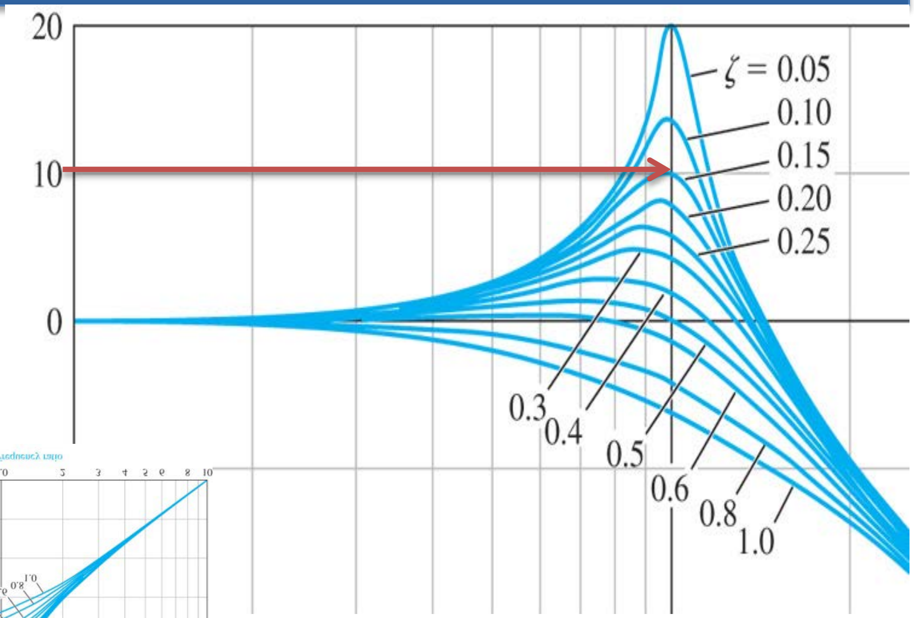
(a)



(b)

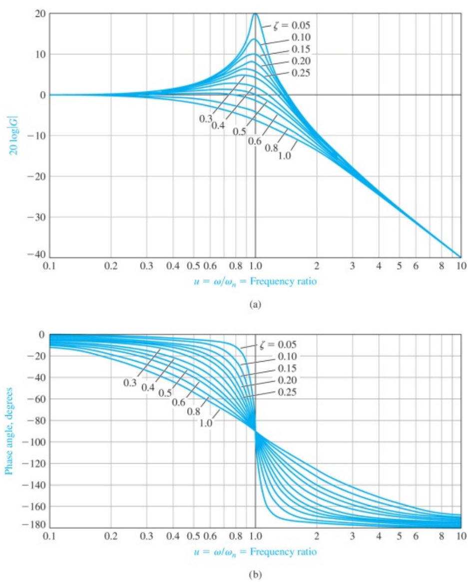
Identifikace z frekvenční odezvy

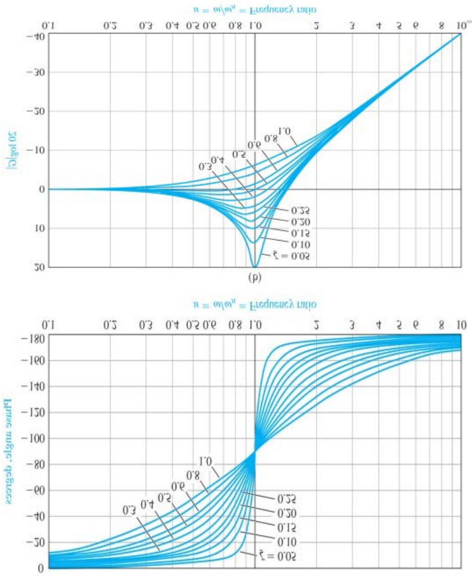
V kroku 5 vycházíme z převráceného grafu pro rezonanční špičku podle tlumení



