

Příklady k přednášce
8 - Geometrické místo kořenů
aneb Root Locus



Michael Šebek
Automatické řízení 2019



Úhel bodu na RL vzhledem k nulám a pólům

- Pro bod na RL platí (pro nějaké $K > 0$) $1 + KL(s) = 0 \rightarrow KL(s) = -1$
 $\rightarrow \angle KL(s) = (2k + 1) \times 180^\circ \rightarrow \angle L(s) = (2k + 1) \times 180^\circ$
 = lichý násobek $180^\circ = \sum \text{úhlů od nul} - \sum \text{úhlů od pólů}$

Příklad:

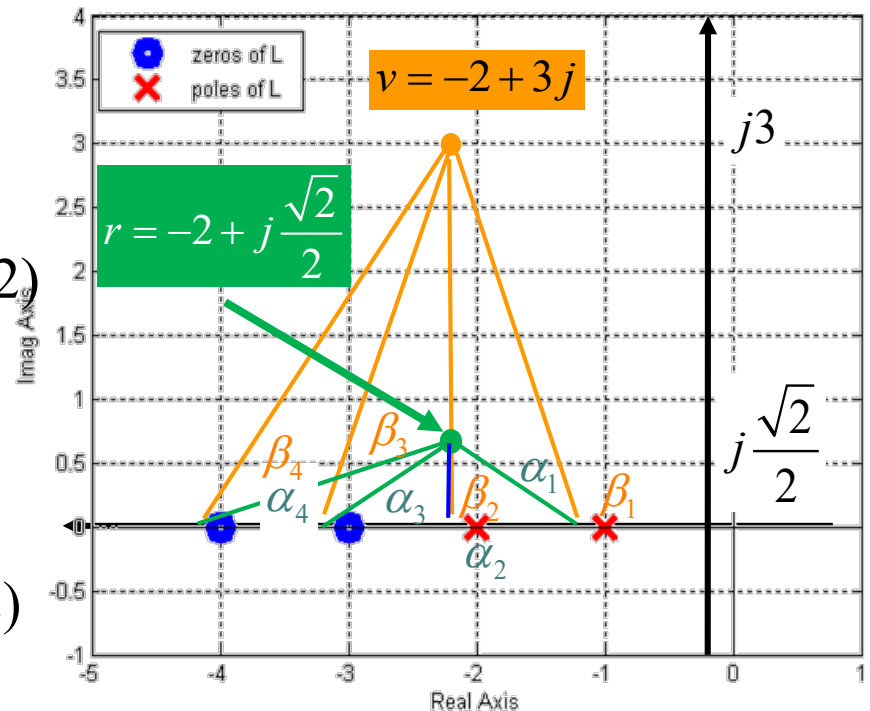
$$L(s) = \frac{(s + 3)(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)}$$

- Bod $v = -2 + 3j$ neleží na RL

$$\begin{aligned} \angle L(s) &= \beta_3 + \beta_4 - \beta_1 - \beta_2 \\ &= \angle(v + 3) + \angle(v + 4) - \angle(v + 1) - \angle(v + 2) \\ &= 72^\circ + 56^\circ - 108^\circ - 90^\circ \neq 180^\circ \end{aligned}$$

- Bod $r = -2 + j\frac{\sqrt{2}}{2}$ může ležet na RL

$$\begin{aligned} \angle L(s) &= \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 \\ &= \angle(r + 3) + \angle(r + 4) - \angle(r + 1) - \angle(r + 2) \\ &= 35^\circ + 20^\circ - 145^\circ - 90^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$



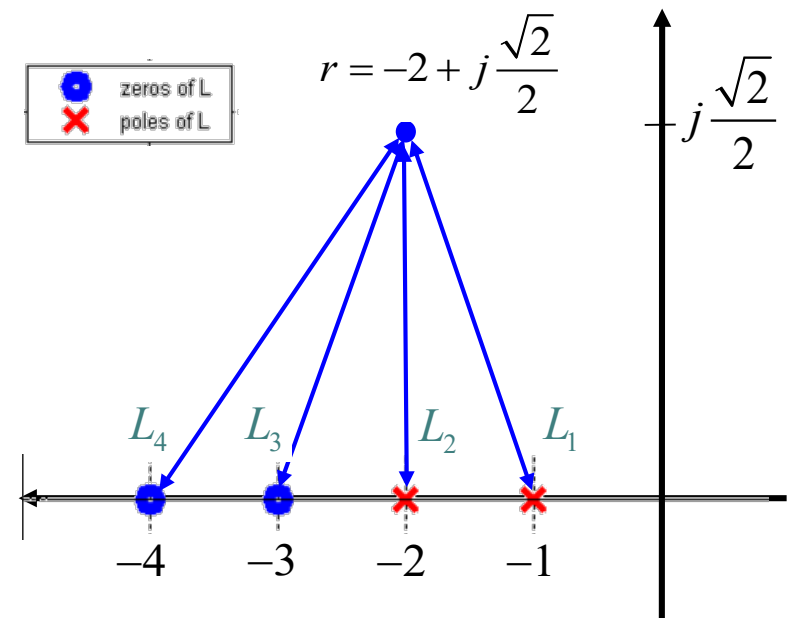


Vzdálenost bodu na RL od nul a pólů

- Pro bod na RL platí (pro nějaké $K > 0$) $1 + KL(s) = 0 \rightarrow |KL(s)| = 1$
 $K = 1/|L(s)| = (\prod \text{vzdáleností od pólů}) / (\prod \text{vzdáleností od nul})$
- Nelze to použít k testu, ale když už víte, že bod leží na RL, můžete tak zjistit příslušné zesílení

