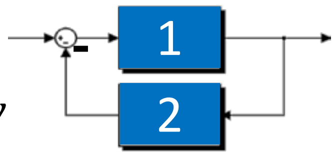
Příklady k přednášce
6 - Spojování a struktury

Michael Šebek

Automatické řízení 2017

Odvození obecného případu (značení viz přednáška)



$$u_1 = u - y_2,\, y_1 = u_2 = y$$

$$y = y_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 u_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\left(u - y_2\right)$$
$$= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 u - \mathbf{D}_1\left(\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 y\right)$$

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right) y = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_1 u$$

$$y = \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2$$
$$+ \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1 u$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 u_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\left(u - y_2\right)$$
$$= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 u - \mathbf{B}_1\left(\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 y\right)$$
$$= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 u - \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 y$$
$$= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2$$
$$-\mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1 u - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1 u$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 u_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 y =$$
$$\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2$$
$$+\mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1 u$$

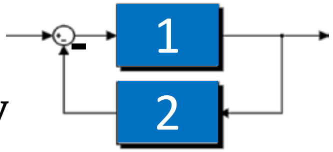
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$
$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1 \\ \mathbf{B}_2\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\left[\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2\right]\mathbf{x} + \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1 u$$

$$\det\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right) \neq 0$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 =$$
$$= \lim_{s\to\infty}\left(1 + f_1(s) f_2(s)\right)$$

Zpětnovazební spojení - MIMO

MIMO verze



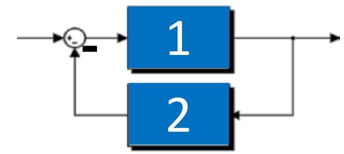
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}(s) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G_1}(s)\mathbf{G_2}(s)\right)^{-1} \mathbf{G}_1(s)\mathbf{u}(s)$$

$$\det\left(\mathbf{I}_k + \mathbf{G_1}(s)\mathbf{G_2}(s)\right) = \det\left(\mathbf{I}_l + \mathbf{G}_2(s)\mathbf{G}_1(s)\right)$$

$$= \det\begin{bmatrix} I_k & \mathbf{G_1}(s) \\ -\mathbf{G_1}(s) & I_l \end{bmatrix}$$

$$\lim_{s\to\infty}\left(\mathbf{I} + \mathbf{G_1}(s)\mathbf{G_2}(s)\right) = \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right) \neq 0$$



Pokud $\left(1+F_1(s)F_2(s)\right)=0$, složený systém nemá přenos!

Když $\det\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)=0$, složený systém nemá stavový popis!

$$\deg a_1(s) \dot{<} \deg b_1(s) \wedge \deg a_2(s) \geq \deg b_2(s)$$

Platí $\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2=\lim_{s\to\infty}\left(1+F_1(s)F_2(s)\right)$, takže

$$\det\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)\neq 0 \quad \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \quad 1+F_1(s)F_2(s)\neq 0$$

Když je jeden ze subsystémů ryzí a druhý striktně ryzí, pak je výsledný systém ryzí

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1+F_1(s)F_2(s)}$$

$$\deg\left(a_1(s)a_2(s)+b_1(s)b_2(s)\right)=\deg a_1(s)a_2(s))>\deg b_1(s)a_2(s)$$

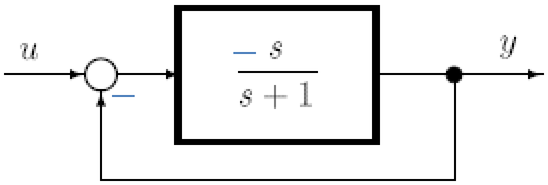
$$\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{a_2(s)b_1(s)}{a_1(s)a_2(s)+b_1(s)b_2(s)}$$

Pokud ten striktně ryzí je „1“, pak je výsledek striktně ryzí.

Obojí zřejmé i ze stavového popisu $\quad y=\ldots\mathbf{x}_1+\ldots\mathbf{x}_2+\left(\mathbf{I}+\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\right)^{-1}\mathbf{D}_1u$