komplexní póly

komplexní nuly





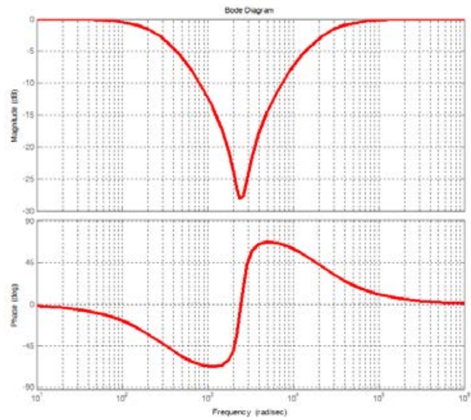
$[1 + (2\zeta/\omega_n)\, j\omega + (\, j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ $[1 + (2\zeta/\omega_n)\, j\omega + (\, j\omega/\omega_n)^2]$

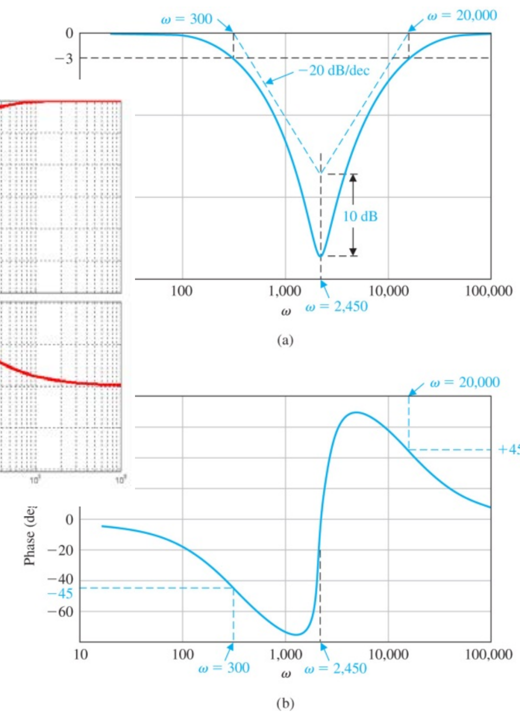
Identifikace z frekvenční odezvy

Tedy nám celkem vyšlo

$$G(s)=\frac{(s/2450)^2+(0,32/2450)\,s+1}{(s/300+1)(s/20000+1)}$$

$$=\frac{s^2+780s+6000000}{s^2+20000s+6000000}$$





kontrola:

Po změně časového měřítka

$$s_\tau=s_t\sqrt{6000000}$$

$$\tau=t/\sqrt{6000000}$$

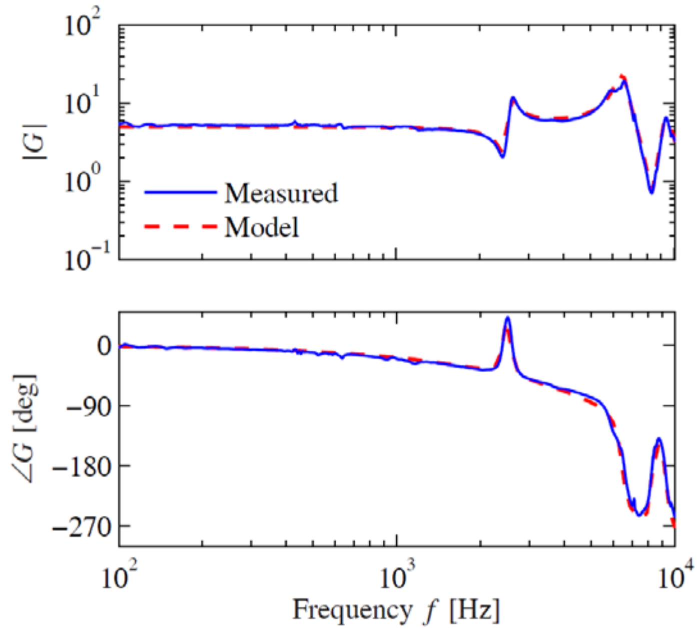
Dostaneme „hezčí čísla“

$$G(s_\tau)=\frac{s^2+0.32s+1}{s^2+8.2s+1}$$

Atomic Force Microscope - Piezoelectric drive

(Astrom, Murray 2008, s. 285)

