

Příklady k přednášce

13 - Návrh frekvenčními metodami



Michael Šebek
Automatické řízení 2017



Nastavení šířky pásma uzavřené smyčky

- Na přechodové frekvenci v otevřené smyčce je (z definice) $|L(j\omega_c)| = 1$

- Hodnota

$$|T(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|}$$

ale ještě závisí na fázi $\angle L(j\omega_c)$, tedy na PM

- Pro PM = 90° je $L(j\omega_c) = -j$ a má fázi - 90°, takže

$$|T(j\omega_c)| = \frac{|-j|}{|1 - j|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$$

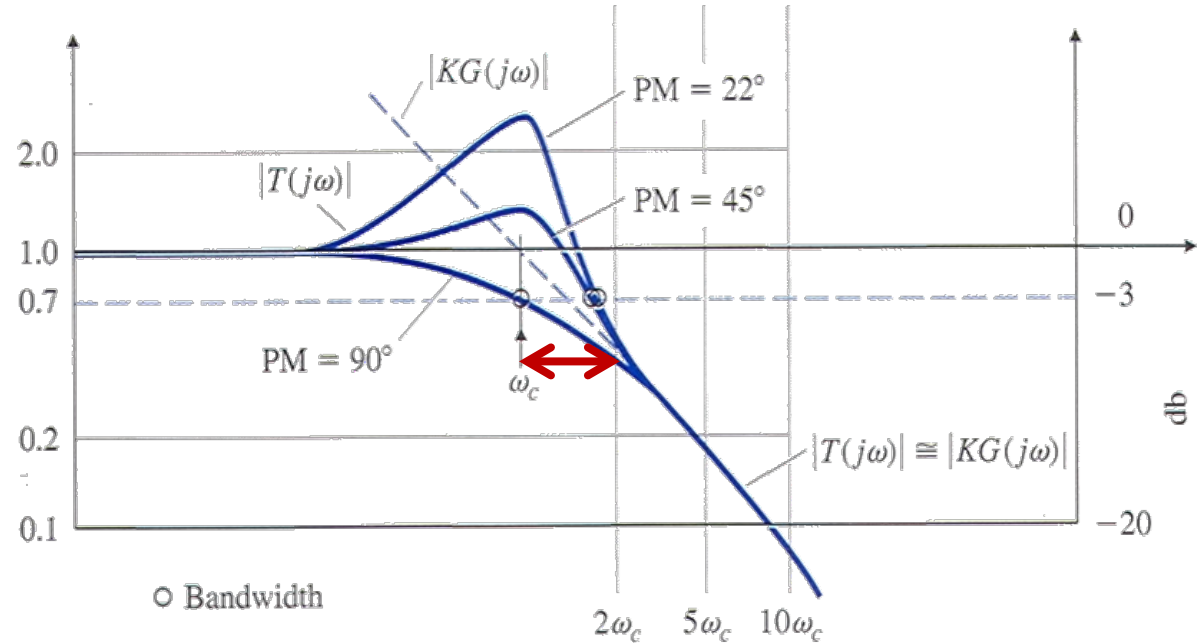
- V tomto případě je tedy šířka pásma uzavřené smyčky právě rovna přechodové frekvenci otevřené smyčky!

$$\omega_{BW} = \omega_c$$

- Pro menší PM hodnota $|T(j\omega_c)|$ roste, vzniká rezonanční špička. Tím se šířka pásma ω_{BW} posouvá doprava, ale obvykle nepřekročí $2\omega_c$
- Je tedy obvykle $\omega_c \leq \omega_{BW} \leq 2\omega_c$
- Proto nastavujeme ω_c (OL !!!) s cílem zajistit požadované ω_{BW} (CL!!!)



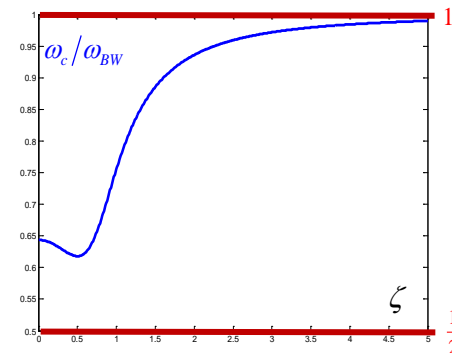
- Bodeho graf $|T(j\omega)|$ s vyznačenou ω_c a hodnotami ω_{BW} pro různé PM



- Obvykle je $\omega_c \leq \omega_{BW} \leq 2\omega_c$

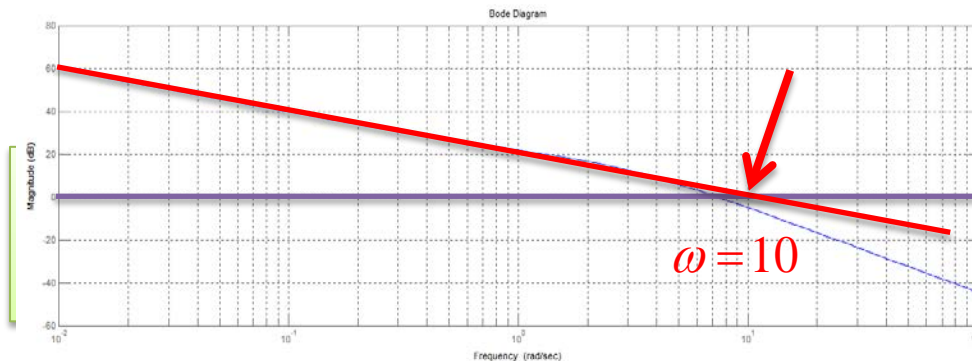
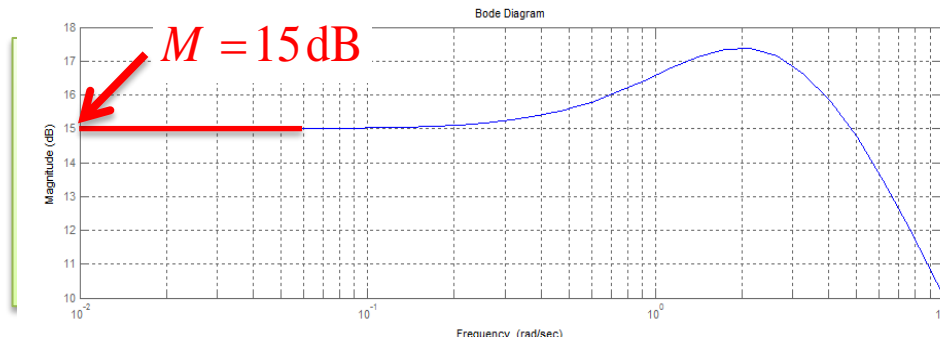
- Pro druhý řád bez nul je v závislosti na ζ vyneseno v grafu poměr

$$\frac{\omega_c}{\omega_{BW}} = \sqrt{\frac{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$





Opakování: ustálené chování z Bodeho grafu



- počáteční sklon je 0 a tak systém je typu 0 (bez astat.)
- „počáteční hodnota“ asymptoty je 15 dB a tak je

$$K_p = 15 \text{ dB} = 10^{15/20} = 5.623$$

- ustálená odchyl. na skok je
- $$e_{\text{step,ss}} = 1 / (1 + K_p) = 0.151$$

- počáteční sklon je 20 dB/dek a tak systém je typu 1 (s astatismem 1. řádu)
- protažená „počáteční asymptota“ protíná nulovou přímkou pro frekvenci $\omega = 10$ a tak je