Příklad

$$L(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$
$$K = \frac{1}{|L(s)|} = \frac{|r+1||r+2|}{|r+3||r+4|} = \frac{L_1 L_2}{L_3 L_4} =$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{6}} \frac{2}{3\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}$$





Pravidla 1 a 2 pro kladný RL - Počet větví a symetrie

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

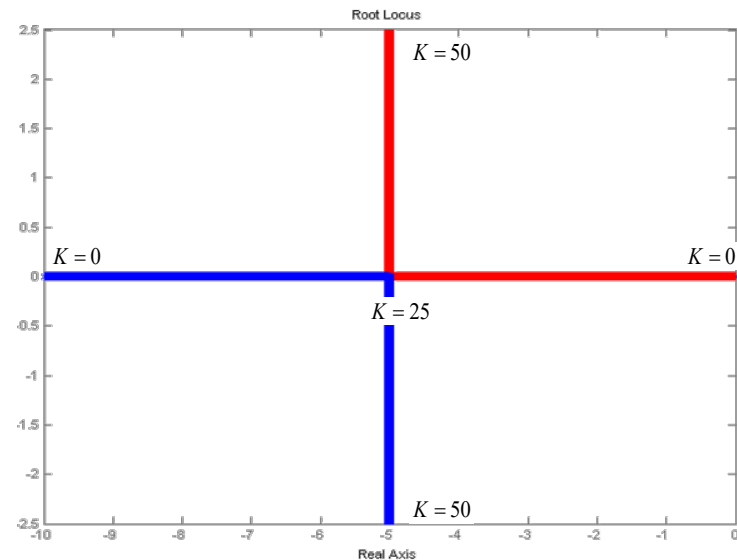
- **Pravidlo 1 (Počet větví)** je celkem zřejmé: každý CL pól se pohybuje se změnou K po své větvi RL.
- **Pravidlo 2 (Symetrie)** je také zřejmé: Polynom s reálnými koeficienty má kořeny buď reálné anebo v komplexně sdružených dvojicích, tedy vždy rozloženy symetricky podle reálné osy. Graf RL je tvořen kořeny CL, který má reálné koeficienty. Proto je RL symetrický. A to pro každé jednotlivé K !

Příklad

$$L(s) = \frac{1}{s(s+10)}$$

$$p_{cl}(s) = s^2 + 10s + K$$

$$s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - K}$$

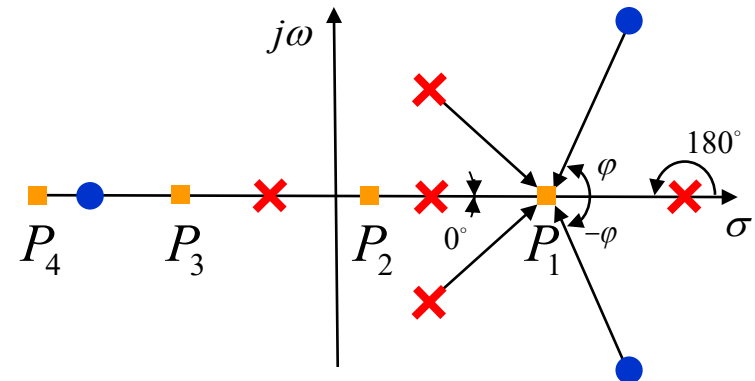




Pravidlo 3 – Segmenty na reálné ose

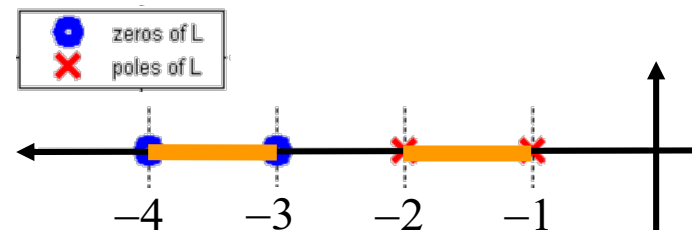
Ani tohle není obtížné: Abychom zjistili, zda body P_i na reálné ose mohou ležet na RL, sečteme u každého úhly k OL nulám a pólům. Zřejmě platí:

- Příspěvek úhlů od komplexně sdružené dvojice je vždy 0
- Příspěvek úhlů od reálných OL nul/pólů ležících nalevo od P_i je vždy 0
- Vliv mají jen OL nuly/póly ležící napravo od P_i : každý přispívá $\pm 180^\circ$
- Jejich celkový příspěvek je 0° , pokud jich je sudý počet. Naopak
- jejich celkový příspěvek je lichý násobek 180° , pokud jich je lichý počet



