

Příklady k přednášce  
8 - Geometrické místo kořenů  
aneb Root Locus



Michael Šebek  
Automatické řízení 2016



# Úhel bodu na RL vzhledem k nulám a pólům

- Pro bod na RL platí (pro nějaké  $K > 0$ )  $1 + KL(s) = 0 \rightarrow KL(s) = -1$   
 $\rightarrow \angle KL(s) = (2k + 1) \times 180^\circ \rightarrow \angle L(s) = (2k + 1) \times 180^\circ$   
 = lichý násobek  $180^\circ = \sum \text{úhlů od nul} - \sum \text{úhlů od pólů}$

Příklad:

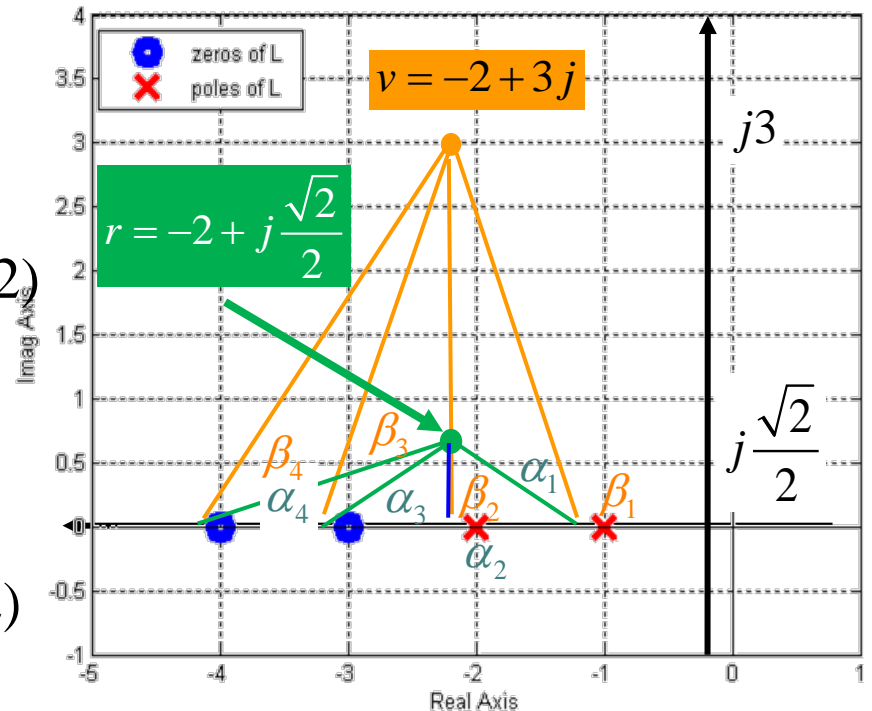
$$L(s) = \frac{(s + 3)(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)}$$

- Bod  $v = -2 + 3j$  neleží na RL

$$\begin{aligned} \angle L(s) &= \beta_3 + \beta_4 - \beta_1 - \beta_2 \\ &= \angle(v + 3) + \angle(v + 4) - \angle(v + 1) - \angle(v + 2) \\ &= 72^\circ + 56^\circ - 108^\circ - 90^\circ \neq 180^\circ \end{aligned}$$

- Bod  $r = -2 + j\frac{\sqrt{2}}{2}$  může ležet na RL

$$\begin{aligned} \angle L(s) &= \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 \\ &= \angle(r + 3) + \angle(r + 4) - \angle(r + 1) - \angle(r + 2) \\ &= 35^\circ + 20^\circ - 145^\circ - 90^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$





# Vzdálenost bodu na RL od nul a pólů

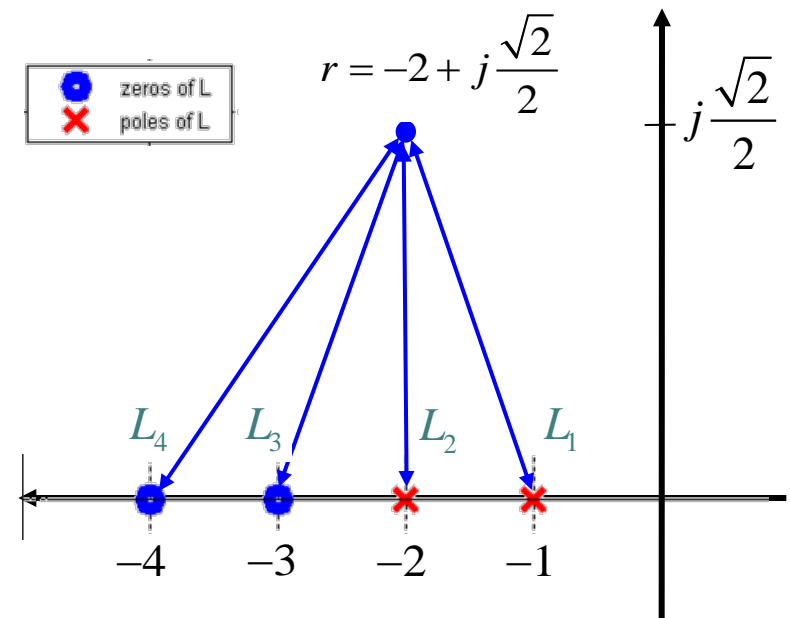
- Pro bod na RL platí (pro nějaké  $K > 0$ )  $1 + KL(s) = 0 \rightarrow |KL(s)| = 1$   
 $K = 1/|L(s)| = (\prod \text{vzdáleností od pólů}) / (\prod \text{vzdáleností od nul})$
- Nelze to použít k testu, ale když už víte, že bod leží na RL, můžete tak zjistit příslušné zesílení