- Spektrální analyzátor naměřil (za 1s)
- Minima → frekvence nul
- Maxima → frekvence pólů
- Dobrý fit v okolí maxim a minim
  → tlumení, násobnosti nul a pólů
- Po dobrém fitování amplitudové části se najde dopravní zpoždění nastavením fázové části Bodeho grafu
- Tak dostaneme



$$G(s)=\frac{k\omega_2^2\omega_3^2\omega_5^2\left(s^2+2\zeta_1\omega_1 s+\omega_1^2\right)\left(s^2+2\zeta_4\omega_4 s+\omega_4^2\right)e^{-s\tau}}{\omega_1^2\omega_4^2\left(s^2+2\zeta_2\omega_2 s+\omega_2^2\right)\left(s^2+2\zeta_3\omega_3 s+\omega_3^2\right)\left(s^2+2\zeta_5\omega_5 s+\omega_5^2\right)}$$

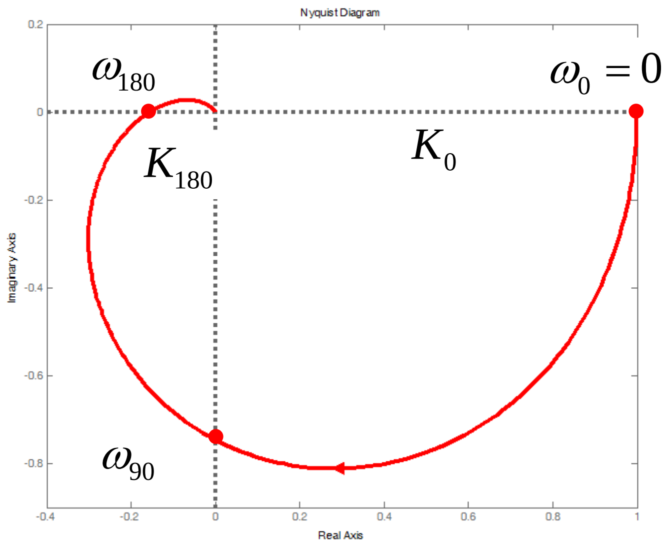
kde $\omega_k = 2\pi f_k$ a

$$f_1 = 2.42\,\text{kHz}, \zeta_1 = 0.03,\ f_2 = 2.42\,\text{kHz}, \zeta_2 = 0.03,\ f_3 = 2.42\,\text{kHz}, \zeta_3 = 0.03,$$

$$f_4 = 2.42\,\text{kHz}, \zeta_4 = 0.03,\ f_5 = 2.42\,\text{kHz}, \zeta_5 = 0.03$$

Identifikace z Nyquistova grafu

- Označme $K_\varphi = |G(j\omega_\varphi)|, \varphi = \arg G(j\omega_\varphi)$
- hodnoty $\omega_{90}, \omega_{180}, K_0, K_{90}, K_{180}$ jsou důležité pro řízení
- Gain ratio (podíl zesílení) udává obtížnost řízení $\kappa = \dfrac{K_{180}}{K_0} = \dfrac{|G(\omega_{180})|}{|G(0)|}$



- Pro model

$$\boxed{G(s) = \frac{k}{1+Ts}}$$

$$G(s) = \frac{k}{1+Ts} e^{-sT_d}$$

určíme parametry z

$$\boxed{k = K_0, T = \frac{\sqrt{\kappa^{-1} - 1}}{\omega_{180}}}$$

$$T_d = \frac{\pi - \arctan \kappa^{-2} - 1}{\omega_{180}}$$

Příklad - Nejmenší čtverce

- Pro

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

- Minimalizujeme

$$\min_{\mathbf{x}}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)^2}=\left(2x_1-1\right)^2+\left(-x_1+x_2\right)^2+\left(2x_2+1\right)^2$$