Příklad

- RL pro $L(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$ má reálné segmenty





Pravidlo 4 – Počáteční a koncové body

Přesněji řečeno Pravidlo 4 zní: Je-li

$$L(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots}, \text{ tak}$$

- n větví grafu RL začíná (pro $K = 0$) v n konečných pólech OL a
- m větví grafu RL končí (pro $K = \infty$) v m konečných nulách OL.
- pokud má OL nuly v nekonečnu, tak $n - m > 0$ větví RL končí (pro $K = \infty$) v nekonečnu (v těch nekonečných nulách)
- pokud by OL měla póly v nekonečnu, tak $m - n > 0$ větví RL začíná (pro $K = 0$) v nekonečnu (v těch nekonečných pólech)

Důkaz

- Pro $K = 0$, pak je CL charakteristický polynom $p_{cl}(s) = a(s) + Kb(s) = a(s)$ rovný OL charakteristickému polynomu, tedy n větví opravdu začíná v konečných OL pólech
- Při zkoumání nekonečných pólů vyjdeme z CL přenosu děleného K , což nezmění polohu nul a pólů. Protože je $\lim_{K \rightarrow 0} T/K = \lim_{K \rightarrow 0} L/(1 + KL) = L(s)$, i nekonečné CL póly = nekonečné OL póly



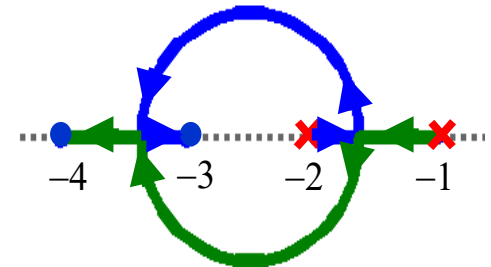
Pravidlo 4 – Počáteční a koncové body

Pokračujeme v důkazu pro $K = \infty$:

- Pro body na RL (!) platí $L(s) = -1/K$ a z toho $\lim_{K \rightarrow \infty} L(s) = \lim_{K \rightarrow \infty} 1/K = 0$ a tedy je bod s bodem RL pro $K = \infty$, právě když je nulou (konečnou či nekonečnou) OL přenosu. QED

Vraťme se k minulému příkladu s přenosem
$$L(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

- Podle pravidla 3 už víme, že RL má reálné segmenty
- Teď nově víme, že 2 větve vycházejí z OL pólů -1 a -2,
- blíží se k sobě po reálné ose, někde mezi -1 a -2 se setkají, osu symetricky opustí a nějak se na ní někde mezi -3 a -4 vrátí
- pak po reálné ose pokračují od sebe a skončí v -3 a -4
- Ještě ale nevíme, kde přesně reálnou osu opustí a kde se na ni vrátí





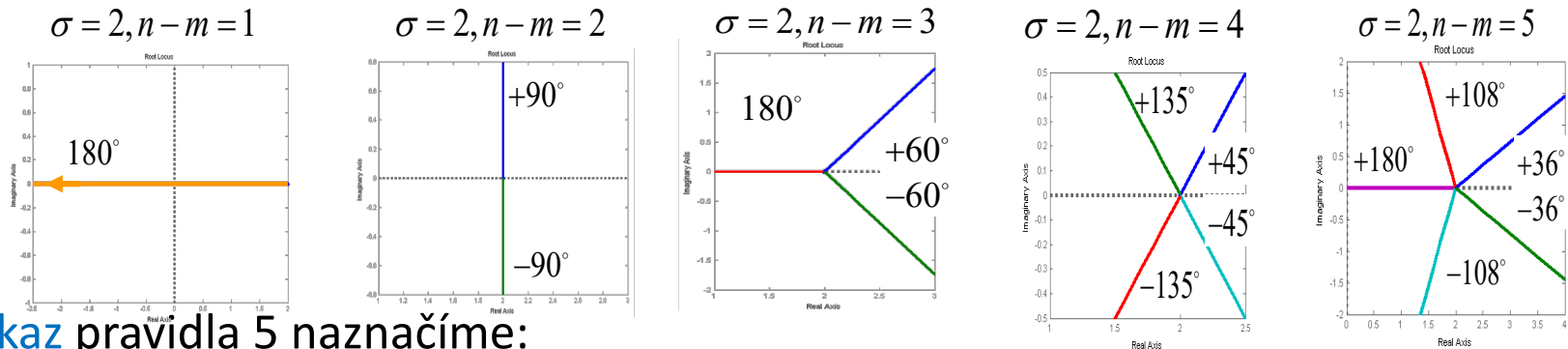
Pravidlo 5 – Chování v nekonečnu:

