Příklady k přednášce
6 - Spojování a struktury

Michael Šebek

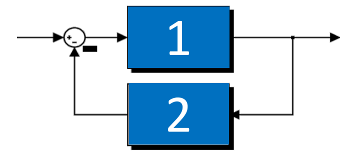
Automatické řízení 2019

04.03.2019

Zpětnovazební spojení – obecný případ

Značení dle přednášky

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{y}$$



$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1(\mathbf{u} - \mathbf{y}_2) \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\,\mathbf{u} - \mathbf{B}_1(\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} - \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{y} \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 \\
&\quad -\mathbf{B}_1\mathbf{D}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{u} \\
\dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{y} = \\
&\quad \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 \\
&\quad +\mathbf{B}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_1 \\
&= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1(\mathbf{u} - \mathbf{y}_2) \\
&= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{u} - \mathbf{D}_1(\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{u} - \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{y}
\end{aligned}$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)\mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{u}$$

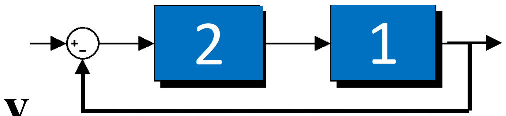
$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 \\
&\quad +(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 \\
&\quad +(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1 \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1 \end{bmatrix}\mathbf{u} \\
y &= (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2) \neq 0$$

Jednotková ZV - MIMO

Alternativa – kaskáda s jednotkovou ZV



$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{y}_2, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{y}, \mathbf{y} = \mathbf{y}_1$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{y}_2 \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\left(\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{u}_2\right) \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u}_2 \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{u} - \mathbf{y}\right) \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u} - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{y} \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u} - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 \\
&\quad - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u} \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 \\
&\quad + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u} - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u} \\
&= \left(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1\right)\mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\right)\mathbf{x}_2 \\
&\quad + \left(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\left(\mathbf{u} - \mathbf{y}\right) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} - \mathbf{B}_2\mathbf{y} \\
&= \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} - \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u} \\
&= -\mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\right)\mathbf{x}_2 + \left(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{y}_2 \\
&= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\left(\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{u}_2\right) \\
&= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u}_2 \\
&= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{u} - \mathbf{y}\right) \\
&= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u} - \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{y}
\end{aligned}$$

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)\mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u}$$

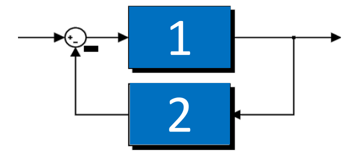
$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 \\
&\quad + \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 \\
&\quad + \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\left[\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\right]\mathbf{x} + \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{u}$$

$$\det\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right) \neq 0$$

Charakteristický polynom uzavřené smyčky



Vztah $\mathbf{F}(s)=\left(\mathbf{I}+\mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)\right)^{-1}\mathbf{F}_1(s)$ napovídá, že by charakteristický polynom uzavřené smyčky mohl být

$$\det\left(\mathbf{I}+\mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)\right)$$

Vypočteme ho podle definice z matice $\mathbf{A}$ použitím maticové dekompozice:
Mějme

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{22}$$ čtvercové

Pro $\mathbf{A}_{11}$ nesingulární

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta}=\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}, \qquad \det\mathbf{A}\neq\mathbf{0}\Rightarrow\det\mathbf{\Delta}\neq\mathbf{0}$$

Duálně pro $\mathbf{A}_{22}$ nesingulární

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{\Delta}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{\Delta}}=\mathbf{A}_{11}-\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}, \qquad \det\mathbf{A}\neq\mathbf{0}\Rightarrow\det\bar{\mathbf{\Delta}}\neq\mathbf{0}$$

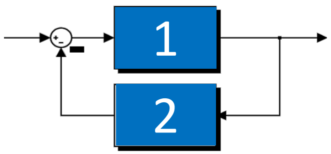
Z toho plyne

$$\det\mathbf{A}=\det\mathbf{A}_{11}\det\mathbf{\Delta}=\det\mathbf{A}_{22}\det\bar{\mathbf{\Delta}}$$

Charakteristický polynom uzavřené smyčky

Použijeme předchozí postup na stavovou matici složeného systému bez přímých vazeb

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$



a dostaneme

$$\begin{aligned}
\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)\det\left((s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)+\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\right) \\
&= \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)\det\left(\mathbf{I}_2+(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\right) \\
&= \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)\det\left(\mathbf{I}_3+\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\right) \\
&= \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)\left(1+\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\right) \quad SISO \\
&= \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)\left(1+F_1(s)F_2(s)\right)
\end{aligned}$$