- Vypočteme parciální derivace a položíme je rovné nule

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=10x_1-2x_2-4=0,\frac{\partial}{\partial x_2}=-2x_1-10x_2+4=0$$

- Z toho

$$x_1=1/3, x_2=-1/3 \quad \|\mathbf{r}\|=\left(-1/3\right)^2+\left(-2/3\right)^2+\left(1/3\right)^2\approx \quad 0.82$$

Příklad - Nejmenší čtverce

- Pro

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

- je

$$\mathbf{x}=\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\ -1/3\end{bmatrix}$$

- Pak

$$\mathbf{r}=\mathbf{Ax}-\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3\\ -1/3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3\\ -2/3\\ -2/3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/3\\ -2/3\\ 1/3\end{bmatrix}$$

- Tedy

$$x_1=1/3,\ x_2=-1/3 \qquad \left\|\mathbf{r}\right\|=\left(-1/3\right)^2+\left(-2/3\right)^2+\left(1/3\right)^2\approx \ 0.82$$

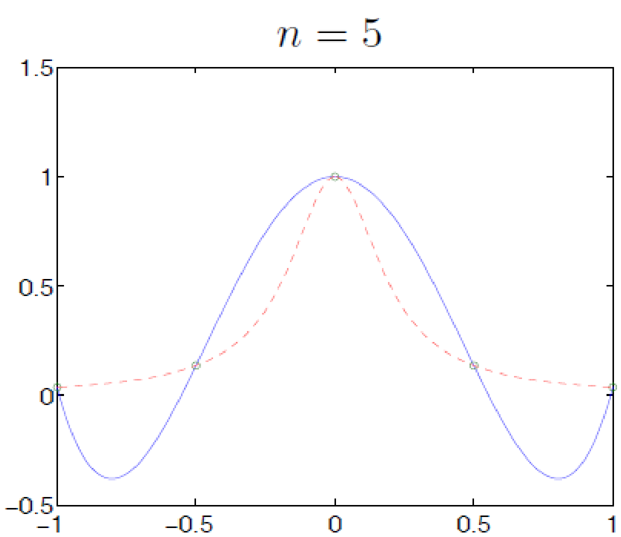
Příklad - Data fitting interpolací

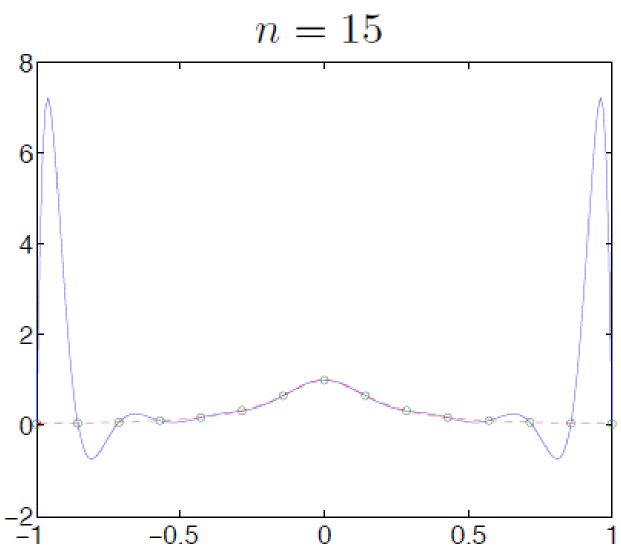
Zadání: Napasuj polynom $g(t)$ na funkci $f(t)=\dfrac{1}{1+25t^2}$ na intervalu [-1,1]