Nejprve probereme RL tzv. **asymptotického systému**

- začíná v bodě σ a má $n-m$ přímkových větví jdoucích do nekonečna

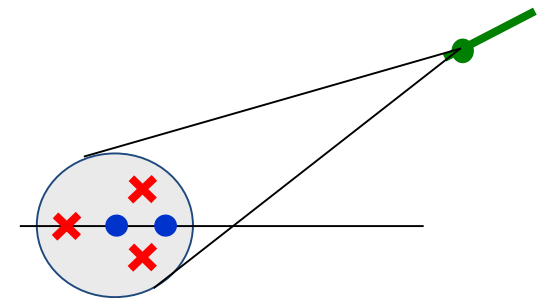
$$L(s) = \frac{1}{(s - \sigma)^{n-m}}$$

$$p_{cl}(s) = (s - \sigma)^{n-m} + K$$



Důkaz pravidla 5 naznačíme:

- z bodu RL velmi daleko od OL nul a pólů (pro velké s) vypadají všechny konečné OL nuly a póly, jako by byly stejné a reálné
- vliv každé nuly se vyruší vlivem nějakého pólu, takže v tom bodě nakonec „leží“ $n - m$ pólů
- tedy se pro velké s Evansova rovnice zjednoduší na Evansovu rovnici asymptotického systému
- tedy pro velké K se $n-m$ kořenů blíží větvím RL asymptotického systému





Pravidlo 5 – Chování v nekonečnu:

Nyní vypočteme σ :

- pro $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$ platí známý vztah $a_{n-1} = -\sum p_i$
- podobně pro $s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0 = (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)$ platí $b_{m-1} = -\sum z_i$
a pro $c(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 + K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0) = (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)$
- je-li $m < n - 1$, tak $-\sum r_i = -\sum p_i$ $c_{n-1} = a_{n-1} + Kb_{n-1} = -\sum r_i$
a střed (součet) CL pólů se nemění s K a je vždy reálný

Příklad: 4 konečné póly, 1 kon. a 3 nekon. nuly \rightarrow 3 větve RL vedou do nekon.

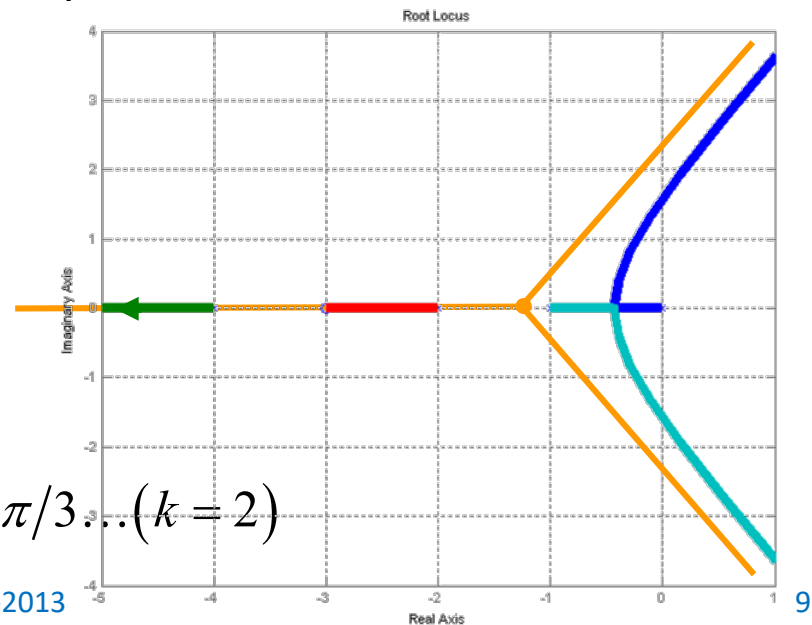
$$L(s) = \frac{(s + 3)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

- průsečík asymptot

$$\sigma_a = \frac{(0 - 1 - 2 - 4) - (-3)}{4 - 1} = -\frac{4}{3}$$

- úhly s reálnou osou

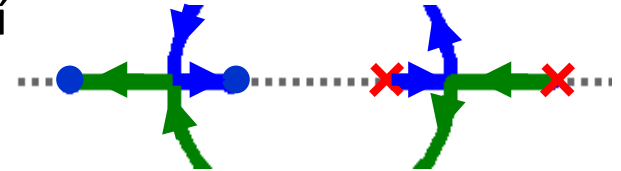
$$\theta_a = \frac{(2k + 1)\pi}{3} = \pi/3 (k = 0), \pi (k = 1), = 5\pi/3 \dots (k = 2)$$





Pravidlo 6 – Body rozpojení a spojení na reálné ose

- Protože $K = -1/L(s)$, jsou body rozpojení a spojení



- lokální maxima a lokální minima funkce

$$K = -1/L(\sigma)$$

na reálné ose

- Najdeme je pomocí nulových bodů derivace

$$\frac{dK}{d\sigma} = -\left(\frac{1}{L(\sigma)}\right)'$$

- Alternativně je můžeme vypočítat řešením rovnice

$$\sum_1^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_1^n \frac{1}{\sigma - p_i}$$

- protože ale tyto rovnice obvykle bez počítače nevyřešíme, můžeme si raději rovnou Matlabem nechat vykreslit celý RL