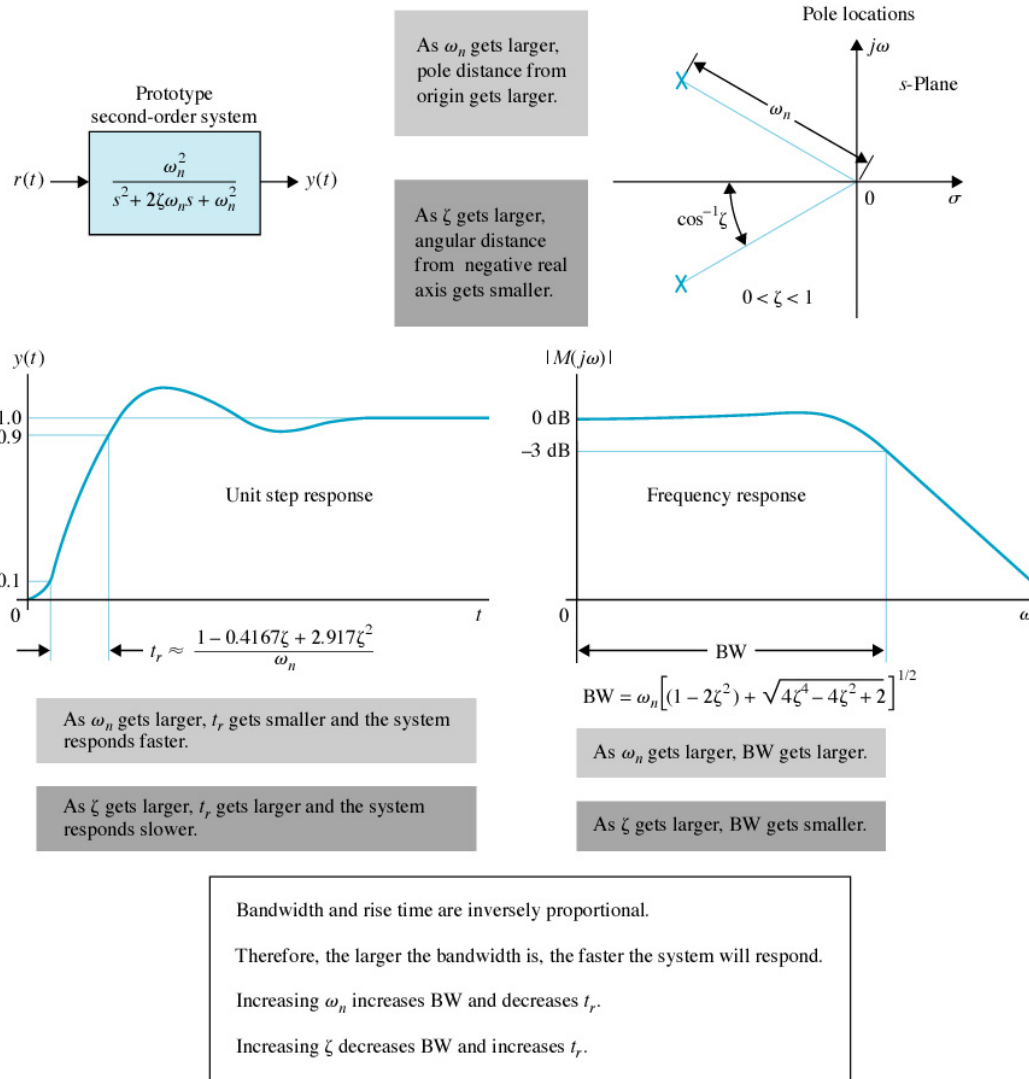
$$K_v = 10$$

- ustálená odchylka na rampu je

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = 1 / K_v = 0.1$$



Srovnání časového a frekvenčního chování





Příklad: Nastavení K_p regulátorem P

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Soustava

$$G(s) = \frac{5}{s+2}$$

$$K_p = 2.5, K_{p,\text{dB}} = 20 \log 2.5 = 8\text{dB}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = 0.29$$

- Chceme

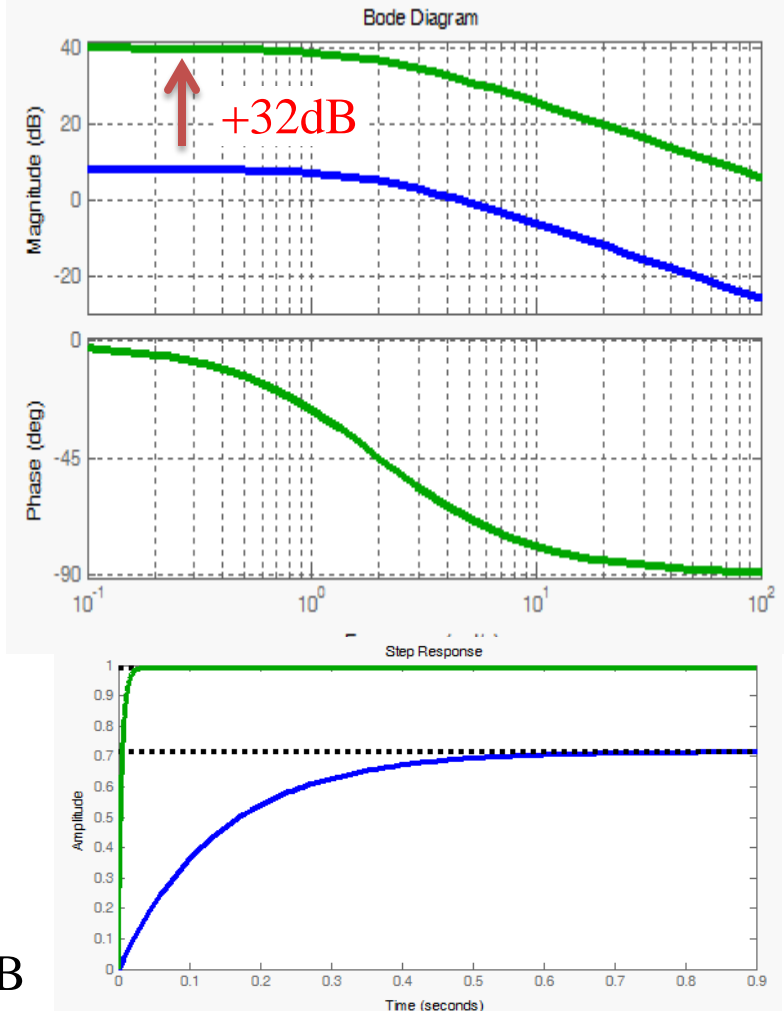
$$e_{ss,2} = 0.01 \rightarrow K_{p,2} = \frac{1-e_{ss,2}}{e_{ss,2}} = 99$$

$$K_{p,2,\text{dB}} = 20 \log 99 = 40\text{dB}$$

- Použijeme $K = \frac{K_{p,2}}{K_p} = \frac{99}{2.5} = 39.6$

$$K_{\text{dB}} = K_{p,2,\text{dB}} - K_{p,\text{dB}} = 40 - 8 = 32\text{dB}$$

(pozor - výsledek je moc rychlý, s velkou špičkou akčního zásahu)



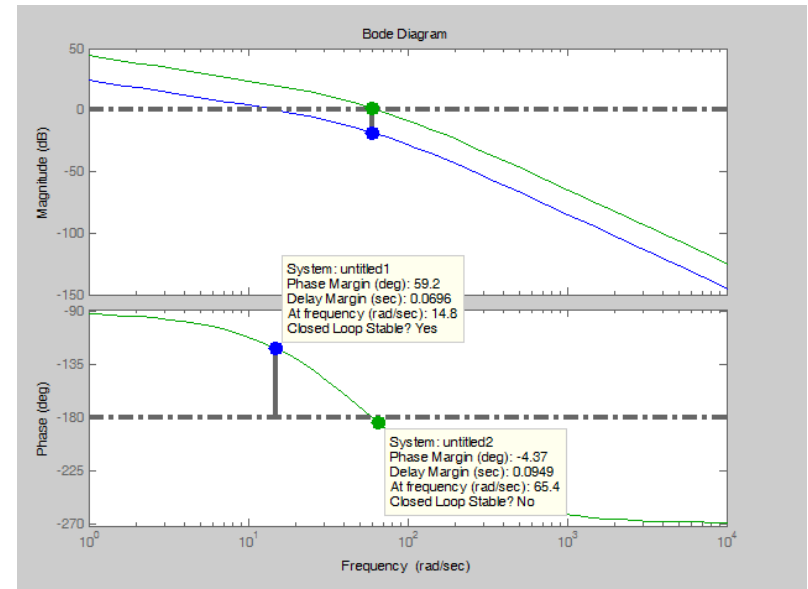
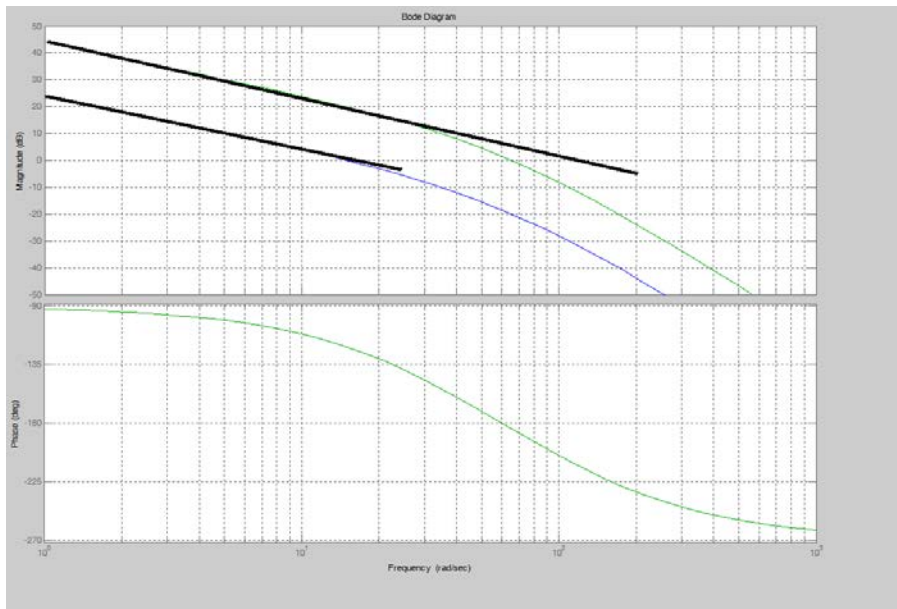