Řešení interpolací – stejný počet vzorků jako počet koeficientů polynomu

1. Vyber $m=n$ bodů $t_i \in [-1,1]$ a vypočti $f(t_i)=1/(1+25t_i^2)$
2. Interpoluj přesným řešením $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$
3. Výsledek

čárkovaně: f
plnou čarou:
Kroužky:
body
$(t_i, f(t_i)=g(t_i))$





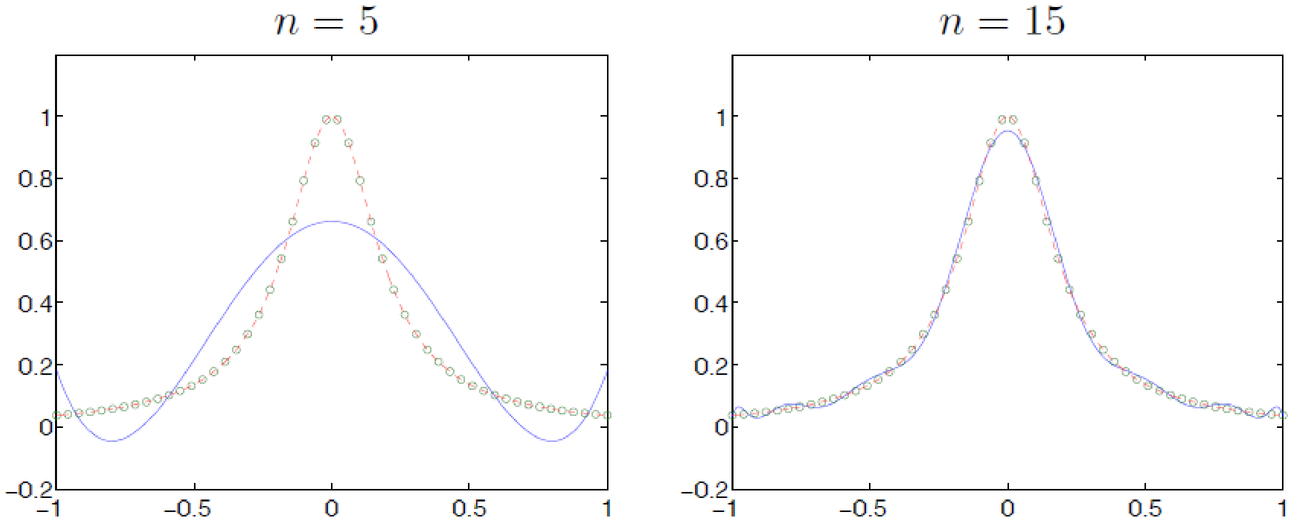
- Větší počet *n* = *m* zřejmě nezlepší kvalitu napasování

Stejný příklad jinak - Data fitting aproximací

Řešení aproximací – větší počet vzorků než počet koeficientů polynomu

1. Vyber polynom stupně $n-1$ a $n \ll m = 50$ bodů $t_i \in [-1,1]$ a vypočti $f(t_i) = 1/(1+25t_i^2)$
2. Napasuj polynom minimalizací $\|\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\|$
3. Výsledek

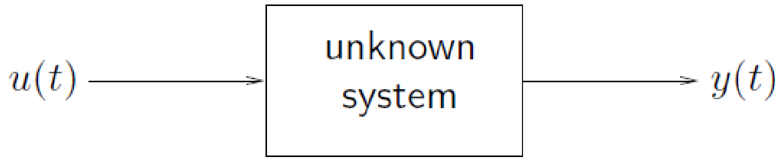
čárkovaně: f
plnou čarou: g
kroužky: body $(t_i, f(t_i) = g(t_i))$