Analýza stability zpětnovazebního systému

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Určení rozsahu zesílení $K > 0$, aby zpětnovazební systém se zápornou zpětnou vazbou byl stabilní

$$L(s) = KG(s) = K \frac{40}{(s-1)(s+4)(s+10)}$$

Přenos otevřené smyčky roznásobíme

$$L(s) = KG(s) = K \frac{40}{s^3 + 13s^2 + 26s - 40}$$

Póly přenosu zpětnovazebního systému pro K

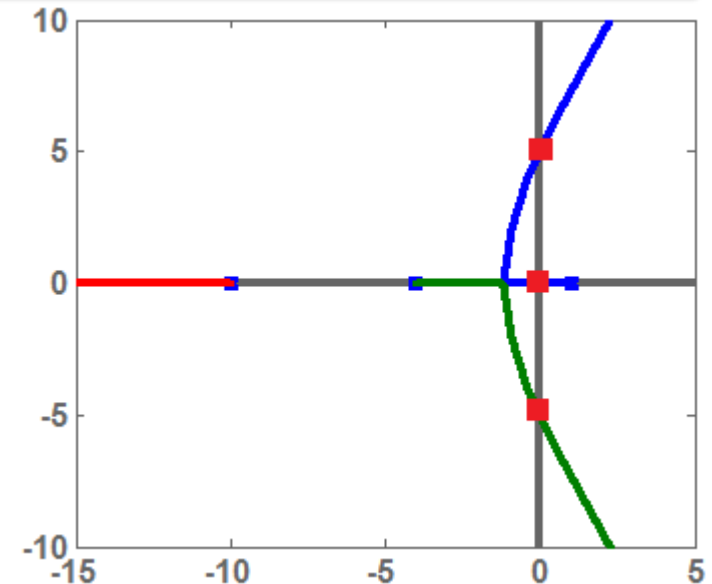
$$c(s) = s^3 + 13s^2 + 26s - 40 + 40K = 0$$

Póly na mezi stability mají **nulovou reálnou část**. Velikost imaginární části dostaneme dosazením $s = j\omega$ do předchozího vztahu. Řešení má dvě části:

$$\text{Im: } -\omega^3 + 26\omega = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0 ; \omega_2 = \mp\sqrt{26} \quad \dots \text{ dosadíme do reálné části}$$

$$\text{Re: } -13\omega^2 - 40 + 40K = 0 \Rightarrow K_1 = 1; K_2 = (13 \times 26 + 40)/40 = 9,45$$

Zpětnovazební systém je stabilní pro $K \in (1 ; 9,45)$.





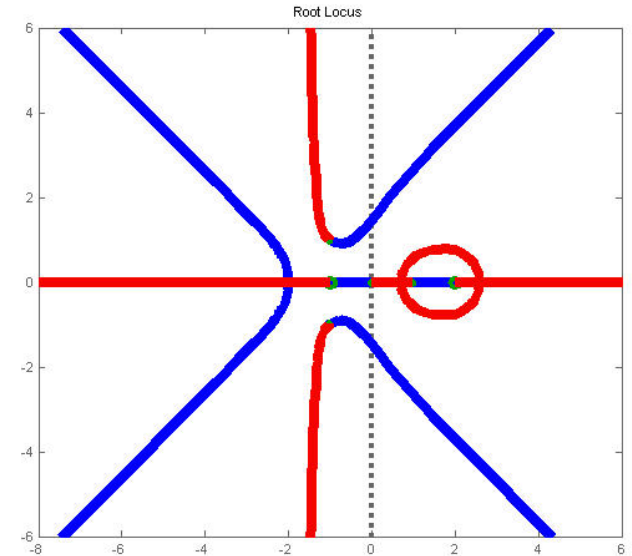
Příklady úplného RL

$$L(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{s(s-1)(s+2)^2((s+1)^2+1)}$$

$$n - m = 6 - 2 = 4 > 0$$

$$\theta_{a\text{-pos}} = (2k+1)\pi/4, \quad k = 0, \pm 1, 2$$
$$= \pi/4, 3\pi/4, -\pi/4, -3\pi/4$$

$$\theta_{a\text{-neg}} = 2k\pi/4, \quad k = 0, \pm 1, 2$$
$$= 0, \pi/2, -\pi/2, \pi$$