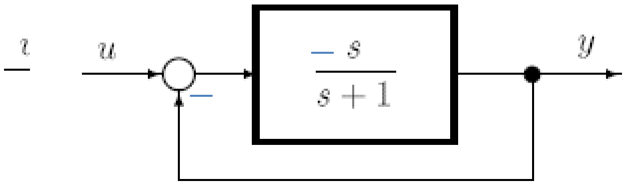
Protože $\det(\mathbf{MN}) = \det(\mathbf{NM})$ tak

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)\det(\mathbf{I}+\underbrace{\mathbf{C}_2(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2}_{\mathbf{F}_2(s)}\underbrace{\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1}_{\mathbf{F}_1(s)})$$

$$\begin{aligned}
&= \det(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)\det(\mathbf{I}+\mathbf{F}_2(s)\mathbf{F}_1(s)) \\
&= \det(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)\det(\mathbf{I}+\mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)) \\
&= \det(s\mathbf{I}_1-\mathbf{A}_1)\det(s\mathbf{I}_2-\mathbf{A}_2)\det\begin{bmatrix} I_k & \mathbf{F}_1(s) \\ -\mathbf{F}_2(s) & I_l \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

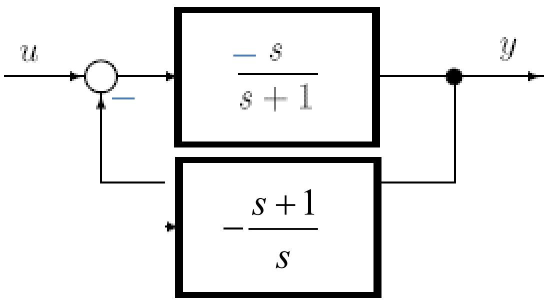
Příklady - ryzost

$$F(s)=\frac{-\dfrac{s}{s+1}}{1+\left(-\dfrac{s}{s+1}\right)}=\frac{-s}{1}=-s$$



- Výsledný systém není ryzí, nemá stavový popis
- Přesto, že dílčí subsystémy ryzí jsou a stavové popisy mají
- Spojením ryzích systémů vznikl systém neryzí

$$F(s)=\frac{-\dfrac{s}{s+1}}{1-\left(-\dfrac{s+1}{s}\right)\left(-\dfrac{s}{s+1}\right)}=\frac{-\dfrac{s}{s+1}}{1-1}=\frac{-\dfrac{s}{s+1}}{0}=\infty$$



- Výsledný systém nemá přenos
- Přesto, že dílčí subsystémy ryzí jsou a přenosy
- Spojením ryzích systémů vznikl systém bez přenosu, s nekonečným zesílením

Příklady: zesílení v nekonečnu (VF)

Věta o počáteční hodnotě: Signál $f(t)$ má (po)počáteční hodnotu $f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sf(s)$

- Zřejmě $f(0^+) = 0$ když je stupeň čitatel obrazu alespoň o dvě menší než stupeň jmenovatele obrazu

Podle přenosu:

Pro (ne striktně) ryzí přenos

$$\frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots}$$

- „začíná“ impulzní odezva v $g(0^+) = \lim_{s\to\infty} (b_n s^{n+1} + \cdots) / (a_n s^n + \cdots) = \pm\infty$
- skoková odezva $h(0^+) = \lim_{s\to\infty} (b_n s^n + \cdots) / (a_n s^n + \cdots) = b_n / a_n$

Pro striktně ryzí přenos

$$\frac{b_{n-1} s^{n-1} + \cdots}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots}$$

- „začíná“ impulzní odezva v $g(0^+) = b_{n-1} / a_n$ (když $b_{n-1} = 0 \Rightarrow g(0^+) = 0$)
- a skoková odezva v $h(0^+) = 0$

Deskriptorový popis derivátoru

- tzv. deskriptorový model

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

- je obecnější a umožnuje popsat i neryzí systémy
- Pro ně je matice $\mathbf{E}$ singulární

- Přenos se z něj vypočte takto

$$y(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}u(s)$$

Příklad

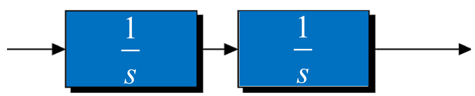
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

