

Příklady k přednášce

14 - Moderní frekvenční metody



Michael Šebek
Automatické řízení 2018



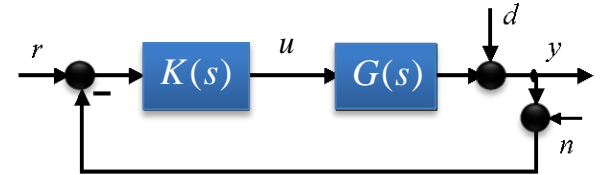
Opakování: Přenosy v uzavřené smyčce

- Přenosy ve ZV systému

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s)$$

$$u(s) = K(s)S(s)r(s) - K(s)S(s)d(s) - K(s)S(s)n(s)$$

$$e(s) = r(s) - y(s) = S(s)r(s) - S(s)d(s) + T(s)n(s)$$



- Např. vliv poruchy bude malý pro malé S , vliv šumu pro malé T
- Současně malé S i T bohužel nelze, neboť $S(s) + T(s) = 1$

Důkaz

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + L(s)} + \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1 + L(s)}{1 + L(s)} = 1$$

- To je vážné omezení pro návrh regulátoru, platí i po dosazení $s = j\omega$, a to pro každé jednotlivé ω $S(j\omega) + T(j\omega) = 1$ (pozor – jsou to komplexní čísla)
- Proto je návrh kompromisem: musíme zvolit priority pro jednotlivé frekvenční rozsahy
- Tomu se říká **tvárování frekvenční charakteristiky** (loop shaping)



Opakování - Loop Shaping - klasická verze

- V klasické verzi loop shaping je tvarování OL frekvenční charakteristiky, přesto že cílem je tvar CL frekvenční charakteristiky (navrhujeme ZV systém)
- v některých frekvenčních pásmech totiž stačí tvarovat $|L(j\omega)|$, protože z tvaru $|L(j\omega)|$ tam jednoznačně (a jednoduše) plyne tvar $|S(j\omega)|$ a $|T(j\omega)|$,

- přesné vztahy
$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)} \quad T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}$$

- přibližné vztahy

- obvykle pro nízké frekvence: $|L(j\omega)| \gg 1 \rightarrow S(j\omega) \approx \frac{1}{L(j\omega)} \quad T(j\omega) = 1$

- obvykle pro vysoké frekvence $|L(j\omega)| \ll 1 \rightarrow S(j\omega) = 1 \quad T(j\omega) = L(j\omega)$

- v okolí přechodové frekvence ω_c (tam kde L není ani velké ani malé) ze tvaru $|L(j\omega)|$ jednoduše tvar $|S(j\omega)|$, $|T(j\omega)|$ neplyne,
- protože záleží také na fázi
- Např. $|S(j\omega)|$, $|T(j\omega)|$ mohou mít velké špičky když je $L(j\omega) \sim -1$



Bode Gain-Phase Relation

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Pro **stabilní minimálně-fázový systém** (= nemá nestabilní póly a nuly) s přenosem $G(s)$ je mezi zesílením $|G(j\omega)|$ a fází $\angle G(j\omega)$ jednoznačný vztah

Přibližně, v log-log Bodeho grafu:

Má-li $|G(j\omega)|$ po celou dekádu frekvencí konstantní sklon n , pak tam je

$$\angle G(j\omega) \approx n \times 90^\circ$$

Tedy pokud má v přechodovém pásmu (kde $|L(j\omega)| \approx 1$) amplituda lokálně charakter:

$$s^0 \Rightarrow n = 0 \quad \text{žádný přechod není!}$$

$$s^{-1} \Rightarrow n = -1 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx -90^\circ \Rightarrow PM \approx 90^\circ$$

$$s^{-2} \Rightarrow n = -2 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx -180^\circ \Rightarrow PM \approx 0^\circ$$

Jednoduché pravidlo: Navrhni regulátor tak, aby v přechodové oblasti měla $|L(j\omega)|$ sklon $l = -1$, tj. -20dB/dek