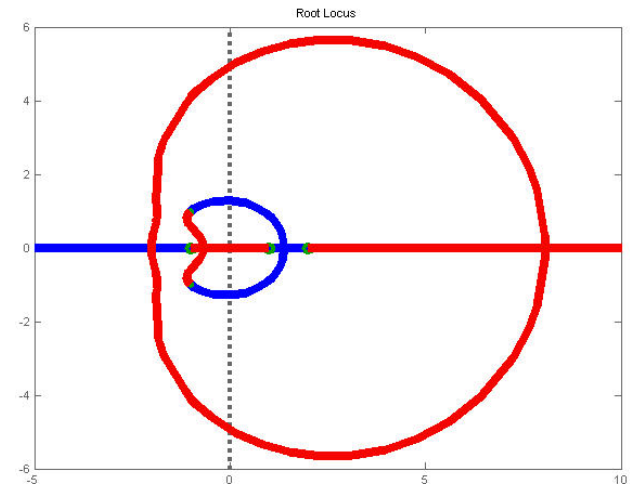


$$L(s) = \frac{(s+1)(s-1)(s-2)}{(s+2)^2((s+1)^2+1)}$$

$$n - m = 4 - 3 = 1 > 0$$

$$\theta_{a\text{-pos}} = (2k+1)\pi, \quad k = 0$$
$$= \pi$$

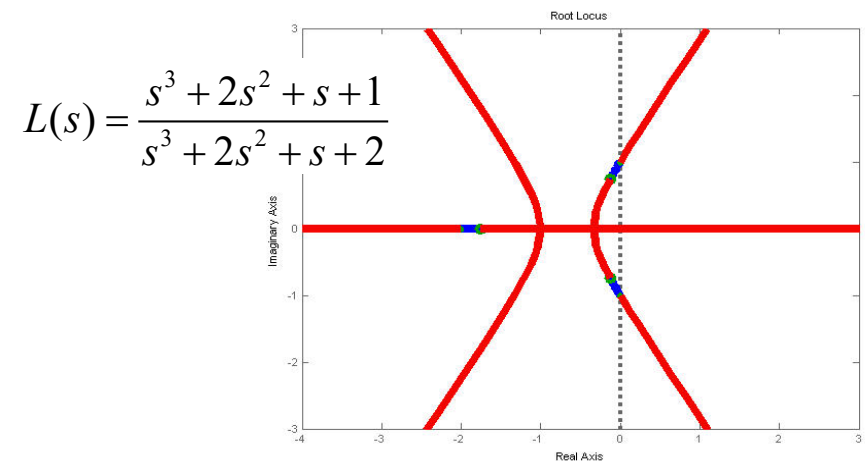
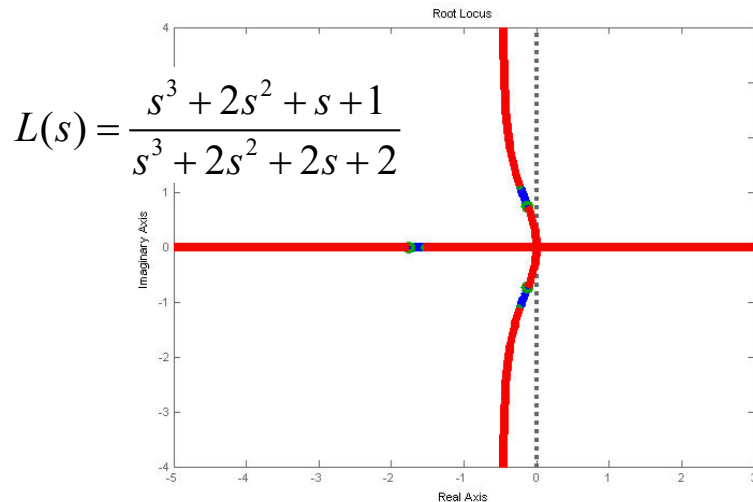
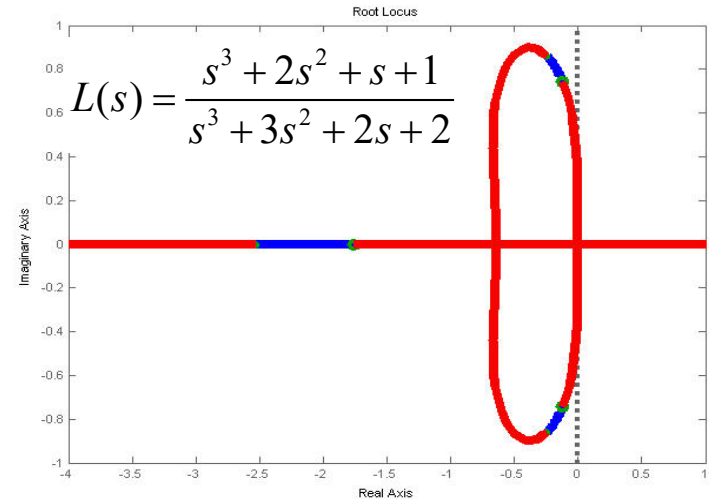
$$\theta_{a\text{-neg}} = 2k\pi, \quad k = 0$$
$$= 0$$





Příklady úplného RL

- Pro přenos ryzí ale ne striktně je situace s asymptotami složitější
- Vždy jsou dvě reálné asymptoty, ale mohou být i další,
- na rozdíl od kladného RL





Dynamická kompenzace PI

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Systém pro řízení výšky hladiny má v pracovním bodě přenos