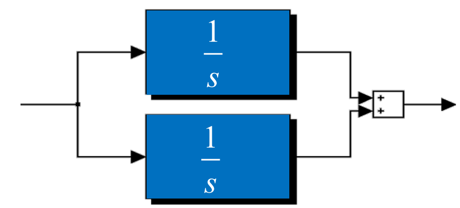
$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_1 \\ 0 &= x_2 - u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_1 \\ x_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad y = x_1 = \dot{x}_2 = \dot{u}$$

$$\mathbf{C}\left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -s \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} = s$$

Příklad: hraní s integrátory

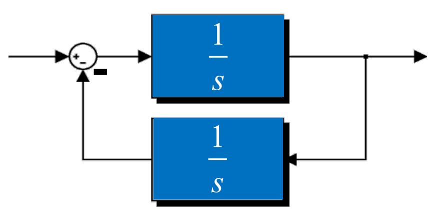
- 

$$F(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}$$

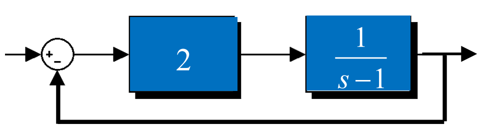


$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}=\frac{2}{s^2}$$

- Uzavřením zpětné vazby vzniká úplně nový systém!



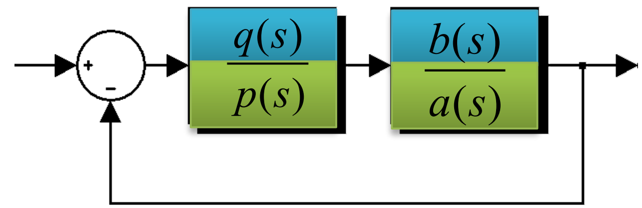
$$F(s)=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}\frac{1}{s}}=\frac{s}{s^2+1}$$



$$F(s)=\frac{2\frac{1}{s-1}}{1+2\frac{1}{s-1}}=\frac{2}{s-1+2}=\frac{2}{s+1}$$

Co zhruba můžeme řízením dosáhnout

$$S(s)=\frac{a(s)p(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}$$



$$L(s)=G(s)K(s)=\frac{b(s)q(s)}{a(s)p(s)}$$

- V čitateli S jsou póly L, tedy póly soustavy a regulátoru (pokud nedojde k vykrácení)
- Ve jmenovateli je „nový polynom“ můžeme tedy stabilizovat nestabilní soustavu
- Když je soustava / regulátor nestabilní, má *S* nestabilní nuly (důležité pro servo-systémy).
- Stabilizace „něco stojí“ - možnost ovlivnit chování je pak omezená

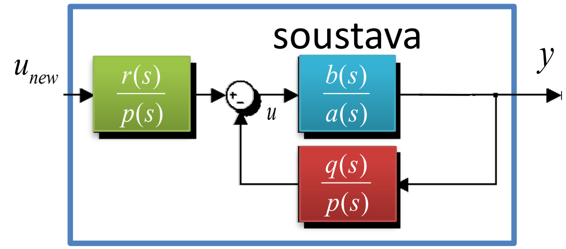
$$T(s)=\frac{b(s)q(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}$$

- V čitateli T jsou nuly L (nuly soustavy a regulátoru), pokud nekrátíme
- Když má soustava nestabilní nuly, má je i T

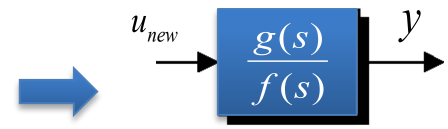
  Nestabilních nul se nemůžeme zbavit

Užitečné poučky pro „Model matching“

- Jak můžeme změnit přenos pomocí FF a FB



Výsledný systém



Vzorový model

$$\frac{b(s)r(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}=\frac{g(s)}{f(s)}$$

$$\frac{\bar{b}(s)r(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}=\frac{\bar{g}(s)}{f(s)}$$

$$\frac{\bar{b}(s)r(s)}{f(s)\bar{b}(s)t(s)}=\frac{\bar{g}(s)}{f(s)}$$

$$\frac{b(s)}{g(s)}=\frac{\bar{b}(s)}{\bar{g}(s)}$$

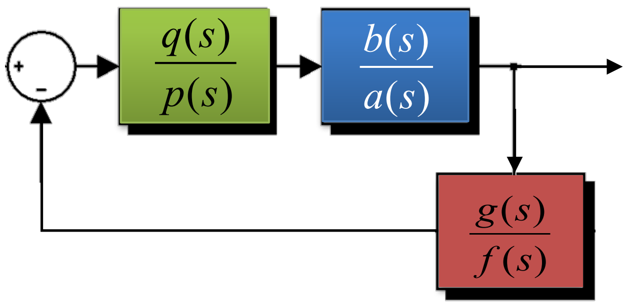
$$a(s)p(s)+b(s)q(s)=f(s)\bar{b}(s)$$

$$r(s)=\bar{g}(s)$$

  - Nuly: Některé ponecháme, některé vykrátíme, některé přidáme
  - Póly: posuneme, pokud to jde
- Tvrdá omezení
  - Nestabilní nuly nemůžeme vykrátit
  - Neřiditelné/nepozorovatelné póly nemůžeme posunout
- Další, měkčí omezení později