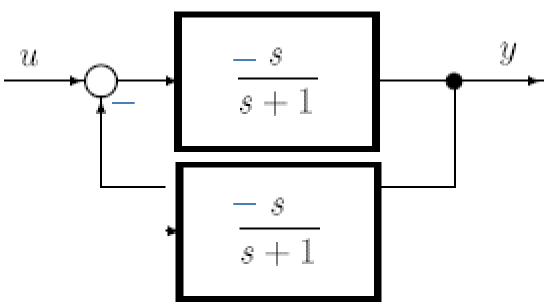
Příklady - ryzost

$$F(s)=\frac{-\dfrac{s}{s+1}}{1+\left(-\dfrac{s}{s+1}\right)}=\frac{-s}{1}=-s$$



- Výsledný systém není ryzí, nemá stavový popis
- Přesto, že dílčí subsystémy ryzí jsou a stavové popisy mají
- Spojením ryzích systémů vznikl systém neryzí

$$F(s)=\frac{-\dfrac{s}{s+1}}{1-\left(-\dfrac{s+1}{s}\right)\left(-\dfrac{s}{s+1}\right)}=\frac{-\dfrac{s}{s+1}}{1-1}=\frac{-\dfrac{s}{s+1}}{0}=\infty$$



- Výsledný systém nemá přenos
- Přesto, že dílčí subsystémy ryzí jsou a přenosy
- Spojením ryzích systémů vznikl systém bez přenosu, s nekonečným zesílením

deskriptorový popis derivátoru

- tzv. deskriptorový model

$$E\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- je obecnější a
- umožnuje popsat i neryzí systémy
- Pro ně je matice E singulární

- Přenos se z něj vypočte takto

$$y(s) = C\left(sE - A\right)^{-1} Bu(s)$$

Příklad

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

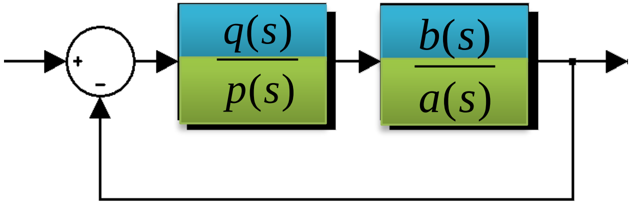
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_1 & \dot{x}_2 &= x_1 \\ 0 &= x_2 - u \rightarrow & x_2 &= u \rightarrow y = x_1 = \dot{x}_2 = \dot{u} \\ y &= x_1 & y &= x_1 \end{aligned}$$

$$C\left(sE - A\right)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -s \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ -1 \end{bmatrix} = s$$

Co zhruba můžeme řízením dosáhnout

$$S(s)=\frac{a(s)p(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}$$



$$L(s)=G(s)K(s)=\frac{b(s)q(s)}{a(s)p(s)}$$

- V čitateli S jsou póly L, tedy póly soustavy a regulátoru (pokud nedojde k vykrácení)
- Ve jmenovateli je „nový polynom“ můžeme tedy stabilizovat nestabilní soustavu
- Když je soustava / regulátor nestabilní, má *S* nestabilní nuly (důležité pro servo-systémy).
- Stabilizace „něco stojí“ - možnost ovlivnit chování je pak omezená

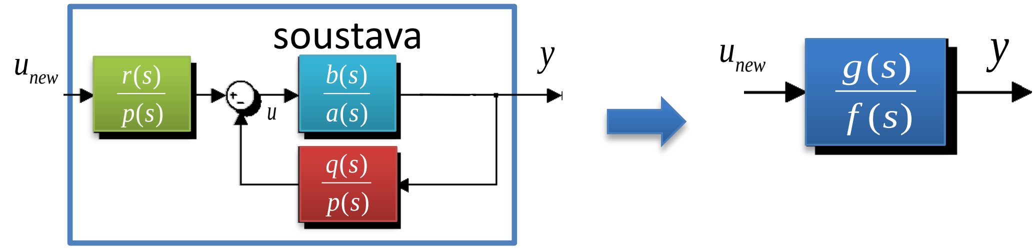
$$T(s)=\frac{b(s)q(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}$$

- V čitateli T jsou nuly L (nuly soustavy a regulátoru), pokud nekrátíme
- Když má soustava nestabilní nuly, má je i T

  Nestabilních nul se nemůžeme zbavit

Užitečné poučky pro „Model matching“

- Jak můžeme změnit přenos pomocí FF a FB



Výsledný systém

Vzorový model

$$\frac{b(s)r(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}=\frac{g(s)}{f(s)}$$

$$\frac{\bar{b}(s)r(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}=\frac{\bar{g}(s)}{f(s)}$$