Bode Gain-Phase Relation

Kdyby to někoho zajímalo, tak přesně je Bodeho vztah mezi zesílením a fází

$$\angle G(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |L(je^v)|}{dv} \ln \operatorname{cotgh} \frac{|v|}{2} dv$$

$$v = \ln \frac{\omega}{\omega_0}$$

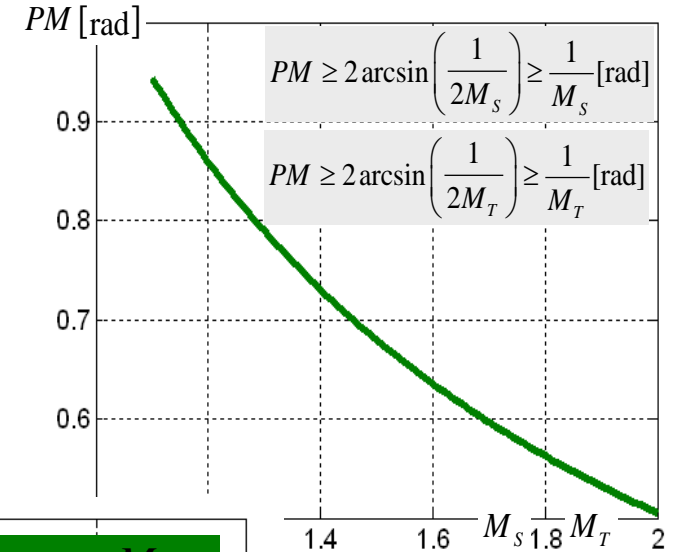
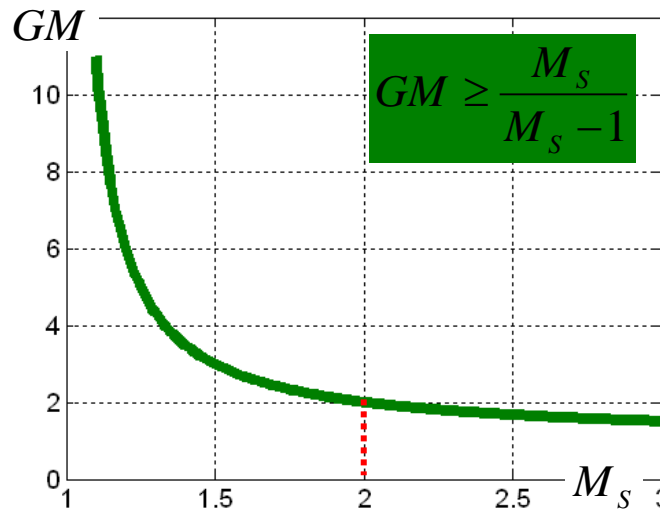
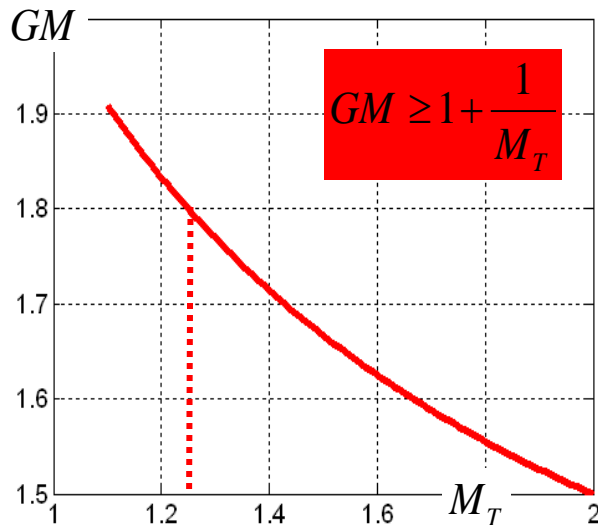