Příklad: Nastavení K_v regulátorem P

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Soustava $G(s) = \frac{58390}{s(s+36)(s+100)}$ má $K_v = 16.22 \rightarrow e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0.0617$
- Chceme-li odchylku na rampu zmenšit 10x, musíme nastavit $K_v = 162.2$
- A tedy zvětši zesílení 10x, čímž dostaneme
- Takže

$$L(s) = \frac{583900}{s(s+36)(s+100)}$$

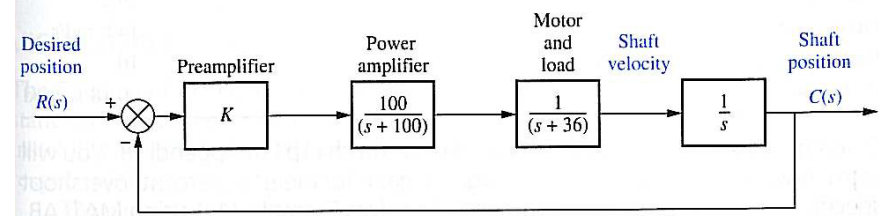


- ale pozor, **výsledek je nestabilní!** Tady P regulátor úlohu nevyřeší!



Příklad: Nastavení zesílení na požadovaný PM

- Pro systém řízení polohy z obrázku nastavte zesílení předzesilovače tak, aby měl výsledný systém při skoku reference překmit 9.5%
- Z požadavku na překmit vypočteme požadované tlumení (dominantních pólů)



$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} = \frac{-\ln(0,095)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0,095)}} = 0.5996 \cong 0,6$$

a z toho požadované PM

$$PM = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} = \arctan \frac{2 \times 0.6}{\sqrt{-2 \times (0.6)^2 + \sqrt{1+4 \times (0.6)^4}}} = 1.0326 \cong 59.2^\circ$$

- Přenos otevřené smyčky je s neurčitým K
- Abychom mohli nakreslit Bodeho graf a navrhovat graficky, musíme zvolit nějakou hodnotu K . Tak třeba pro $K = 3.6$ dostaneme

$$L(s) = \frac{100K}{s(s+36)(s+100)}$$

$$L_{K=3.6}(s) = \frac{360}{s(s+36)(s+100)}$$



- Tedy nakreslíme Bodeho graf
- a na něm najdeme frekvenci, pro kterou je fáze
- Z grafu tedy odečteme $\omega' = 14.8 \text{ rad/s}$
- Pro tuto frekvenci je amplituda a proto musíme zvětšit zesílení o 44,2 dB, tedy cca 162.2 krát
- Tím dostaneme hledané

$$L(s) = \frac{58390}{s(s+36)(s+100)}$$

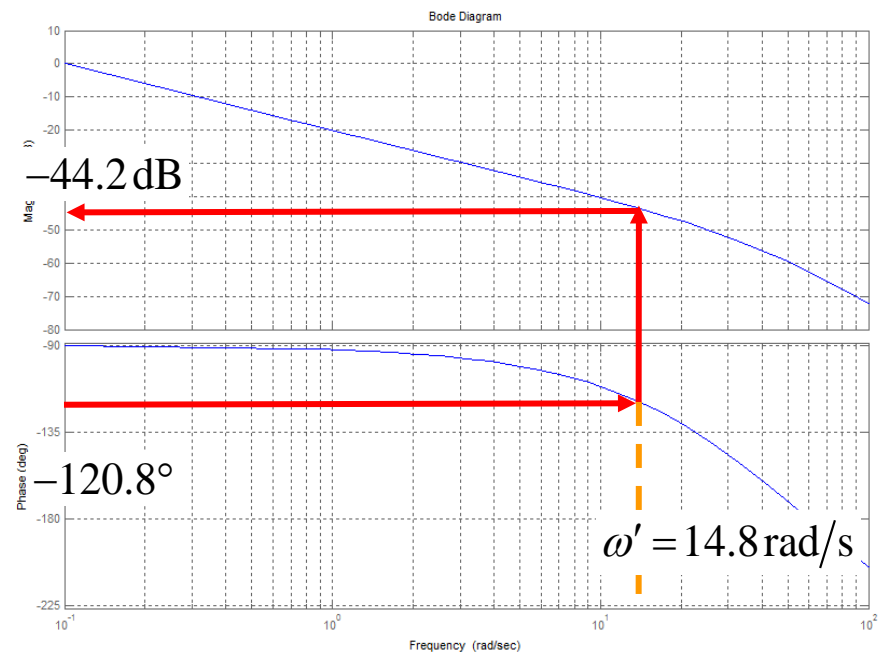
- Nezbytná simulace ověří správnost návrhu
- Pro pozdější pokračování příkladu ještě odměříme

$$K_v = 16.22 \rightarrow e_{\text{ramp}}(\infty) = 0.0617$$

$$L_{K=3.6}(s) = 360 / (s(s+36)(s+100))$$

$$\angle L(j\omega') = -180^\circ + 59.2^\circ = -120.8^\circ$$

$$|L(\omega')| = M(\omega') = 0.0062 = -44.2 \text{ dB}$$





Příklad: Nastavení PD

- Přenos soustavy (aircraft attitude)
- Specifikace

$$G(s) = \frac{4500}{s(s + 361.2)}$$

$$e_{ramp,ss} \leq 0.000443 \rightarrow K_v \geq 1/e_{ramp,ss} = 2257$$

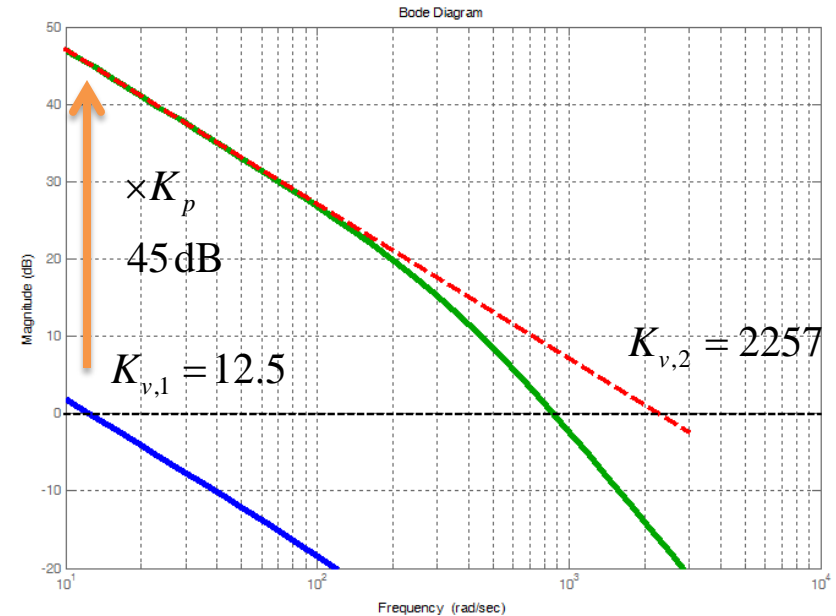
$$PM \geq 80$$

- Nejprve nastavíme $K_p = 181.19$, abychom zvýšili $K_{v,1} = 12.5$ na $K_v = 2258$ a tím zajistili požadovanou ustálenou odchylku
- Dále budeme hledat složku