Příklad

$$L(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

$$K = \frac{1}{|L(s)|} = \frac{|r+1||r+2|}{|r+3||r+4|} = \frac{L_1 L_2}{L_3 L_4} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} \sqrt{2}}{\sqrt{6} 3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$





# Pravidla 1 a 2 pro kladný RL - Počet větví a symetrie

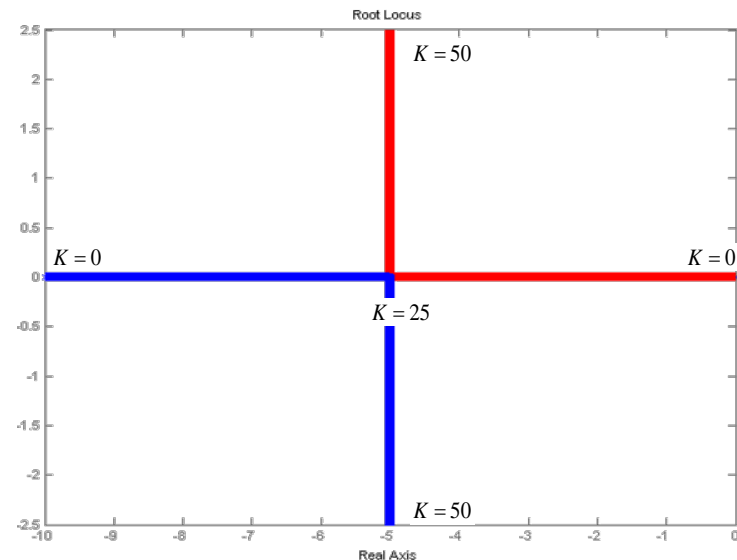
- **Pravidlo 1 (Počet větví)** je celkem zřejmé: každý CL pól se pohybuje se změnou  $K$  po své větví RL.
- **Pravidlo 2 (Symetrie)** je také zřejmé: Polynom s reálnými koeficienty má kořeny buď reálné anebo v komplexně sdružených dvojicích, tedy vždy rozloženy symetricky podle reálné osy. Graf RL je tvořen kořeny CL, který má reálné koeficienty. Proto je RL symetrický. A to pro každé jednotlivé  $K$  !

## Příklad

$$L(s) = \frac{1}{s(s+10)}$$

$$p_{cl}(s) = s^2 + 10s + K$$

$$s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - K}$$

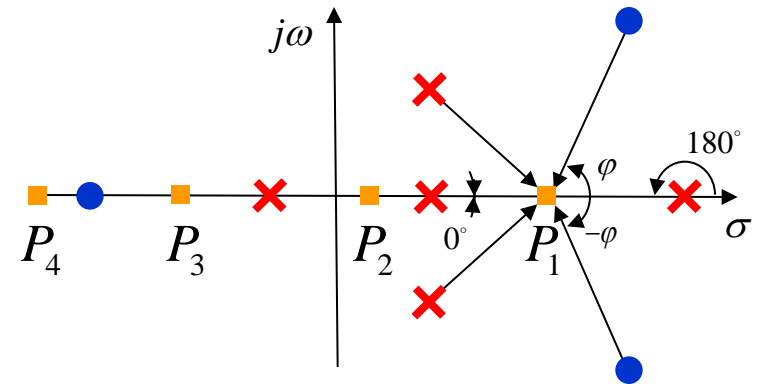




# Pravidlo 3 – Segmenty na reálné ose

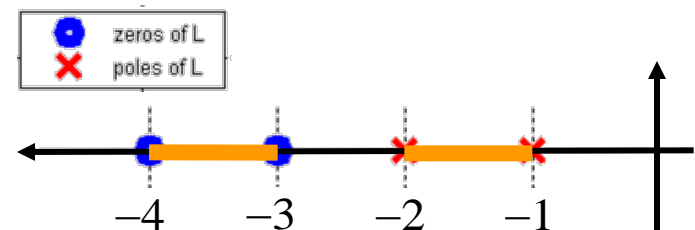
Ani tohle není obtížné: Abychom zjistili, zda body  $P_i$  na reálné ose mohou ležet na RL, sečteme u každého úhly k OL nulám a pólům. Zřejmě platí:

- Příspěvek úhlů od komplexně sdružené dvojice je vždy  $0$
- Příspěvek úhlů od reálných OL nul/pólů ležících nalevo od  $P_i$  je vždy  $0$
- Vliv mají jen OL nuly/póly ležící napravo od  $P_i$  : každý přispívá  $\pm 180^\circ$
- Jejich celkový příspěvek je  $0^\circ$ , pokud jich je sudý počet. Naopak
- jejich celkový příspěvek je lichý násobek  $180^\circ$ , pokud jich je lichý počet