Vztahy mezi PM , M_S a M_T

Např. $M_S = 2 \rightarrow GM \geq 2, PM \geq 29^\circ$

nebo $M_T = 2 \rightarrow GM \geq 1.5, PM \geq 29^\circ$

Je tedy jednodušší používat
ve specifikacích M_S nebo M_T
Třeba graficky

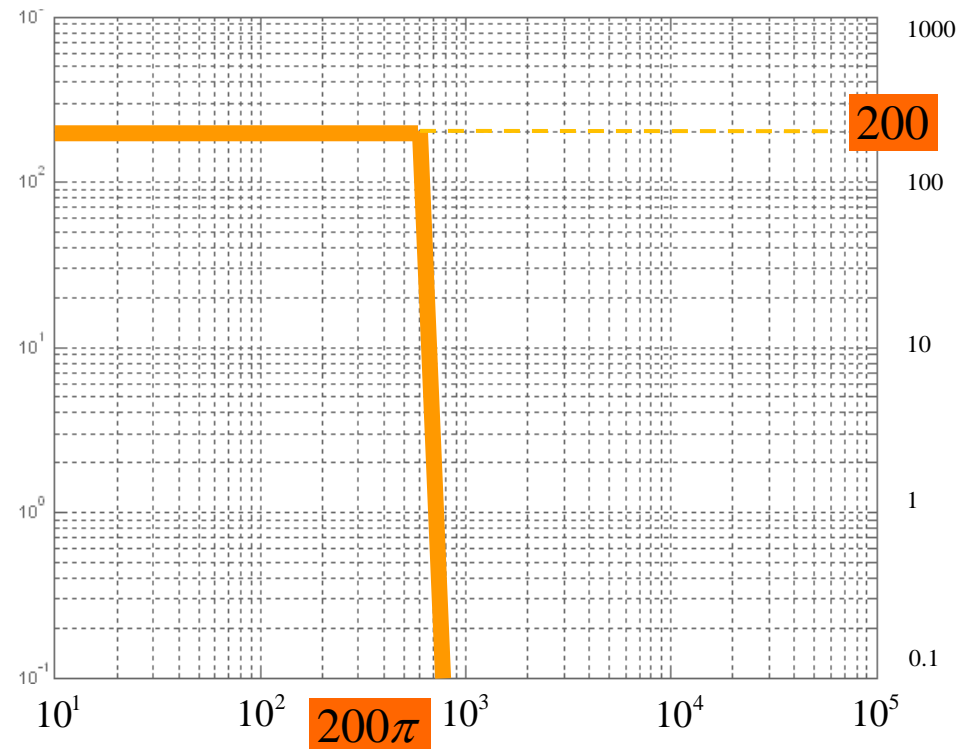




Příklad – váha vstupního signálu

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- jednotková ZV má mít odchylku menší než 0.005 pro všechny sinusovky s amplitudou 1 o frekvenci pod 100 Hz
- pomocí váhové frekvenční funkce chování formulujeme tyto požadavky takto:
- spektrum referenčních signálů je = 1 pro $0 \leq \omega \leq 200\pi$
- protože $e_b = 0.005$, tak je hledanou funkcí obdélník o výšce $1/0.005 = 200$ na daném frekvenčním rozsahem
- výsledný graf





Příklad: porovnání s klasickým požadavkem

- Ustálená odchylka na skok je $e_{\text{step,ss}} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = S(0)$

- Klasický požadavek pro ustálenou odchylku na skok

- můžeme tedy napsat jako $|e_{\text{step,ss}}| \leq e_b \Rightarrow |e_{\text{step,ss}}| \frac{1}{e_b} \leq 1$

$$|e_{\text{step,ss}}| \frac{1}{e_b} = |S(0)| \frac{1}{e_b} = |S(0)| W_1 \leq 1$$

- tento požadavek jsme teď rozšířili na frekvenční pásmo $\omega \in [0, \omega_1]$ jako

$$\forall \omega \in [0, \omega_1]: |S(j\omega)| W_1(\omega) \leq 1 \quad \longleftrightarrow \quad |S| W_1 \leq 1$$

- protože je W_1 mimo tento frekvenční rozsah nulové, platí tento vztah vlastně pro všechny frekvence

$$\forall \omega \in [0, \infty]: |S(j\omega)| W_1(\omega) \leq 1$$



Požadavek na chování jako funkce L

- vztah formulující požadavky na řízení $|S|W_1 \leq 1 \Leftrightarrow \forall \omega: |S(j\omega)|W_1(\omega) \leq 1$
- můžeme také přibližně vyjádřit pomocí přenosu otevřené smyčky
- protože ve frekvenčním rozsahu (malé frekvence), kde požadujeme malou odchylku, je velké zesílení, tak tam přibližně platí