$$(1 + K_D s)$$

PD regulátoru pro přenos

$$K_p G(s) = \frac{815350}{s(s + 361.2)}$$





Pokračování: Nastavení PD

- Vykreslíme Bodeho graf přenosu

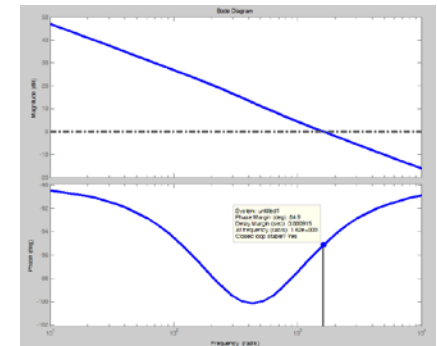
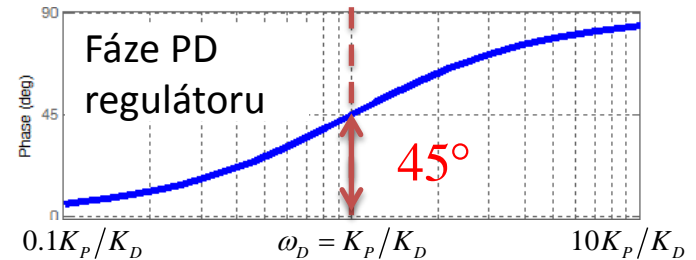
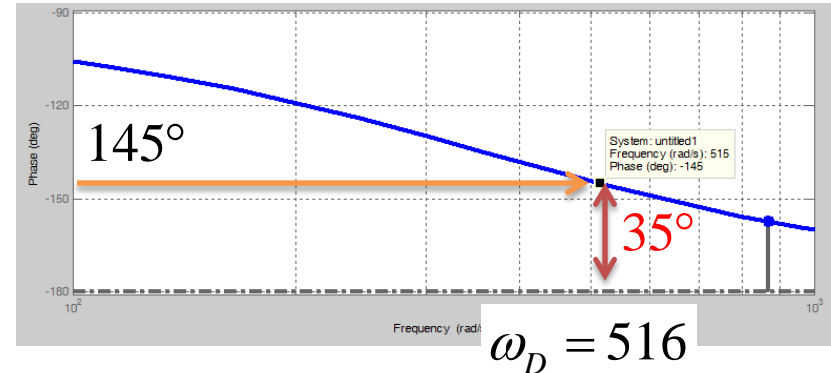
$$\begin{aligned} L(s) &= K_P (1 + K_D s) G(s) \\ &= \frac{815350}{s(s + 361.2)} (1 + K_D s) \end{aligned}$$

pro $K_d = 0$

- Najdeme ω_D , na které je $PM = \text{požadavek} - (\text{fáze regulátoru na } \omega_D)$
 $= 80^\circ - 45^\circ = 35^\circ$ kde je
tedy fáze $= -180^\circ + 35^\circ = -145^\circ$
- To je $\omega_D = 516$
- Vypočteme

$$K_D = \frac{1}{\omega_D} = \frac{1}{516} = 0.0019$$

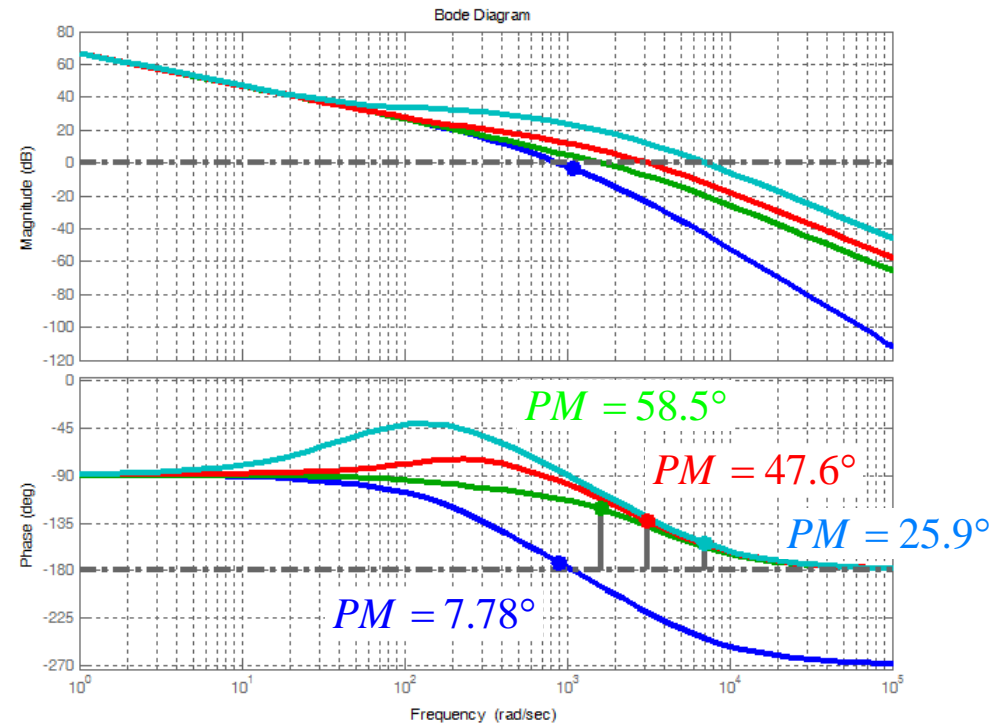
- Výsledné L má Bodeho graf
- Specifikace je splněna: $PM = 84.9^\circ$





Ještě jeden příklad: Nastavení PD

- Pro přenos soustavy $G(s) = \frac{1.5 \times 10^7}{s(s^2 + 3408.3s + 1204000)}$
- Řekněme, že jsme již navrhli $K_P = 1$ a teď nastavme K_D v PD regulátoru $(1 + K_D s)$ pro dobré PM
- Nakreslíme Bodeho graf pro hodnoty $K_D = 0, 0.002, 0.005, 0.02$
- Nekompensovaný systém ($K_d = 0$) má $PM = 7.78^\circ$
- Pokud bychom chtěli dosáhnout $PM = 80^\circ$, musel by regulátor přidat $72,22^\circ$ a to na nové ω_c
- Z grafu vidíme, že se to nepodaří, protože vyšší zesílení regulátoru posouvá ω_c k vyšším frekvencím,
- Kde fáze nekompensovaného systému klesá rychleji než ji kompenzátor přidá.





Příklad: Nastavení PI

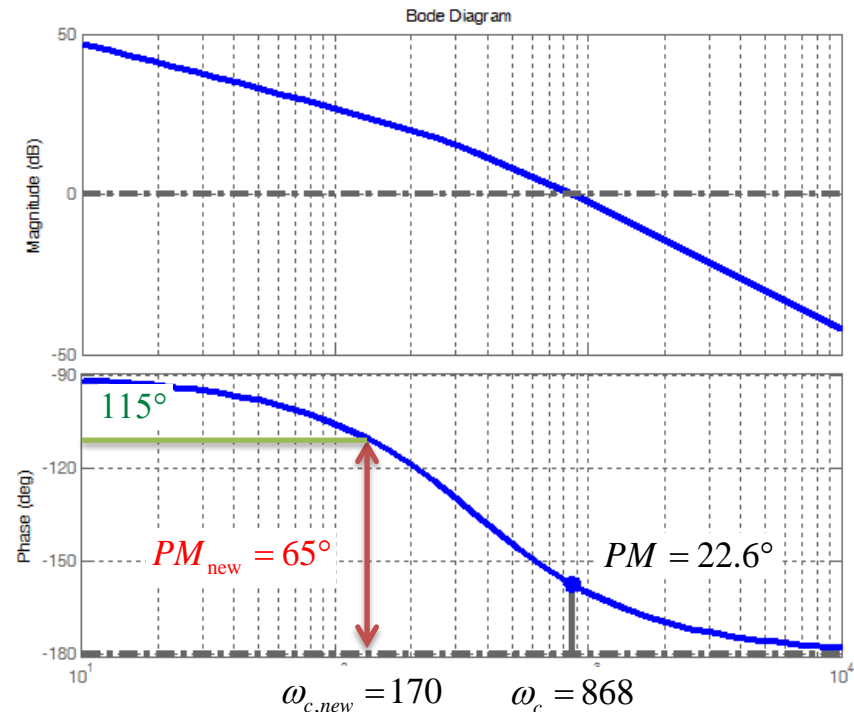
- Pro přenos soustavy $G(s) = \frac{815350}{s(s+361.2)}$
- Najděte PI regulátor, který zlepší z $PM = 22.6^\circ$ na $PM_{\text{new}} = 65^\circ$
Nakreslíme Bodeho graf

$$L(s) = \frac{815350K_P (s + K_I/K_P)}{s^2 (s + 361.2)}$$

- nejprve pro $K_P = 1$ a $K_I = 0$
 - Z požadavku $PM_{\text{new}} = 65^\circ$ najdeme $\omega_{c,\text{new}} = 170$ rad/s a vypočteme
- $$K_P = 10^{-|G(j\omega_{c,\text{new}})|_{\text{dB}}/20} = 10^{-21.5/20} = 0.084$$
- K_I volíme tak, aby byla zlomová frekvence o dekádu menší než $\omega_{c,\text{new}}$