## Příklad

- RL pro  $L(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$  má reálné segmenty





# Pravidlo 4 – Počáteční a koncové body

Přesněji řečeno Pravidlo 4 zní: Je-li

$$L(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots}, \text{ tak}$$

- $n$  větví grafu RL začíná (pro  $K = 0$ ) v  $n$  konečných pólech OL a
- $m$  větví grafu RL končí (pro  $K = \infty$ ) v  $m$  konečných nulách OL.
- pokud má OL nuly v nekonečnu, tak  $n - m > 0$  větví RL končí (pro  $K = \infty$ ) v nekonečnu (v těch nekonečných nulách)
- pokud by OL měla póly v nekonečnu, tak  $m - n > 0$  větví RL začíná (pro  $K = 0$ ) v nekonečnu (v těch nekonečných pólech)

## Důkaz

- Pro  $K = 0$ , pak je CL charakteristický polynom  $p_{cl}(s) = a(s) + Kb(s) = a(s)$  rovný OL charakteristickému polynomu, tedy  $n$  větví opravdu začíná v konečných OL pólech
- Při zkoumání nekonečných pólů vyjdeme z CL přenosu děleného  $K$ , což nezmění polohu nul a pólů. Protože je  $\lim_{K \rightarrow 0} T/K = \lim_{K \rightarrow 0} L/(1 + KL) = L(s)$ , i nekonečné CL póly = nekonečné OL póly



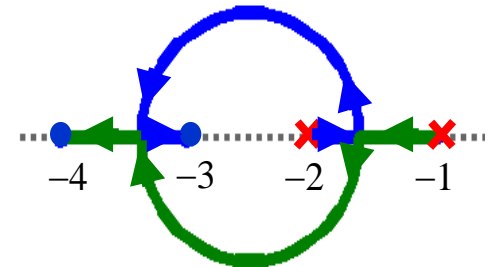
## Pravidlo 4 – Počáteční a koncové body

Pokračujeme v důkazu pro  $K = \infty$ :

- Pro body na RL (!) platí  $L(s) = -1/K$  a z toho  $\lim_{K \rightarrow \infty} L(s) = \lim_{K \rightarrow \infty} 1/K = 0$  a tedy je bod s bodem RL pro  $K = \infty$ , právě když je nulou (konečnou či nekonečnou) OL přenosu. QED

Vraťme se k minulému příkladu s přenosem 
$$L(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

- Podle pravidla 3 už víme, že RL má reálné segmenty
- Teď nově víme, že 2 větve vycházejí z OL pólů -1 a -2,
- blíží se k sobě po reálné ose, někde mezi -1 a -2 se setkají, osu symetricky opustí a nějak se na ní někde mezi -3 a -4 vrátí
- pak po reálné ose pokračují od sebe a skončí v -3 a -4
- Ještě ale nevíme, kde přesně reálnou osu opustí a kde se na ni vrátí





# Pravidlo 5 – Chování v nekonečnu:

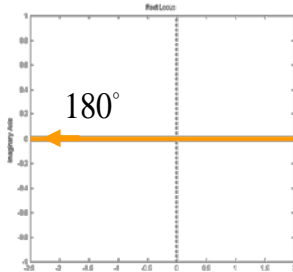
Nejprve probereme RL tzv. **asymptotického systému**