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+5)(s+20)}$$

- Požadujeme nulovou regulační odchylku na skok reference v ustáleném stavu
- To splní např. regulátor s dynamikou PI

$$D(s) = k_P + \frac{k_I}{s} = \frac{k_P}{s}(s + \omega_I)$$

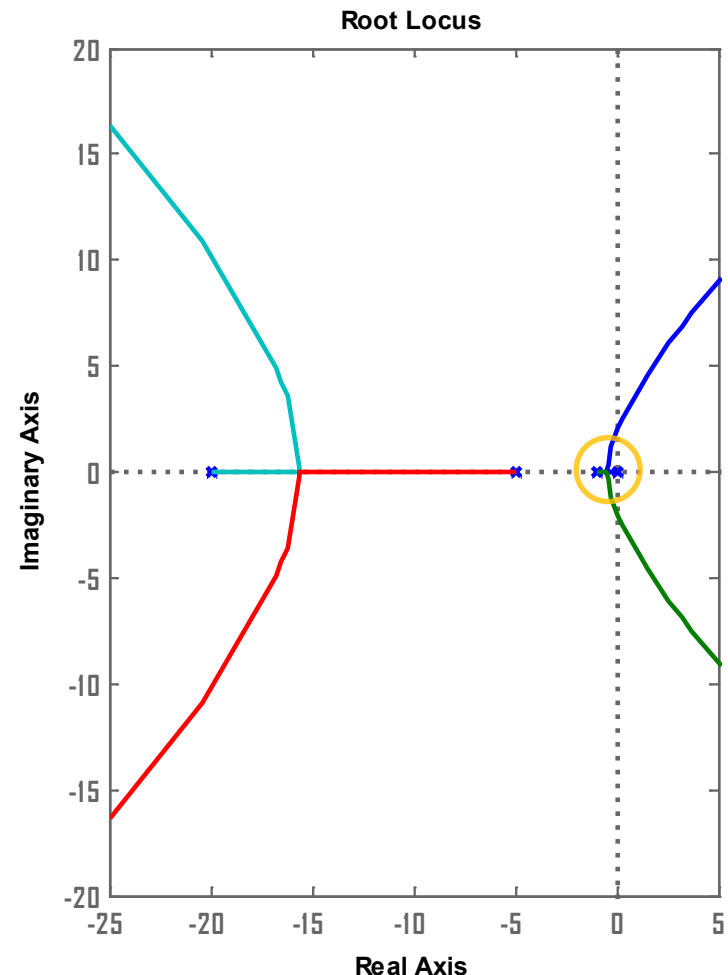
kde ω_I představuje „integrační“ nulu

- Integrační pól přidáme k systému

$$G(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+5)(s+20)}$$

- Vykreslíme RL pro tento systém Matlabem

```
>> gi=zpk([], [0 -1 -5 -20], 100)
>> rlocus(gi)   později použijeme
>> rltool(gi)
```

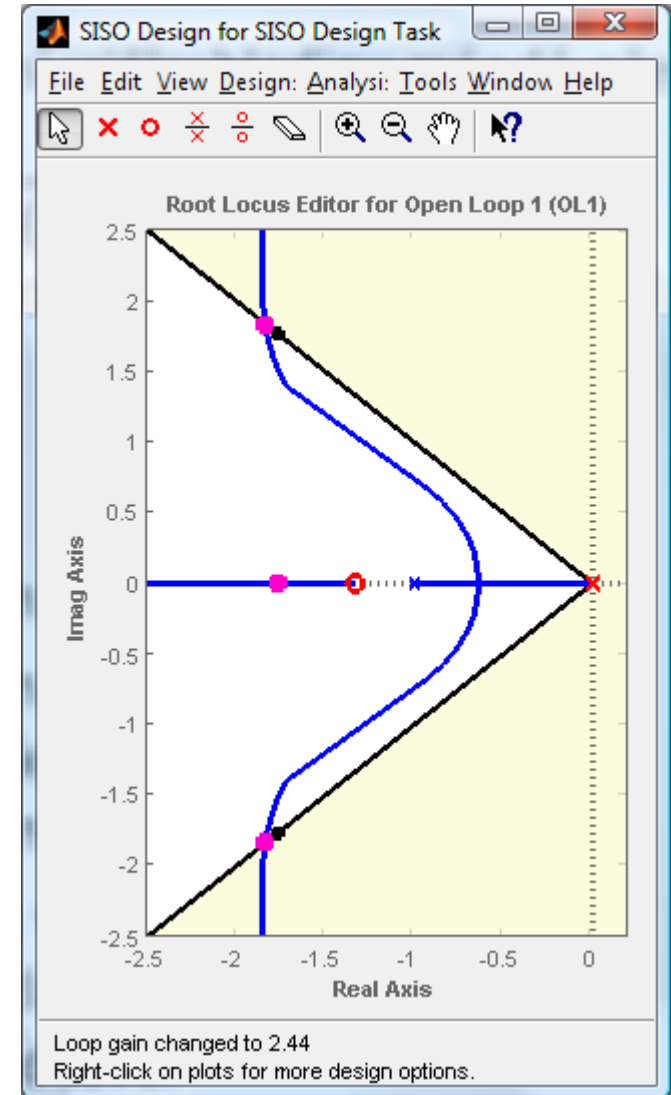




Dynamická kompenzace PI

- Zobrazený RL odpovídá čistému I regulátoru, který je velmi pomalý, jak plyne z pozice dominantních pólů ○
- Pokud zobrazíme RL pomocí nástroje **rltool** můžeme volit **preference návrhu**: Na obrázku je vyznačen požadavek, že poměrné tlumení je větší než 0.707.
- Volitelnou nulu PI regulátoru umístíme za první dva póly zprava, abychom dosáhli co nejrychlejší odezvy – co největší reálné části dominantních pólů.
- Snažíme se je umístit do vertikálního proužku změnou pozice nuly a zesílení (trochu praxe)
- Navržený přenos kompenzátoru

$$D(s) = 1.83 + \frac{2.44}{s} = \frac{1.83}{s}(s + 1.33)$$





Jiné použití RL: návrh ABS pro auto

- brzdná soustava automobilu můžeme mít přenos (z akčního zásahu na prokluz)