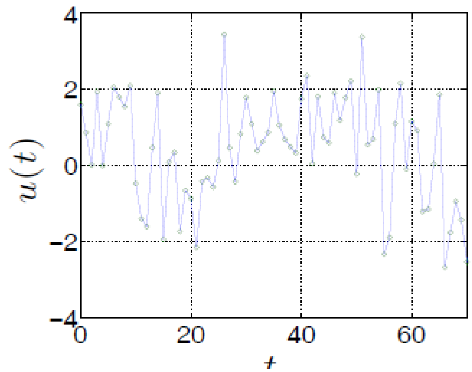
- Dostáváme zřejmě mnohem lepší výsledek než při interpolaci

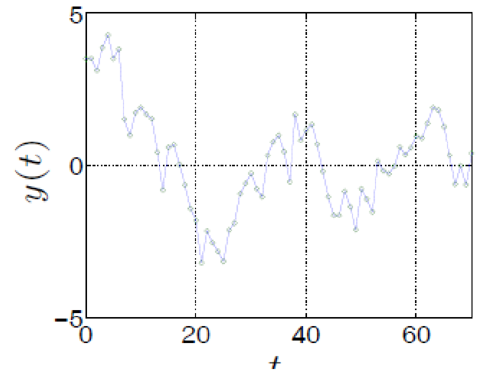
Příklad - identifikace

measure input $u(t)$ and output $y(t)$ for $t = 0, \dots, N$ of an unknown system



example ($N = 70$):





moving average model

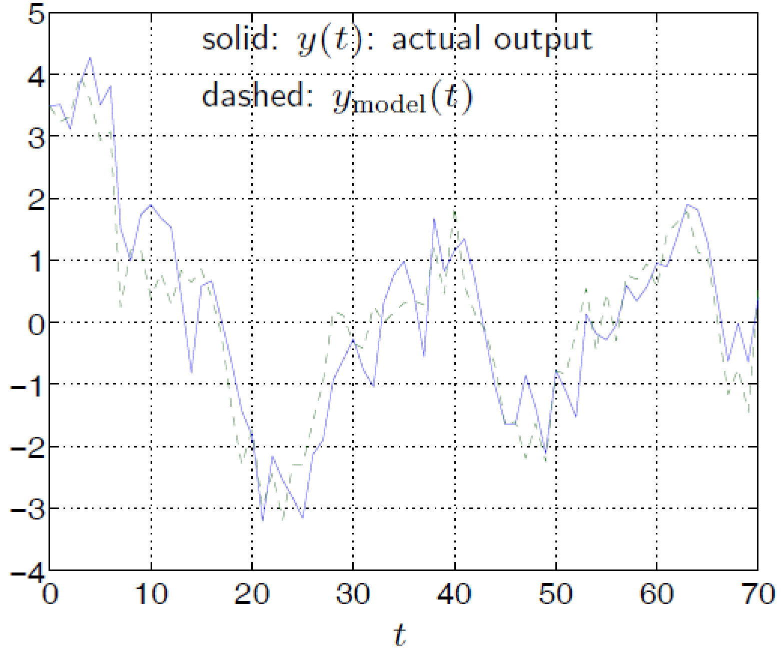
$$y_{\text{model}}(t) = h_0 u(t) + h_1 u(t-1) + h_2 u(t-2) + \cdots + h_n u(t-n)$$