- začíná v bodě  $\sigma$  a má  $n-m$  přímkových větví jdoucích do nekonečna

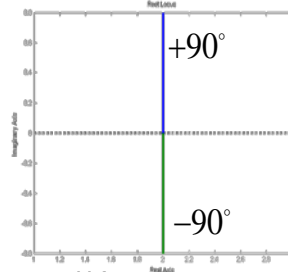
$$L(s) = \frac{1}{(s - \sigma)^{n-m}}$$

$$p_{cl}(s) = (s - \sigma)^{n-m} + K$$

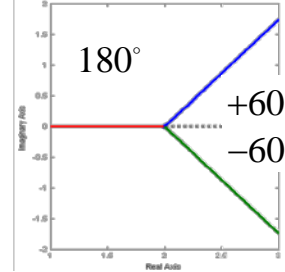
$\sigma = 2, n - m = 1$



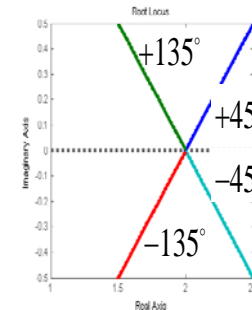
$\sigma = 2, n - m = 2$



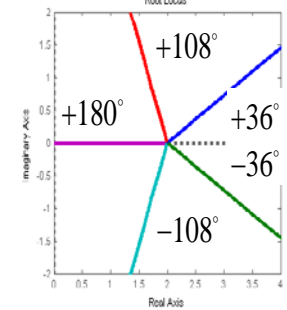
$\sigma = 2, n - m = 3$



$\sigma = 2, n - m = 4$

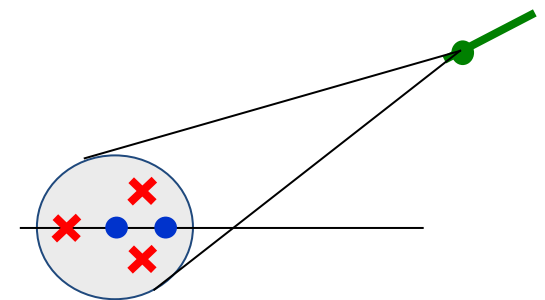


$\sigma = 2, n - m = 5$



**Důkaz pravidla 5 naznačíme:**

- z bodu RL velmi daleko od OL nul a pólů (pro velké  $s$ ) vypadají všechny konečné OL nuly a póly, jako by byly stejné a reálné
- vliv každé nuly se vyruší vlivem nějakého pólu, takže v tom bodě nakonec „leží“  $n - m$  pólů
- tedy se pro velké  $s$  Evansova rovnice zjednoduší na Evansovu rovnici asymptotického systému
- tedy pro velké  $K$  se  $n-m$  kořenů blíží větvím RL asymptotického systému







# Pravidlo 5 – Chování v nekonečnu:

Nyní vypočteme  $\sigma$  :

- pro  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$  platí známý vztah  $a_{n-1} = -\sum p_i$
- podobně pro  $s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0 = (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)$  platí  $b_{m-1} = -\sum z_i$   
a pro  $c(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 + K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0) = (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)$
- je-li  $m < n - 1$  , tak  $-\sum r_i = -\sum p_i$   $c_{n-1} = a_{n-1} + Kb_{n-1} = -\sum r_i$   
a střed (součet) CL pólů se nemění s  $K$  a je vždy reálný

**Příklad:** 4 konečné póly, 1 kon. a 3 nekon. nuly  $\rightarrow$  3 větve RL vedou do nekonečna.

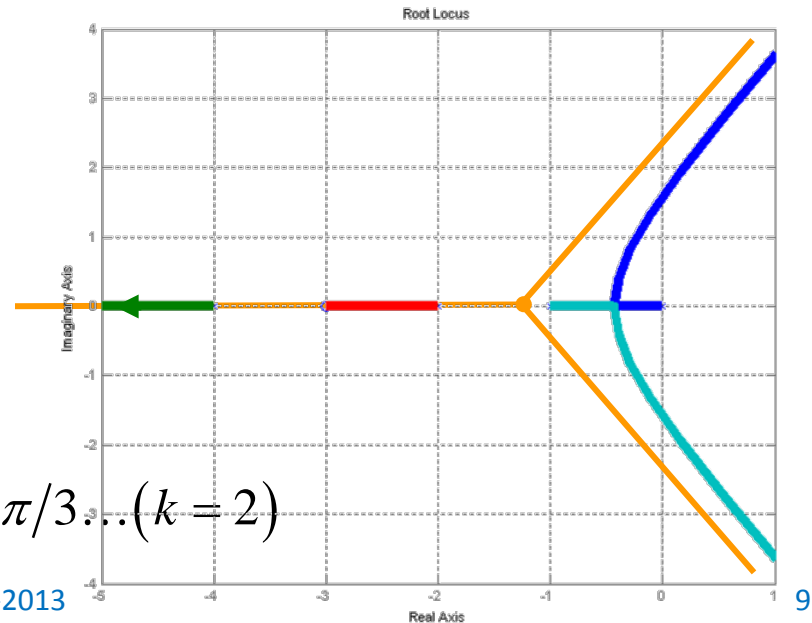
$$L(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

- průsečík asymptot

$$\sigma_a = \frac{(0 - 1 - 2 - 4) - (-3)}{4 - 1} = -\frac{4}{3}$$

- úhly s reálnou osou

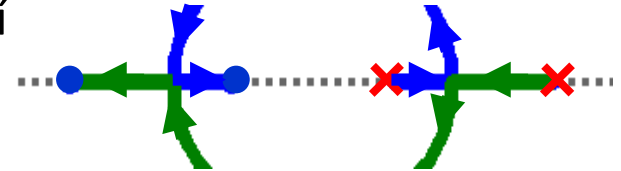
$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pi/3 (k=0), \pi (k=1), = 5\pi/3 \dots (k=2)$$





# Pravidlo 6 – Body rozpojení a spojení na reálné ose

- Protože  $K = -1/L(s)$ , jsou body rozpojení a spojení



- lokální maxima a lokální minima funkce

$$K = -1/L(\sigma)$$

na reálné ose

- Najdeme je pomocí nulových bodů derivace

$$\frac{dK}{d\sigma} = -\left(\frac{1}{L(\sigma)}\right)'$$

- Alternativně je můžeme vypočítat řešením rovnice

$$\sum_1^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_1^n \frac{1}{\sigma - p_i}$$

- protože ale tyto rovnice obvykle bez počítače nevyřešíme, můžeme si raději rovnou Matlabem nechat vykreslit celý RL