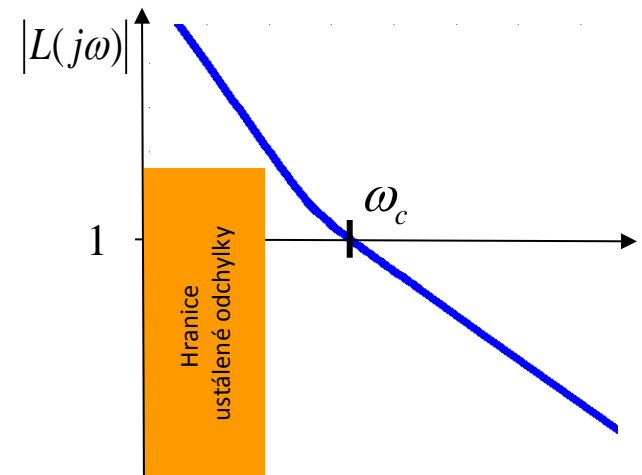
$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| \approx \left| \frac{1}{L(j\omega)} \right|$$

- potom přibližně

$$|S|W_1 \leq 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{W_1}{|L|} \leq 1 \quad \longleftrightarrow \quad |L| \geq W_1$$

- nebo podrobněji

$$\forall \omega \in [0, \omega_0]: |L(j\omega)| \geq W_1(\omega)$$



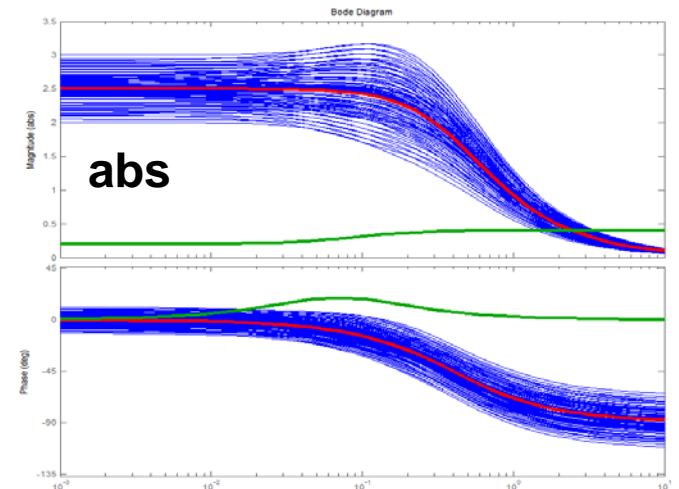
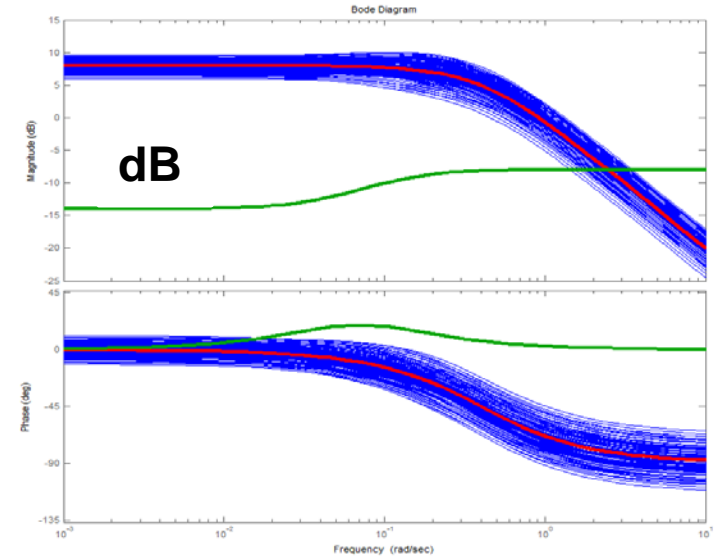
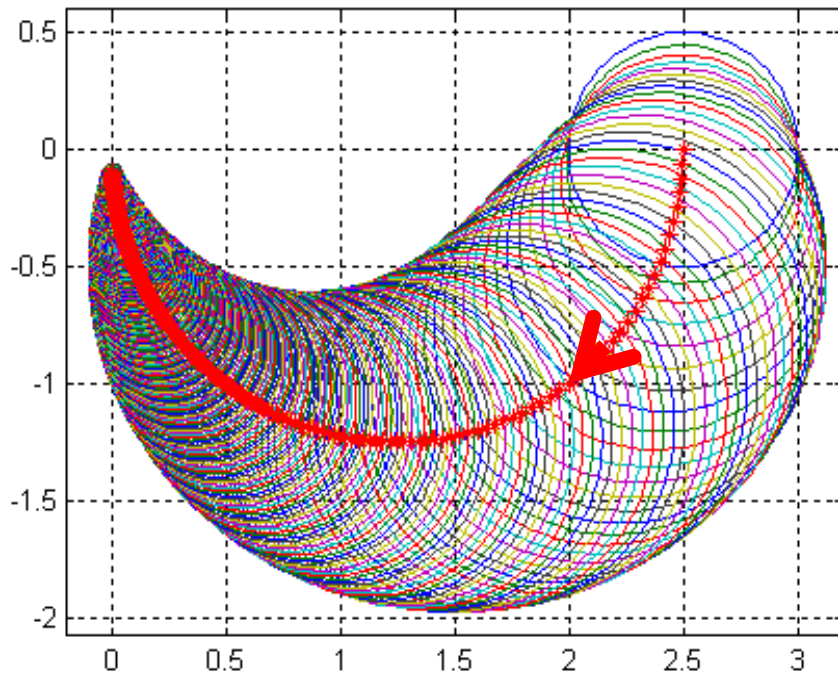