$$K_I/K_P = \omega_{c,\text{new}}/10$$

$$K_I = K_P \omega_{c,\text{new}}/10 = 0.084 \times 170/10 \approx 1.42$$





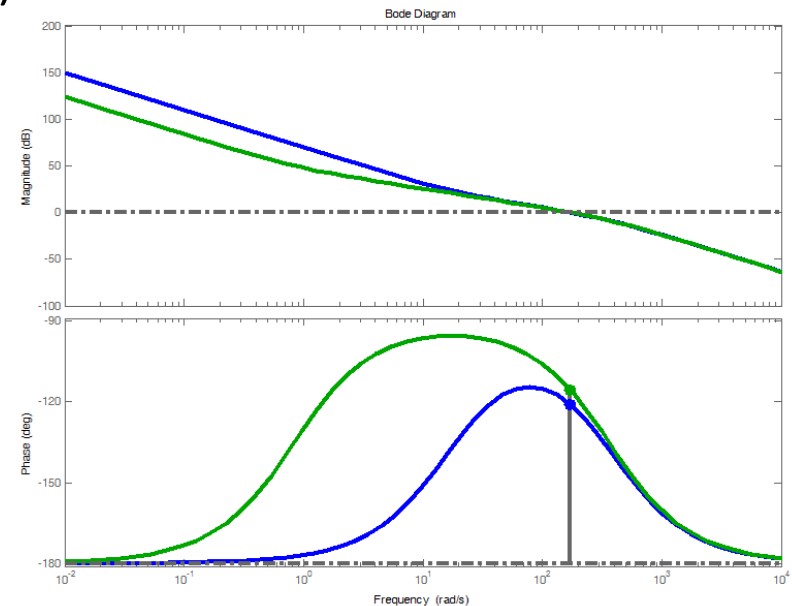
- Pro toto $K_I = 1.42$ vypočteme přenos a nakreslíme Bodeho graf

$$L(s) = \frac{815350K_P (s + K_I/K_P)}{s^2 (s + 361.2)} = \frac{68489(s + 16.9)}{s^2 (s + 361.2)}$$

- Naměříme $PM_{\text{new}} = 59$, což specifikaci nesplňuje
- Zkusíme tedy ještě vzít ještě menší K_I (= posunout zlom, frek. ještě více vlevo).
- Např. $K_I = 0.07$ vede na přenos

$$L_2(s) = \frac{68489(s + 0.833)}{s^2 (s + 361.2)}$$

- s $PM_{\text{new}} = 64.3$





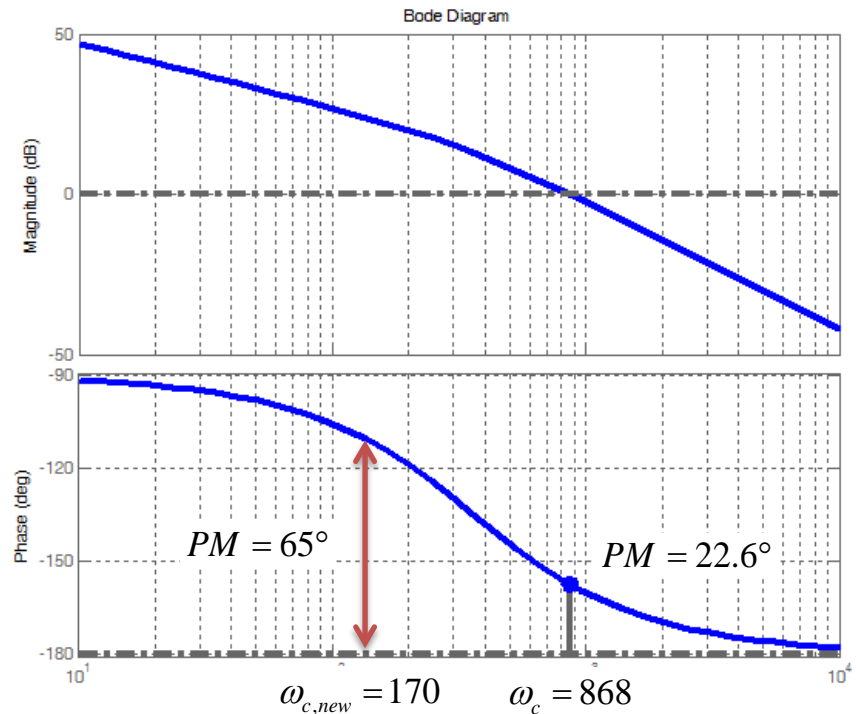
- Pro přenos soustavy $G(s) = \frac{815265}{s(s+361.2)}$
- Najděte PI regulátor, který zlepší z $PM=22.6^\circ$ na $PM=65^\circ$
Nakreslíme Bodeho graf

$$L(s) = \frac{815265 K_P (s + K_I / K_P)}{s^2 (s + 361.2)}$$

- nejprve pro $K_p = 1$ a $K_I = 0$
- Z požadavku $PM_{\text{new}} = 65^\circ$ najdeme $\omega_{c,\text{new}} = 170$ rad/s a vypočteme

$$K_P = 10^{-|G(j\omega_{c,\text{new}})|_{\text{dB}}/20} = 10^{-21.5/20} = 0.084$$

- Dále vykreslíme Bodeho graf přenos pro nové K_p a několik různých $K_I = 0; 0.008; 0.08; 0.8; 1.6$





- Viz doplňkový text



Příklad: Návrh regulátoru Lag

Zadání: Pro soustavu

$$F(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+30)}$$

navrhni Lag regulátor splňující tyto specifikace: $e_{ss,ramp} \leq 0.05$, $PM \geq 45^\circ$

Řešení:

1. Najdeme hodnotu zesílení zajišťující požadovanou odchylku:

$$L_1(s) = KF(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)}$$

$$e_{ss,ramp} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sL_1(s)} = \frac{1}{\frac{K}{2 \times 30}} = \frac{60}{K} \leq 0.05 \Rightarrow K \geq \frac{60}{0.05} = 1200$$

Tento OL přenos dává špatné PM a GM

```
>> K=1200;F=1/s/(s+2)/(s+30);L1=K*F
L1 = 1200 / 60s + 32s^2 + s^3
>> [GM,PM,om_cp,om_cg]=margin(tf(L1))
GM = 1.6000
PM = 6.6449
om_cp = 7.7460
om_cg = 6.1031
>> GM_dB = 20*log10(GM)
GM_dB = 4.0824
```



Příklad: Návrh regulátoru Lag

2. Nakreslíme Bodeho graf L

$$L_1(s) = \frac{1200}{s(s+2)(s+30)}$$

- Z požadovaného PM vypočteme potřebnou fázi
- a na ní najdeme nové $\omega_{c,new} = 1.28 \text{ rad/s}$
- Na této frekvenci zjistíme potřebné zeslabení

$$-180^\circ + 45^\circ + 10^\circ = 125^\circ$$

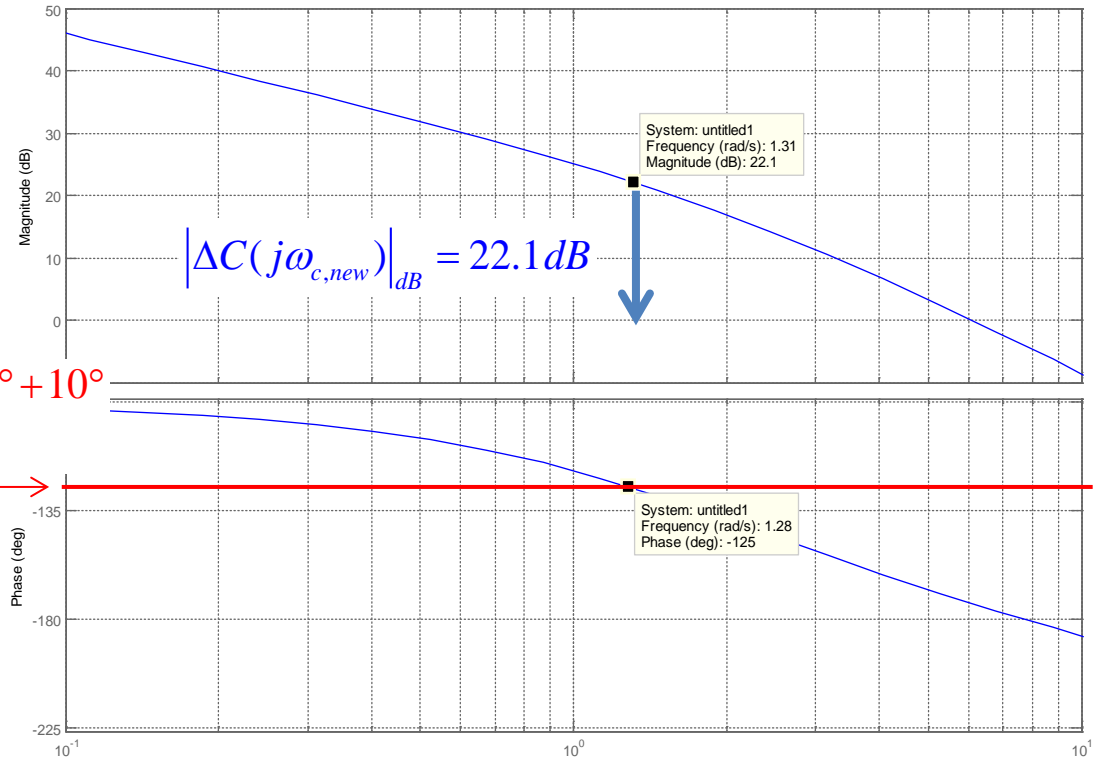
$$|\Delta C(j\omega_{c,new})|_{dB} = -22.1 \text{ dB}$$