# Analýza stability zpětnovazebního systému

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Určení rozsahu zesílení  $K > 0$ , aby zpětnovazební systém se zápornou zpětnou vazbou byl stabilní

$$L(s) = KG(s) = K \frac{40}{(s-1)(s+4)(s+10)}$$

Přenos otevřené smyčky roznásobíme

$$L(s) = KG(s) = K \frac{40}{s^3 + 13s^2 + 26s - 40}$$

Póly přenosu zpětnovazebního systému pro  $K$

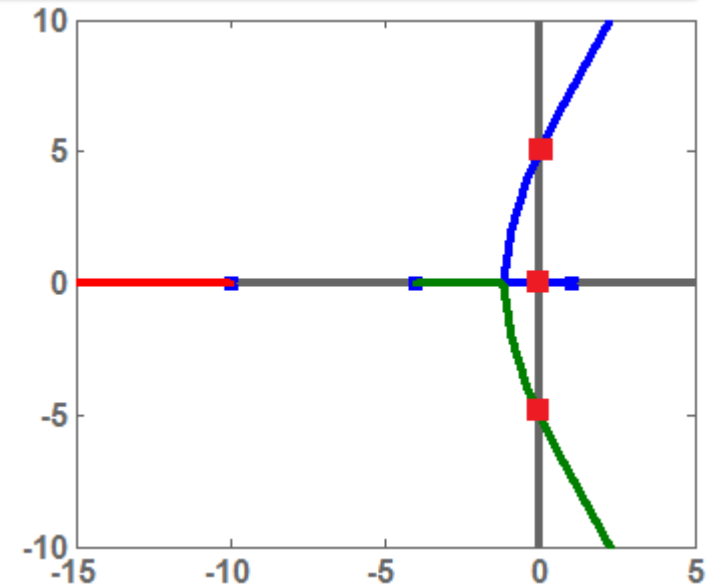
$$c(s) = s^3 + 13s^2 + 26s - 40 + 40K = 0$$

Póly na mezi stability mají **nulovou reálnou část**. Velikost imaginární části dostaneme dosazením  $s = j\omega$  do předchozího vztahu. Řešení má dvě části:

$$\text{Im: } -\omega^3 + 26\omega = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0 ; \omega_2 = \mp\sqrt{26} \quad \dots \text{ dosadíme do reálné části}$$

$$\text{Re: } -13\omega^2 - 40 + 40K = 0 \Rightarrow K_1 = 1; K_2 = (13 \times 26 + 40)/40 = 9,45$$

Zpětnovazební systém je stabilní pro  $K \in (1 ; 9,45)$ .





# Příklady úplného RL

$$L(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{s(s-1)(s+2)^2((s+1)^2+1)}$$