Příklad: Nyquistův graf neurčité soustavy

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

$$G(j\omega) = G_0(j\omega) [1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)], |\Delta(j\omega)| \leq 1,$$

$$G_0(s) = \frac{2.5}{2.5s+1}, W_2(\omega) = \left| \frac{4j\omega+0.2}{10j\omega+1} \right|$$





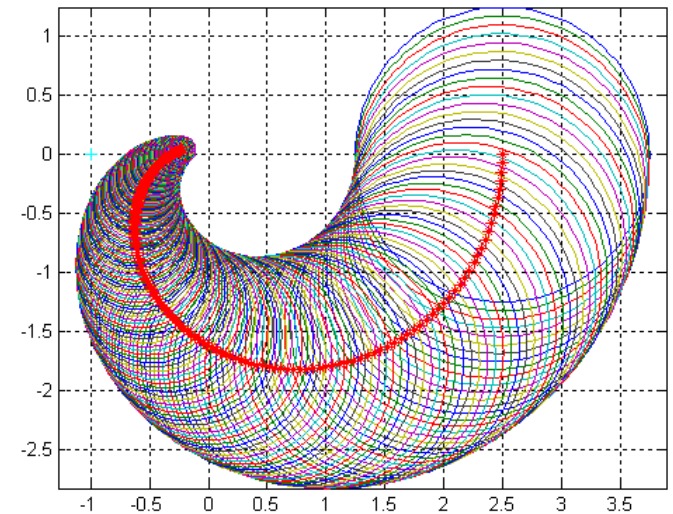
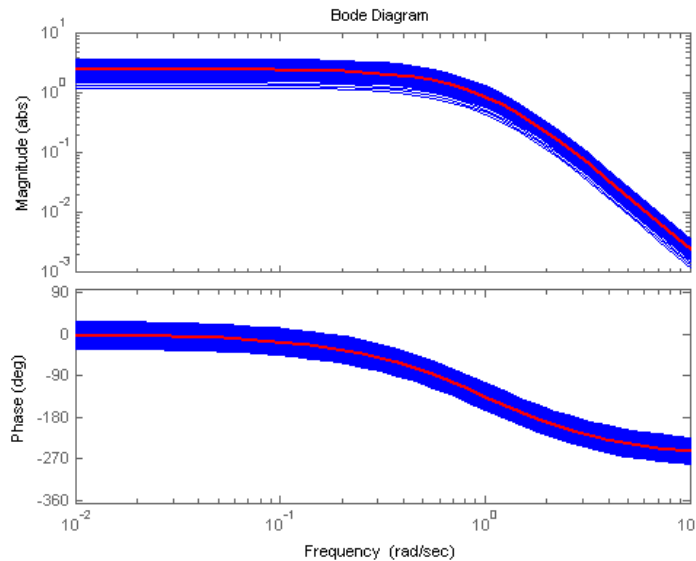
Příklad: Nyquistův a Bodeho graf neurčitého systému

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- systém s multiplikativní neurčitostí $G(j\omega) = G_0(j\omega)[1 + W_2(\omega)\Delta(j\omega)]$, $|\Delta(j\omega)| \leq 1$

$$G_0(s) = \frac{2.5}{(s+1)^3}, W_2(s) = 0.5$$

- nominální frekvenční charakteristika $G_0(j\omega)$
- celková frekvenční charakteristika $G(j\omega) = G(j\omega)$