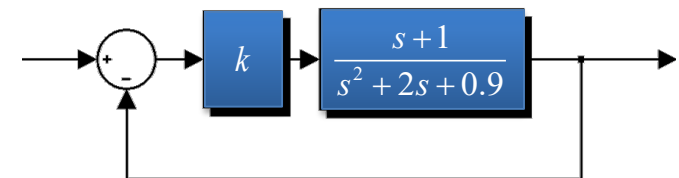
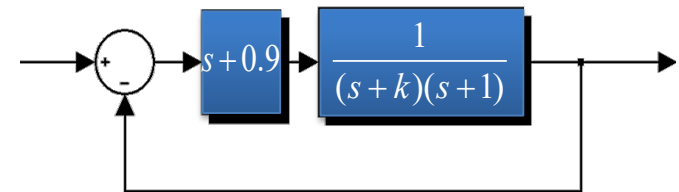
$$G(s) = \frac{1}{(s+k)(s+1)} \quad k \in [k_{\min}, k_{\max}]$$

kde neurčitý parametr k může nabývat v závislosti na stavu vozovky a pneumatik všech možných hodnot z daného intervalu

- při návrhu ABS jsme pro nominální hodnotu $k = 1$ zrychlili odezvu pomocí PD regulátoru s přenosem $D(s) = (s + 0.9)$
- výsledný ZV systém má charakteristický polynom uzavřené smyčky je

$$\begin{aligned} p(s, k) &= (s+k)(s+1) + (s+0.9) \\ &= (s^2 + 2s + 0.9) + k(s+1) \end{aligned}$$

- Jeho stabilitu pro různá k můžeme zkoumat pomocí RL fiktivního systému





- pro stabilní polynom je Hurwitzova matice nesingulární
- je-li kořen na imaginární ose, je Hurwitzova matice singulární

```
>> p=(s+1)*(s+2)*(s+3)*(s+4)
p = 24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4
>> Hp=hurwitz(p)
Hp =
    10    50     0     0
     1    35    24     0
     0    10    50     0
     0     1    35    24
>> rank(Hp)
ans = 4
```

```
>> q=s*(s+2)*(s+3)*(s+4)
q = 24s + 26s^2 + 9s^3 + s^4
>> Hq=hurwitz(q)
Hq =
     9    24     0     0
     1    26     0     0
     0     9    24     0
     0     1    26     0
>> rank(Hq)
ans = 3
```

- jsou-li dva kořeny položeny symetricky podle imaginární osy je Hurwitzova matice také singulární
- to je při detekci meze stability artefakt
- nelíbí se nám to, ale poradíme si

```
>> r=(s+1)*(s-1)*(s+3)*(s+4)
r = -12-7s+11s^2+7s^3+s^4
>> Hr=hurwitz(r)
Hr = 7    -7     0     0
     1    11    -12    0
     0     7    -7     0
     0     1    11    -12
>> rank(Hr) ans = 3
```



Příklad: F4E Phantom - zjednodušený

- Model podélného pohybu letounu F4E Phantom (Ackermann, 93)
- u poloha výškovky, y úhel stoupání
- Stabilizujeme pracovní bod módu podélných kmitů s krátkou periodou pro rychlost Mach 0.5, výšku 5000 ft

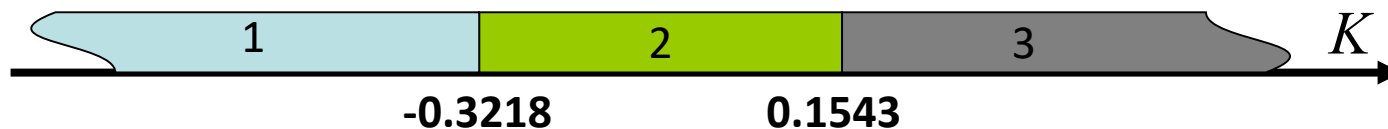
$$\frac{b_1(s)}{a_1(s)} = \frac{-351.1 - 367.6s}{-113.0 + 51.46s + 31.84s^2 + s^3}$$

$$b(s)/a(s) \Rightarrow c(s) = a + Kb$$

- Hurwitzova matice a její nuly
- Rozkládají osu parametru regulátoru na 3 intervaly

```

Ha=hurwitz(a);
Hb=hurwitz(b,deg(a));
M=-Ha\Hb;K=1./eig(M)
K = -Inf
      -0.3218
      0.1543
  
```



- Otestujeme jeden případ v každém intervalu a dostaneme pásma stability