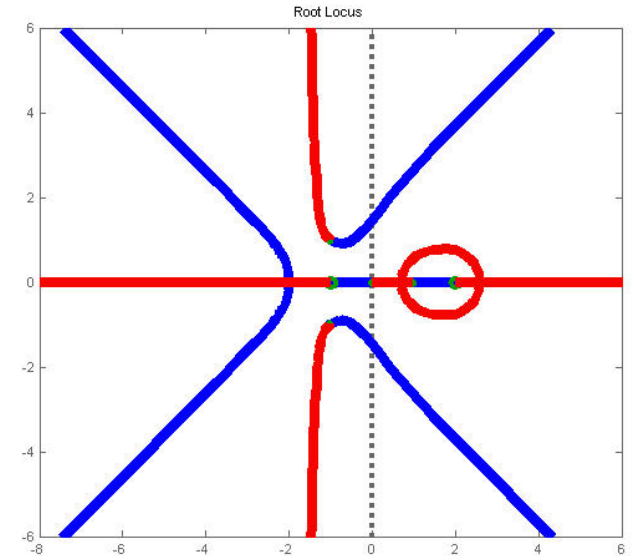
$$n - m = 6 - 2 = 4 > 0$$

$$\theta_{a\text{-pos}} = (2k+1)\pi/4, \quad k = 0, \pm 1, 2$$

$$= \pi/4, 3\pi/4, -\pi/4, -3\pi/4$$

$$\theta_{a\text{-neg}} = 2k\pi/4, \quad k = 0, \pm 1, 2$$

$$= 0, \pi/2, -\pi/2, \pi$$



$$L(s) = \frac{(s+1)(s-1)(s-2)}{(s+2)^2((s+1)^2+1)}$$

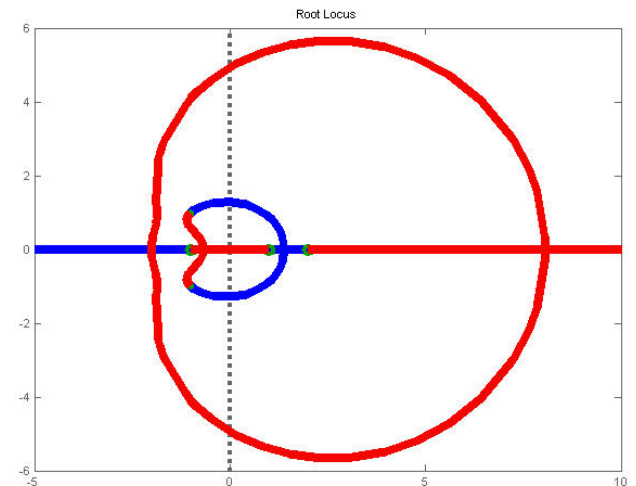
$$n - m = 4 - 3 = 1 > 0$$

$$\theta_{a\text{-pos}} = (2k+1)\pi, \quad k = 0$$

$$= \pi$$

$$\theta_{a\text{-neg}} = 2k\pi, \quad k = 0$$

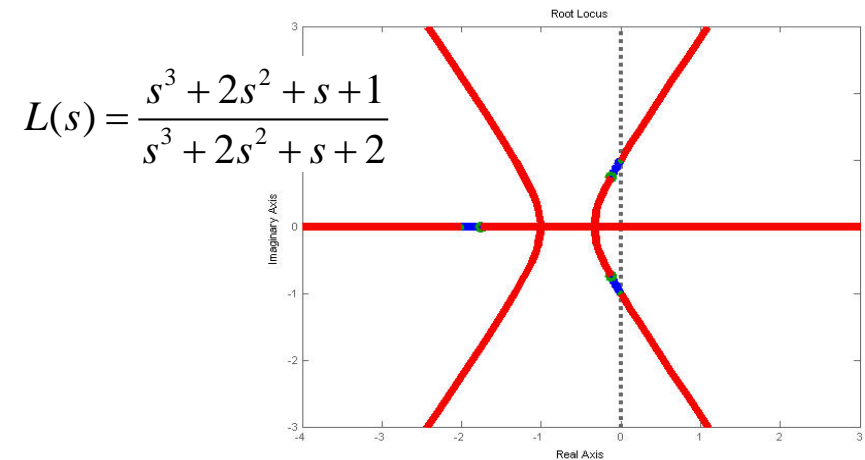
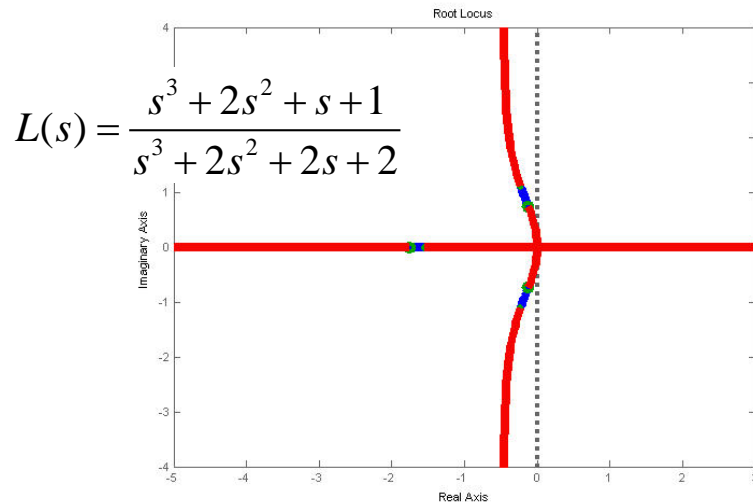
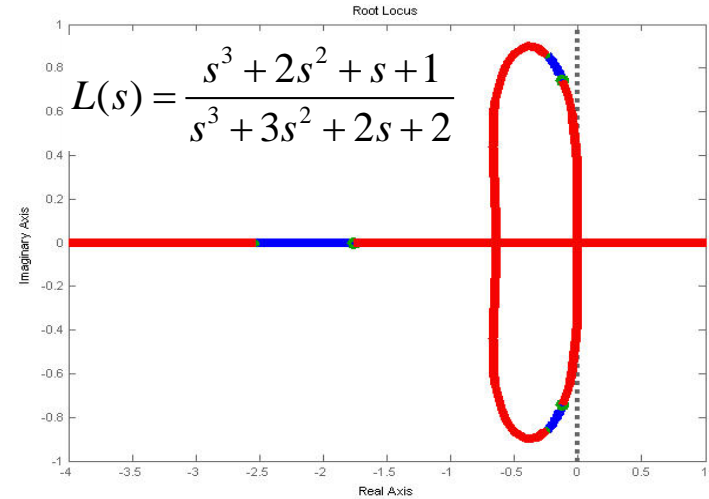
$$= 0$$





# Příklady úplného RL

- Pro přenos ryzí ale ne striktně je situace s asymptotami složitější
- Vždy jsou dvě reálné asymptoty, ale mohou být i další,
- na rozdíl od kladného RL





# Dynamická kompenzace PI

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Systém pro řízení výšky hladiny má v pracovním bodě přenos