where $y_{\text{model}}(t)$ is the model output

Pokračování příkladu - identifikace

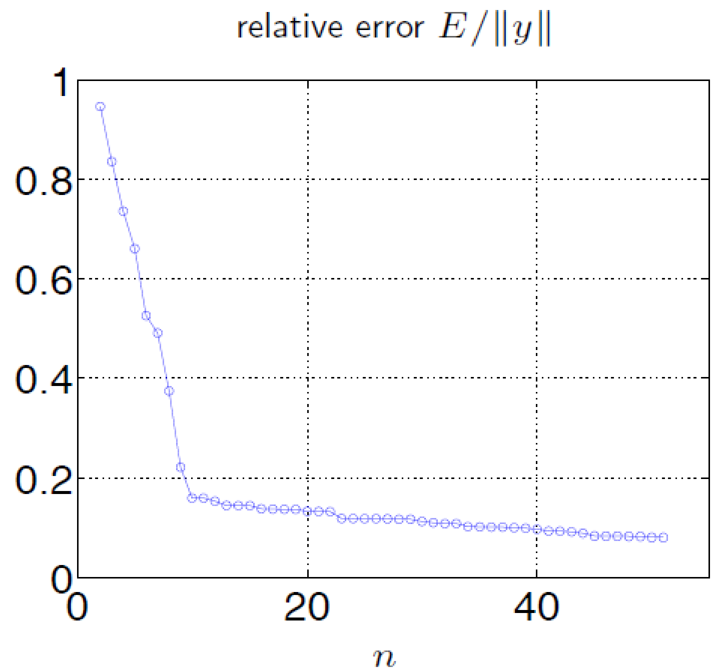
example (I/O data of page 8-15) with $n = 7$: least-squares solution is

$$h_0 = 0.0240, \quad h_1 = 0.2819, \quad h_2 = 0.4176, \quad h_3 = 0.3536,$$
$$h_4 = 0.2425, \quad h_5 = 0.4873, \quad h_6 = 0.2084, \quad h_7 = 0.4412$$



Příklad – řád modelu

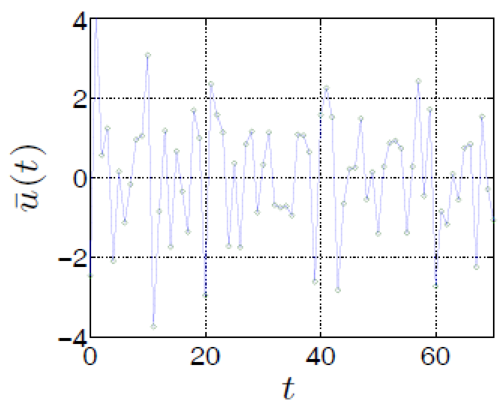
model order selection: how large should n be?

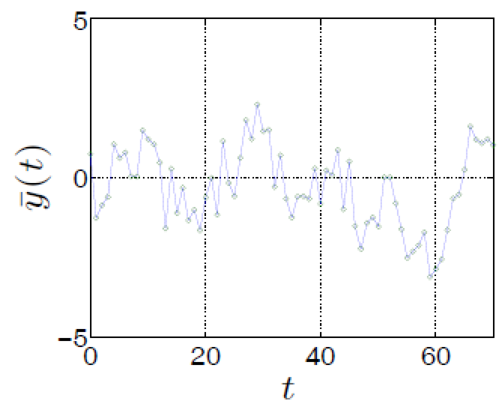


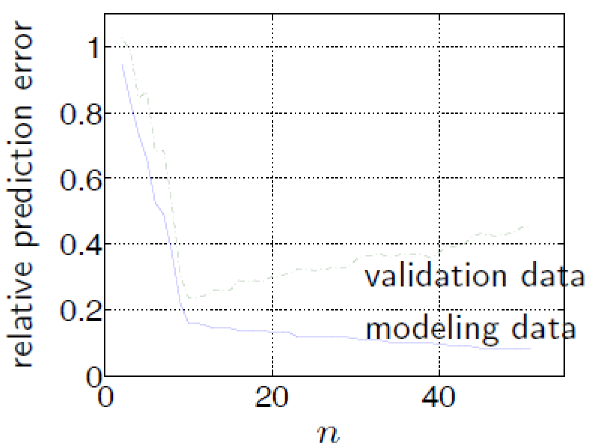
- suggests using largest possible n for smallest error
- much more important question: how good is the model at predicting *new data* ($i.e.$, not used to calculate the model)?

Příklad – validace modelu na jiných datech

model **validation**: test model on a new data set (from the same system)







- for n too large the *predictive ability* of the model becomes worse!
- validation data suggest $n = 10$