3. Vypočteme parametr a z naměřených hodnot

nebo z přenosu

$$a = |\Delta C(j\omega_{c,new})| = 10^{\frac{1}{20}|\Delta C(j\omega_{c,new})|_{dB}} = 10^{-\frac{22.1}{20}} = 0.0785$$

```
>> aa=1/abs(value(L1,j*1.28))
aa = 0.0761
```





4. Vypočteme nulu

$$z_c = \frac{\omega_{c,new}}{10} = 0.128$$

a pól

$$p_c = az_c = 0.0785 \times 0.128 = 0.0101$$

5. Výsledný regulátor je

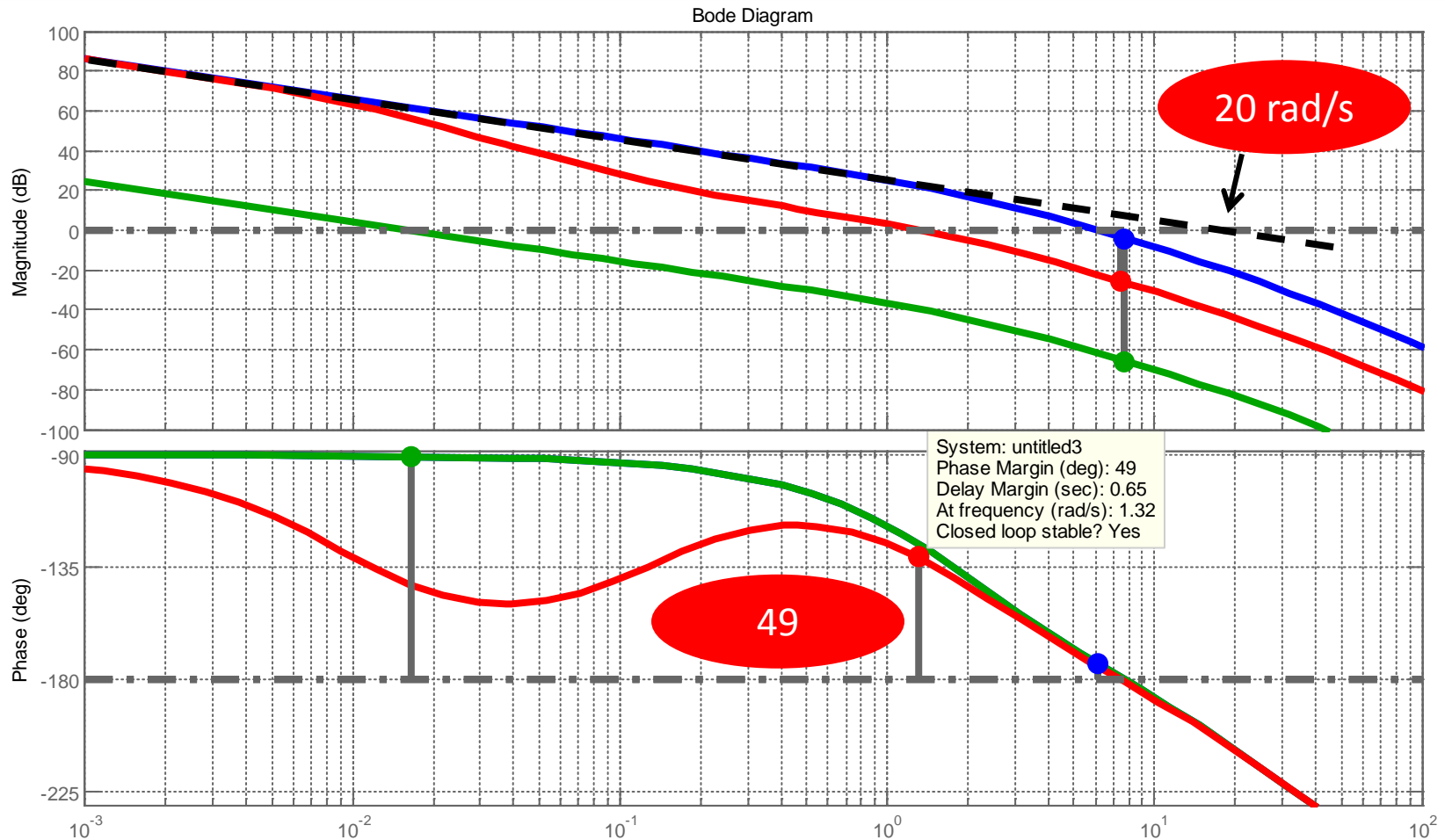
$$C_{lag}(s) = \frac{as + p_c}{s + p_c} = \frac{0.0785s + 0.0101}{s + 0.0101}$$

6. Konečně ověříme splnění specifikací



Příklad: Návrh regulátoru Lag

6.



```
>> Kv=value(coprime(s*L2),0), e_ss_ramp=1/Kv  
Kv = 20.0000 , e_ss_ramp = 0.0500
```



Jiný příklad: Kompenzace Lag

- V systému řízení polohy bylo předchozí metodou nastaveno zesílení tak, že
- Výsledný systém má překmit 9.5% a

$$L(s) = \frac{58390}{s(s+36)(s+100)}$$

$$K_v = 16.22 \rightarrow e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0.0617$$

- Přidejte Lag kompenzaci tak, aby ustálená odchylka na rampu byla 10x menší a přitom se překmit nezhoršil
- Požadavek na ustálený stav vede na $K_v = 162.2$, takže musíme
- zesílení ještě zvětšit 10x, čímž dostaneme

$$L(s) = \frac{583900}{s(s+36)(s+100)}$$

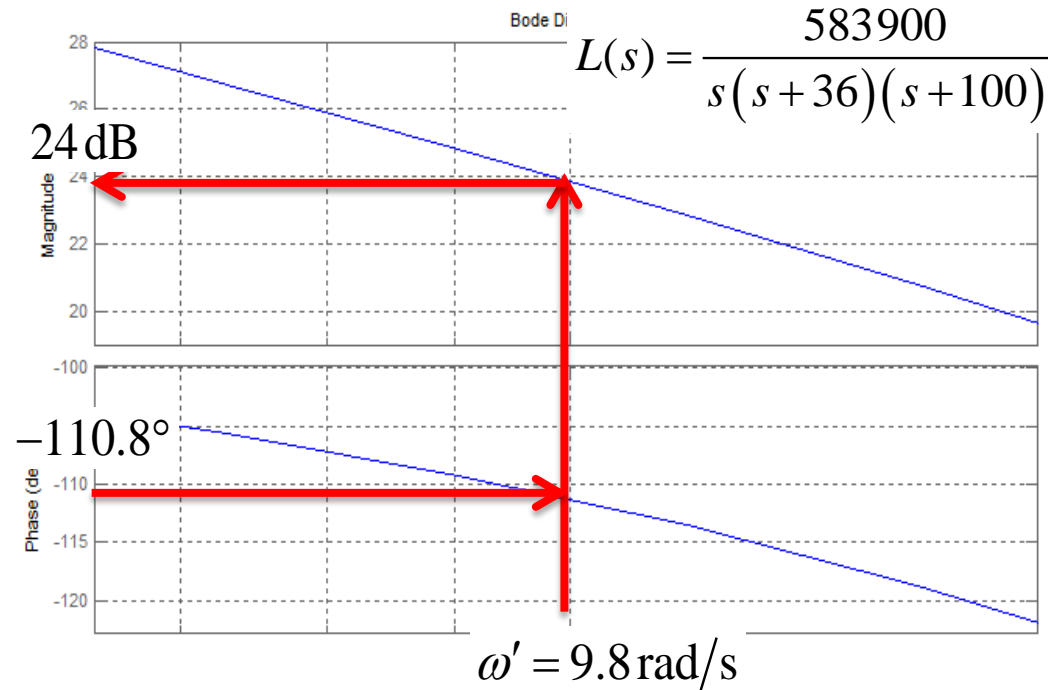
- Požadavek překmitu 9.5% vede na $\zeta = 0.6 \rightarrow PM = 59.2^\circ$
- Protože Lag sníží PM málo, ale přece jen (počítáme se zhoršením $\Delta PM = -5^\circ \leftrightarrow -12^\circ$), uvažujeme raději $PM = 59.2^\circ + 10^\circ = 69.2^\circ$
- Najdeme frekvenci ω' , pro kterou je fáze

$$\angle L(j\omega') = -180^\circ + 69.2^\circ = -110.8^\circ$$



Pokračování: Kompenzace Lag

- Z požadované fáze
 -110.8°
- určíme frekvenci
 $\omega' = 9.8 \text{ rad/s}$
- A z ní pak současnou hodnotu
 $20 \log M(\omega') = 24 \text{ dB}$