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+5)(s+20)}$$

- Požadujeme nulovou regulační odchylku na skok reference v ustáleném stavu
- To splní např. regulátor s dynamikou PI

$$D(s) = k_P + \frac{k_I}{s} = \frac{k_P}{s}(s + \omega_I)$$

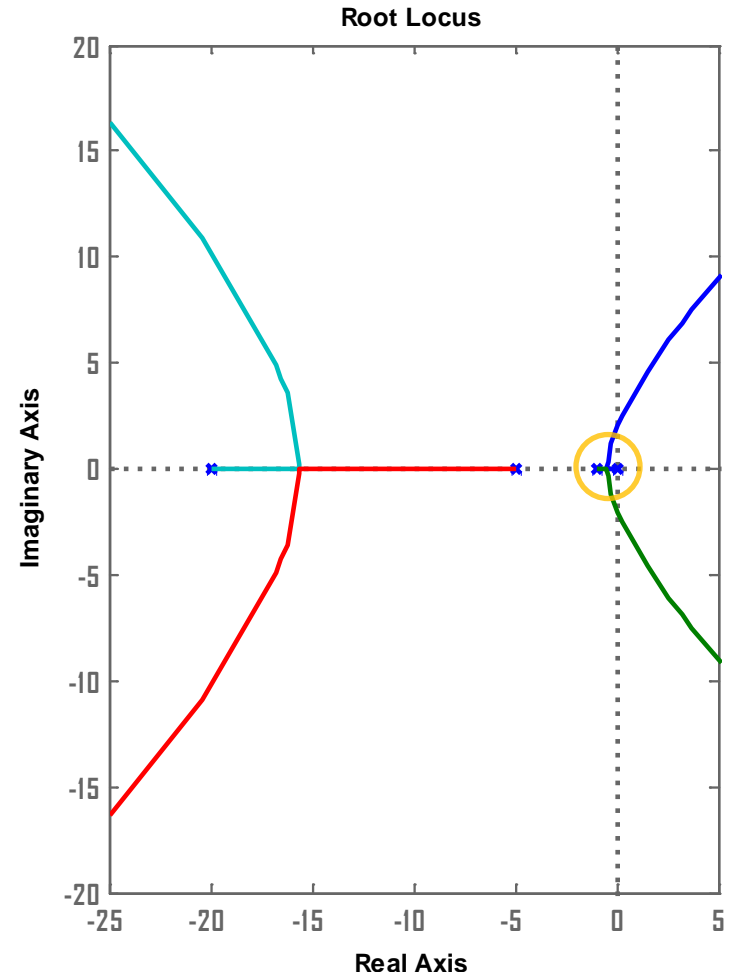
kde  $\omega_I$  představuje „integrační“ nulu

- Integrační pól přidáme k systému

$$G(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+5)(s+20)}$$

- Vykreslíme RL pro tento systém Matlabem

```
>> gi=zpk([], [0 -1 -5 -20], 100)
>> rlocus(gi)   později použijeme
>> rltool(gi)
```



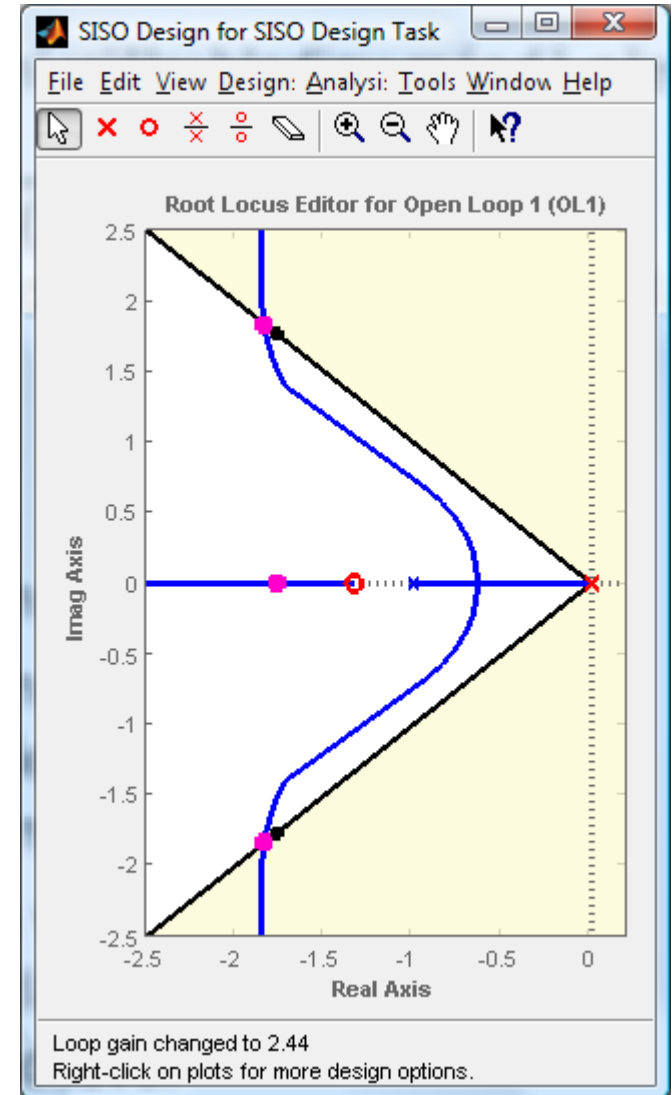


# Dynamická kompenzace PI

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Zobrazený RL odpovídá čistému I regulátoru, který je velmi pomalý, jak plyne z pozice dominantních pólů ○
- Pokud zobrazíme RL pomocí nástroje **rltool** můžeme volit **preference návrhu**: Na obrázku je vyznačen požadavek, že poměrné tlumení je větší než 0.707.
- Volitelnou nulu PI regulátoru umístíme za první dva póly zprava, abychom dosáhli co nejrychlejší odezvy – co největší reálné části dominantních pólů.
- Snažíme se je umístit do vertikálního proužku změnou pozice nuly a zesílení (trochu praxe)
- Navržený přenos kompenzátoru

$$D(s) = 1.83 + \frac{2.44}{s} = \frac{1.83}{s}(s + 1.33)$$





# Jiné použití RL: návrh ABS pro auto

- brzdná soustava automobilu můžeme mít přenos (z akčního zásahu na prokluz)