Dynamika senzoru

- od senzoru často „čekáme“ jednu potíž: přidává šum měření
- ale někdy to nestačí a musíme počítat i s jeho dynamikou!



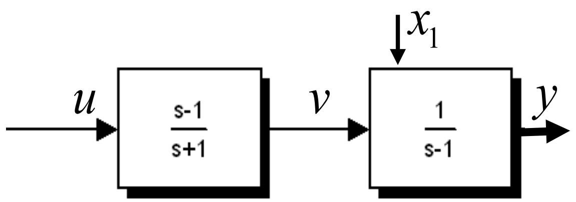
$$y(s) = \frac{b(s)q(s)}{a(s)p(s)f(s) + b(s)q(s)g(s)} y_{ref}(s)$$

Vyjasnění divných příkladů

Příklad se vstupní nulou:

- Celkový charakteristický polynom je

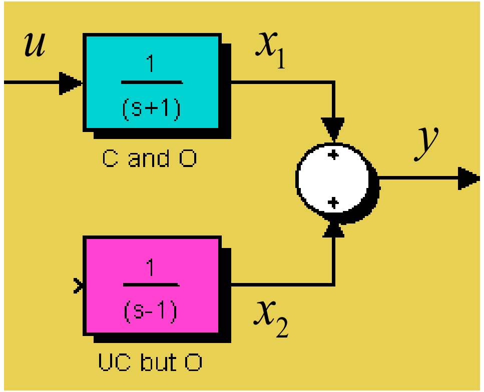
$$c(s)=\left(s+1\right)(s-1)$$



Příklad „větve bez vstupu

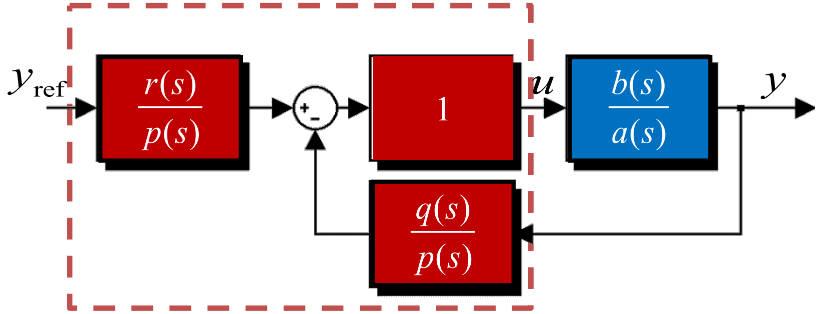
- Celkový charakteristický polynom je

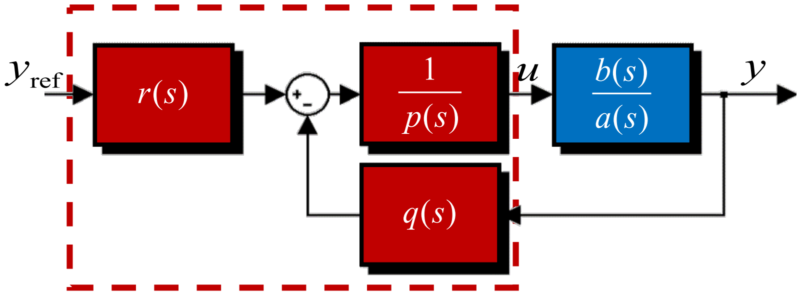
$$c(s)=\left(s+1\right)(s-1)$$



Rozdíl

- Jaký je rozdíl mezi těmito dvěma systémy?





- Přenos z reference na výstup je zdá se stejný, ale zkusme charakteristický polynom:
- Za předpokladu, že subsystémy nemají skryté módy, tj. $a(s), p(s)$ jsou charakteristické polynomy ve svých blocích
- má systém nalevo charakteristický polynom $$c(s) = \big(a(s)p(s) + b(s)q(s)\big)\,p(s)$$
- a systém vpravo $$c(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s)$$
- V čem je rozdíl?