$$\frac{\bar{b}(s)r(s)}{f(s)\bar{b}(s)t(s)}=\frac{\bar{g}(s)}{f(s)}$$

$$\frac{b(s)}{g(s)}=\frac{\bar{b}(s)}{\bar{g}(s)}$$

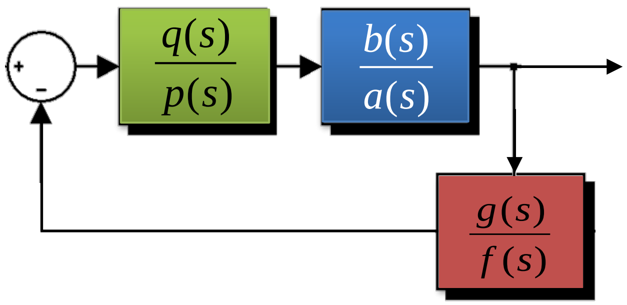
$$a(s)p(s)+b(s)q(s)=f(s)\bar{b}(s)$$

$$r(s)=\bar{g}(s)$$

  - Nuly: Některé ponecháme, některé vykrátíme, některé přidáme
  - Póly: posuneme, pokud to jde
- Tvrdá omezení
  - Nestabilní nuly nemůžeme vykrátit
  - Neřiditelné/nepozorovatelné póly nemůžeme posunout
- Další, měkčí omezení později

Dynamika senzoru

- od senzoru často „čekáme“ jednu potíž: přidává šum měření
- ale někdy to nestačí a musíme počítat i s jeho dynamikou!



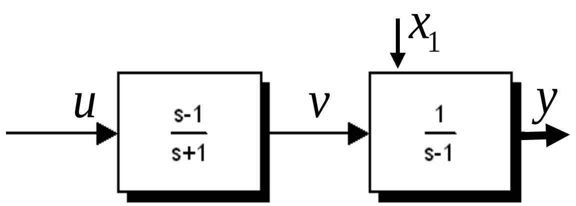
$$y(s)=\frac{b(s)q(s)}{a(s)\,p(s)\,f(s)+b(s)q(s)g(s)}\,y_{ref}(s)$$

Vyjasnění divných příkladů

Příklad se vstupní nulou:

- Celkový charakteristický polynom je

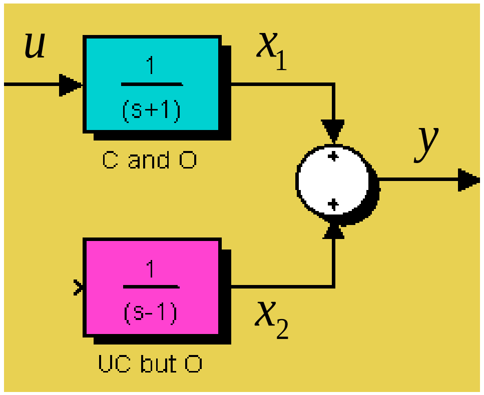
$$c(s)=\left(s+1\right)(s-1)$$



Příklad „větve bez vstupu

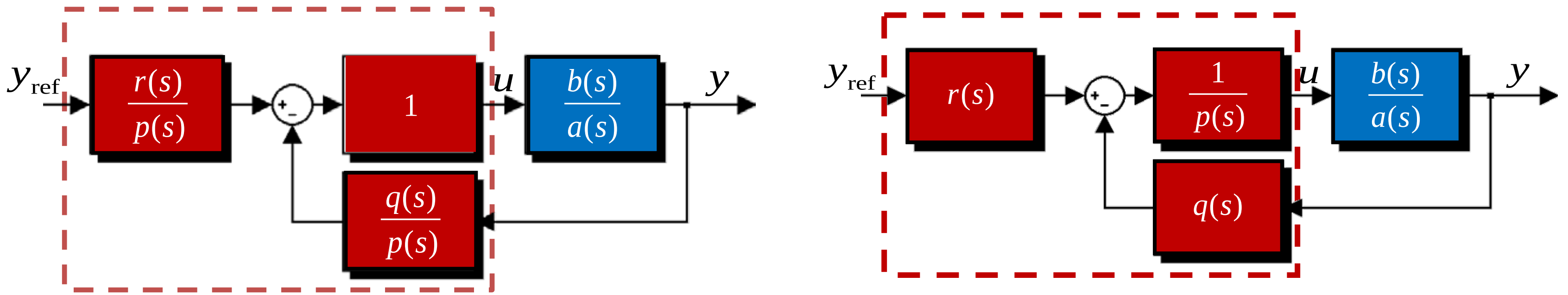
- Celkový charakteristický polynom je

$$c(s)=\left(s+1\right)(s-1)$$



Rozdíl

- Jaký je rozdíl mezi těmito dvěma systémy?



- Přenos z reference na výstup je zdá se stejný, ale zkusme charakteristický polynom:
- Za předpokladu, že subsystémy nemají skryté módy, tj. $a(s), p(s)$ jsou charakteristické polynomy ve svých blocích
- má systém nalevo charakteristický polynom $$c(s) = \left(a(s)p(s) + b(s)q(s)\right)p(s)$$
- a systém vpravo $$c(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s)$$
- V čem je rozdíl?