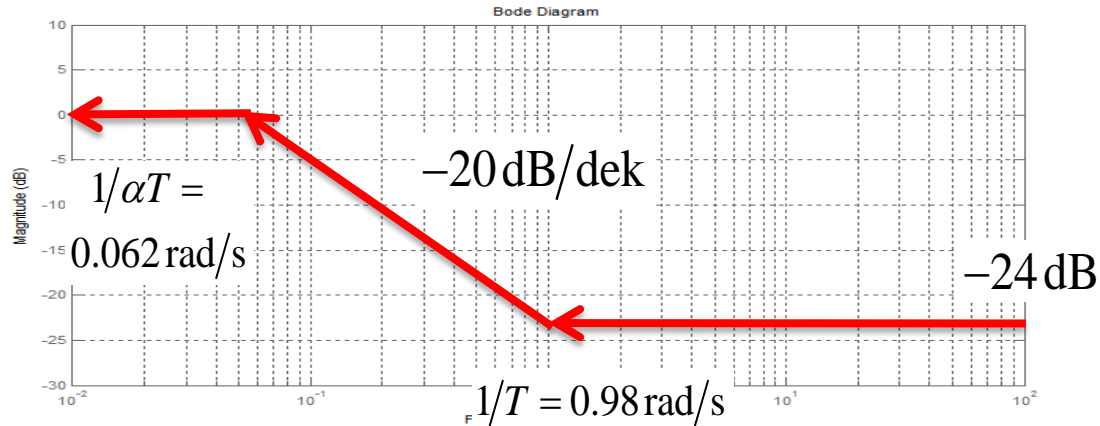


- Protože z definice PM má pro ω' být $20 \log M(\omega') = 0 \text{ dB}$
- Musí lag provést na frekvenci $\omega' = 9.8 \text{ rad/s}$ zeslabení -24 dB



Pokračování: Kompenzace Lag

- Nakreslíme asymptotu pro vysoké frekvence ve $20 \log M(\omega') = -24 \text{ dB}$



- Horní rohovou frekvenci ω' volíme cca dekádu vlevo od $\omega' = 9.8 \text{ rad/s}$, tj. asi $1/T = 0.98 \text{ rad/s}$
- Odtud pokračujeme nahoru se sklonem -20 dB/dek až k 0 dB , což dosáhneme pro $1/\alpha T = 0.062 \text{ rad/s}$

- Dosazením do dostaneme

$$C(s) = \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} = \frac{s + 0.98}{s + 0.062}$$

- To má správný tvar, ale ještě ne zesílení, takže nastavíme DC zesílení kompenzátoru

$$K_C = 1/\alpha = p/z \rightarrow D_C(0) = 1 = 0 \text{ dB}$$

$$D_C(s) = K_C C(s) = \frac{0.063(s + 0.98)}{s + 0.062}$$



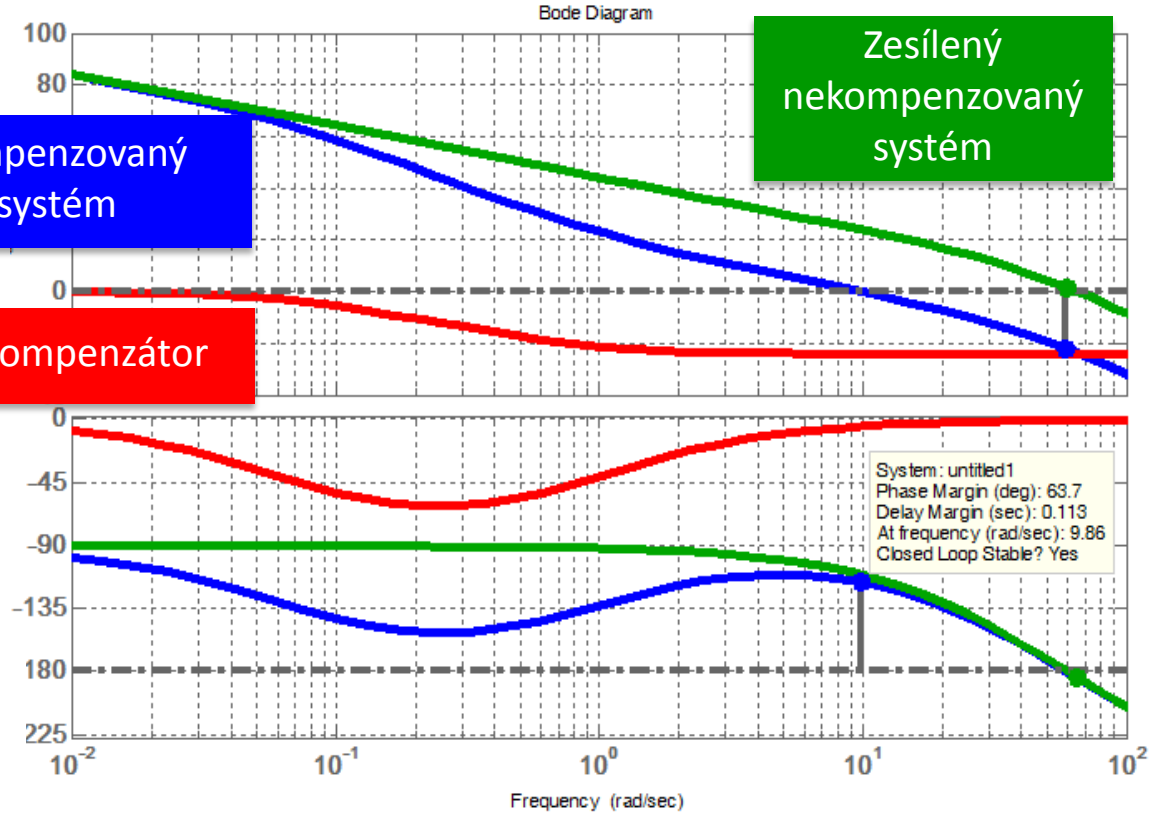
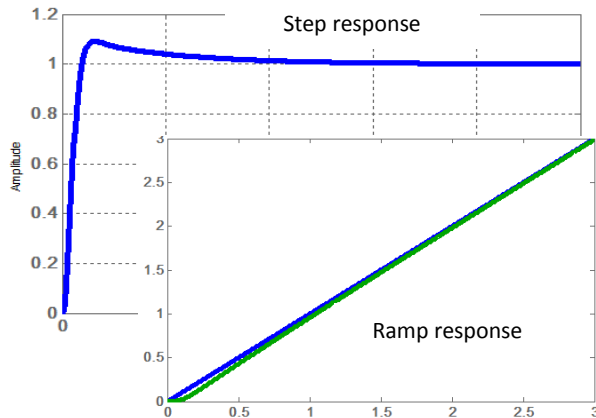
Pokračování: Kompenzace Lag

- Výsledek je

$$\frac{583900}{s(s+36)(s+100)} \times$$

$$\frac{0.063(s+0.98)}{s+0.062} =$$

$$\frac{36787(s+0.98)}{s(s+36)(s+100)(s+0.062)}$$





Příklad: Kompenzace Lead

- Opět se vrátíme k průběžnému příkladu řízení polohy a navrhne regulátor dle specifikací:
- OS 20%, $K_v = 40$, $T_p = 0,1s$
- Nejprve nastavíme zesílení tak, aby $K_v = 40$

$$L(s) = \frac{100K}{s(s+36)(s+100)}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} |sL(s)| = 0.0278K = 40 \rightarrow K = 1440$$

- Dosadíme a dále pracujeme dále s přenosem
- Ze zadaných specifikací vypočteme PM a ω_{BW} :

$$L(s) = \frac{144000}{s(s+36)(s+100)}$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} \cong 0.456 \rightarrow PM = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} \cong 48.1^\circ$$