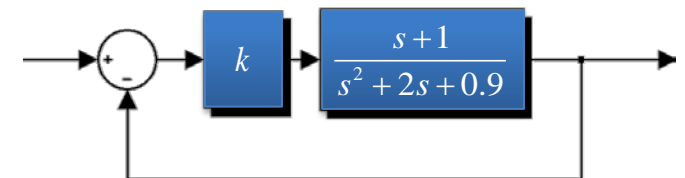
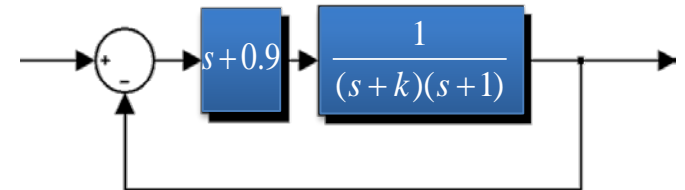
$$G(s) = \frac{1}{(s+k)(s+1)} \quad k \in [k_{\min}, k_{\max}]$$

kde neurčitý parametr  $k$  může nabývat v závislosti na stavu vozovky a pneumatik všech možných hodnot z daného intervalu

- při návrhu ABS jsme pro nominální hodnotu  $k = 1$  zrychlili odezvu pomocí PD regulátoru s přenosem  $D(s) = (s + 0.9)$
- výsledný ZV systém má charakteristický polynom uzavřené smyčky je

$$\begin{aligned} p(s, k) &= (s+k)(s+1) + (s+0.9) \\ &= (s^2 + 2s + 0.9) + k(s+1) \end{aligned}$$

- Jeho stabilitu pro různá  $k$  můžeme zkoumat pomocí RL fiktivního systému







- pro stabilní polynom je Hurwitzova matice nesingulární
- je-li kořen na imaginární ose, je Hurwitzova matice singulární

```
>> p=(s+1)*(s+2)*(s+3)*(s+4)
p = 24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4
>> Hp=hurwitz(p)
Hp =
    10    50     0     0
     1    35    24     0
     0    10    50     0
     0     1    35    24
>> rank(Hp)
ans = 4
```

```
>> q=s*(s+2)*(s+3)*(s+4)
q = 24s + 26s^2 + 9s^3 + s^4
>> Hq=hurwitz(q)
Hq =
     9    24     0     0
     1    26     0     0
     0     9    24     0
     0     1    26     0
>> rank(Hq)
ans = 3
```

- jsou-li dva kořeny položeny symetricky podle imaginární osy je Hurwitzova matice také singulární
- to je při detekci meze stability artefakt
- nelíbí se nám to, ale poradíme si

```
>> r=(s+1)*(s-1)*(s+3)*(s+4)
r = -12-7s+11s^2+7s^3+s^4
>> Hr=hurwitz(r)
Hr = 7     -7     0     0
     1    11    -12    0
     0     7     -7    0
     0     1    11    -12
>> rank(Hr) ans = 3
```



# Příklad: F4E Phantom - zjednodušený

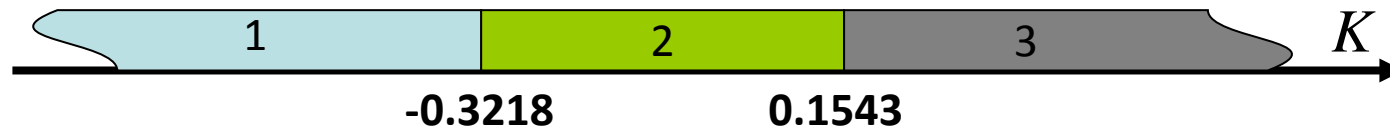
- Model podélného pohybu letounu F4E Phantom (Ackermann, 93)
- $u$  poloha výškovky,  $y$  úhel stoupání
- Stabilizujeme pracovní bod módu podélných kmitů s krátkou periodou pro rychlost Mach 0.5, výšku 5000 ft

$$\frac{b_1(s)}{a_1(s)} = \frac{-351.1 - 367.6s}{-113.0 + 51.46s + 31.84s^2 + s^3}$$

$$b(s)/a(s) \Rightarrow c(s) = a + Kb$$

- Hurwitzova matice a její nuly
- Rozkládají osu parametru regulátoru na 3 intervaly

```
Ha=hurwitz(a);
Hb=hurwitz(b,deg(a));
M=-Ha\Hb;K=1./eig(M)
K = -Inf
      -0.3218
      0.1543
```



- Otestujeme jeden případ v každém intervalu a dostaneme pásma stability