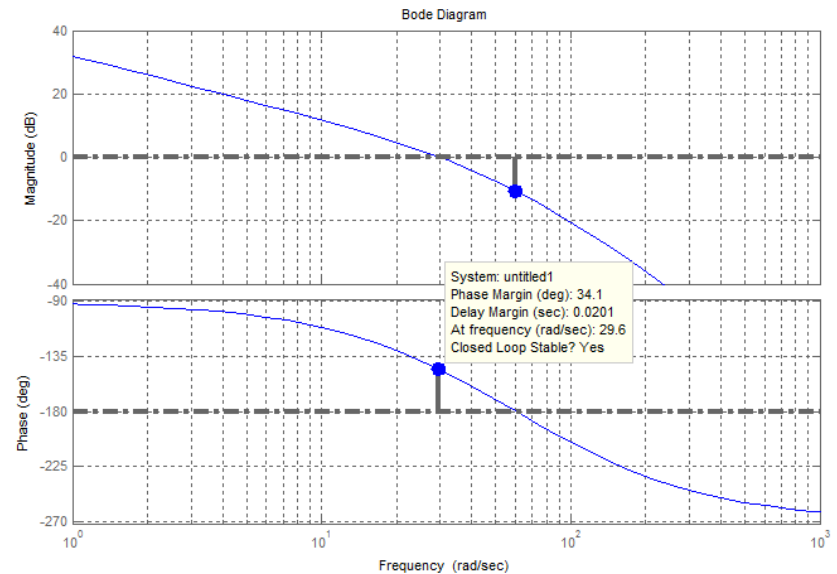
$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} = 46.6 \text{ rad/s}$$



Příklad: Kompenzace Lead

- Nakreslíme Bodeho graf pro
- Tento nekompenzovaný systém má $PM = 34,1^\circ$
- Pomocí kompenzace Lead zvýšíme PM na požadovanou hodnotu
- Jelikož Lead také zvyšuje ω_C , přidáme ještě určitý korekční faktor,
- abychom kompenzovali nižší fázi nekompenzovaného systému pro vyšší ω_C
- Faktor zvolíme 10°
- Od regulátoru tedy chceme přírůstek fáze

$$L(s) = \frac{144000}{s(s+36)(s+100)}$$



$$48.1 - 34^\circ + 10^\circ = 24.1^\circ$$



Příklad: Kompenzace Lead

- Od regulátoru tedy chceme přírůstek fáze $48,1^\circ - 34^\circ + 10^\circ = 24,1^\circ$
- Celkem musí mít kompenzovaný systém
 $PM = 48.1$ a $\omega_{BW} = 46.6 \text{ rad/s}$
- Pokud by nebyl výsledek uspokojivý, musíme zopakovat návrh s jiným korekčním faktorem
- Z požadavku na přírůstek fáze máme $\phi_{\max} = 24.1^\circ$ a z toho

$$\beta = \frac{1 - \sin \phi_{\max}}{1 + \sin \phi_{\max}} = 0.42$$

- Dále je $|D(\omega_{\max})| = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 3.76 \text{ dB}$
- Když vybereme $\omega_{C,new} = \omega_{\max}$ tak na této frekvenci musí být amplituda nekompensovaného systému $-3,76 \text{ dB}$
- Podle toho najdeme ω_{\max}



Příklad: Kompenzace Lead

- Na Bodeho grafu pro

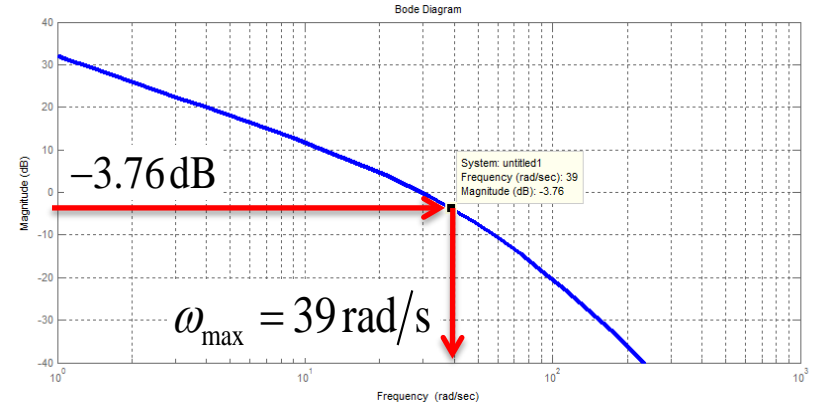
$$L(s) = \frac{144000}{s(s+36)(s+100)}$$

- naměříme $\omega_{\max} = 39 \text{ rad/s}$.
- Pak z ω_{\max} a $\beta = 0.42$ vypočteme

$$\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{\beta}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{T} = 25.3, \frac{1}{T\beta} = 60.2$$

- a z toho nakonec dostaneme hledaný regulátor

$$D(s) = \frac{1}{\beta} \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = 2.38 \frac{s + 25.3}{s + 60.2}$$

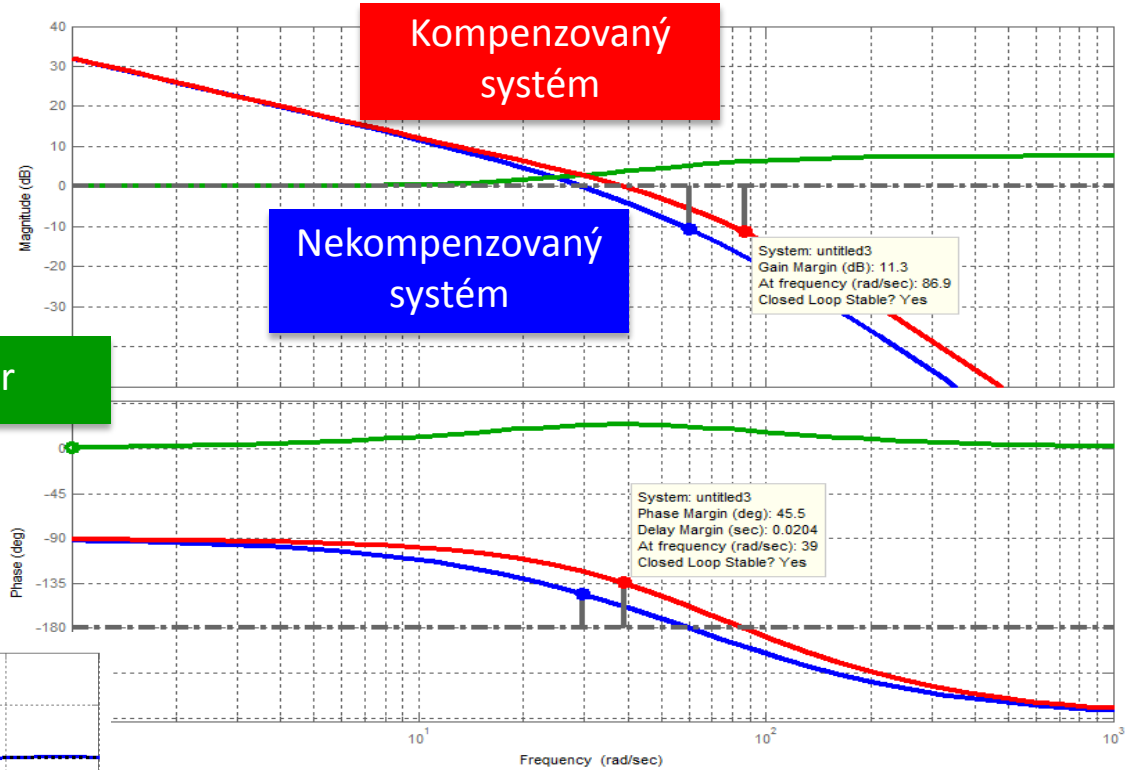




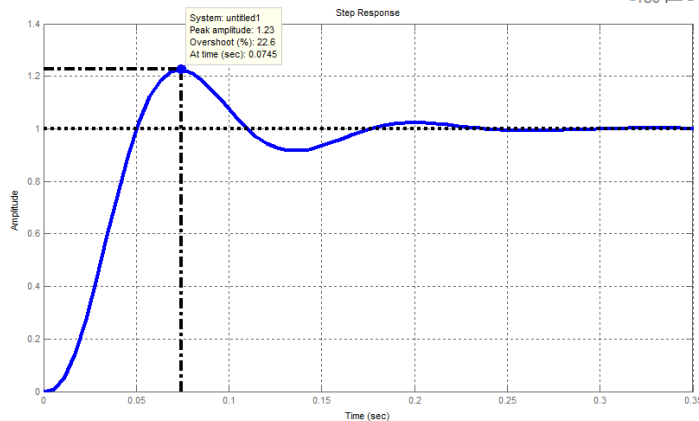
Příklad: Kompenzace Lead

- Výsledek:

Lead kompenzátor



- Simulace:



$$OS\% = 22.6, PM = 45.5^\circ, \omega_C = 39 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{BW} = 68.8 \text{ rad/s}, T_p = 0.075 \text{ s}, K_v = 40$$