Neurčitost způsobená zanedbáním dynamiky

- Uvažme soustavu s přenosem

$$G(s) = G_0(s)f(s)$$

- kde $G_0(s)$ je pevně dáno a budeme s ním počítat jako s nominálním,
- ale $f(s)$ chceme zanedbat a nahradit multiplikatívní neurčitostí.
- Velikost relativní neurčitosti způsobené zanedbáním $f(s)$ je zřejmě

$$l_r(\omega) = \max_{G(s)} \left| \frac{G(j\omega) - G_0(j\omega)}{G_0(j\omega)} \right| = \max_{f(s)} |f(j\omega) - 1|$$

- Probereme podrobněji 2 případy:
 - zanedbání členu s dopravním zpožděním

$$f(s) = e^{-\theta s}, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

- zanedbání členu prvního řádu

$$f(s) = 1/(\tau_p s + 1), 0 \leq \tau_p \leq \tau_{\max}$$

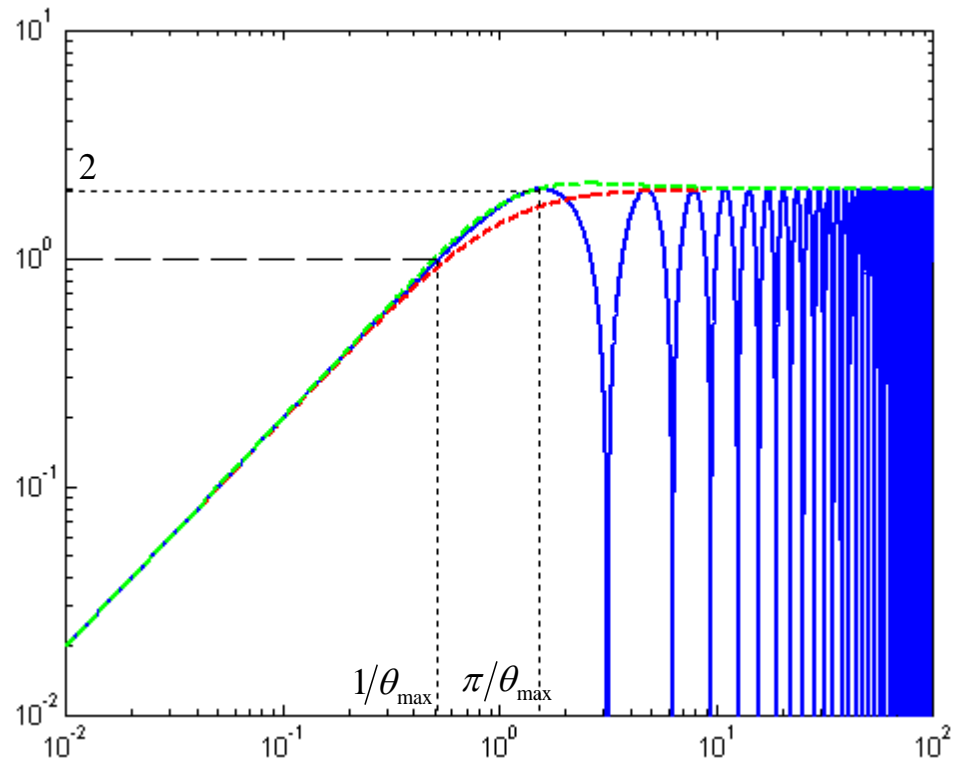


Zanedbané dopravní zpoždění

- uvažme $G(s) = G_0(s)f(s)$ kde $f(s) = e^{-\theta s}, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$
- pro maximální zpoždění je odchylka $l_I(\omega) = |e^{-j\omega\theta_{\max}} - 1|$ nakreslena na obrázku (pro $\theta_{\max} = 2$)
- dosahuje 1 pro $\omega = 1/\theta_{\max}$
- maxima (=2) pro $\omega = \pi/\theta_{\max}$
- pak osciluje mezi 0 a 2
- pro jiná θ je to podobné
- je tedy

$$l_I(\omega) = \begin{cases} |e^{-j\omega\theta_{\max}} - 1|, & \omega < \pi/\theta_{\max} \\ 2 & \omega \geq \pi/\theta_{\max} \end{cases}$$

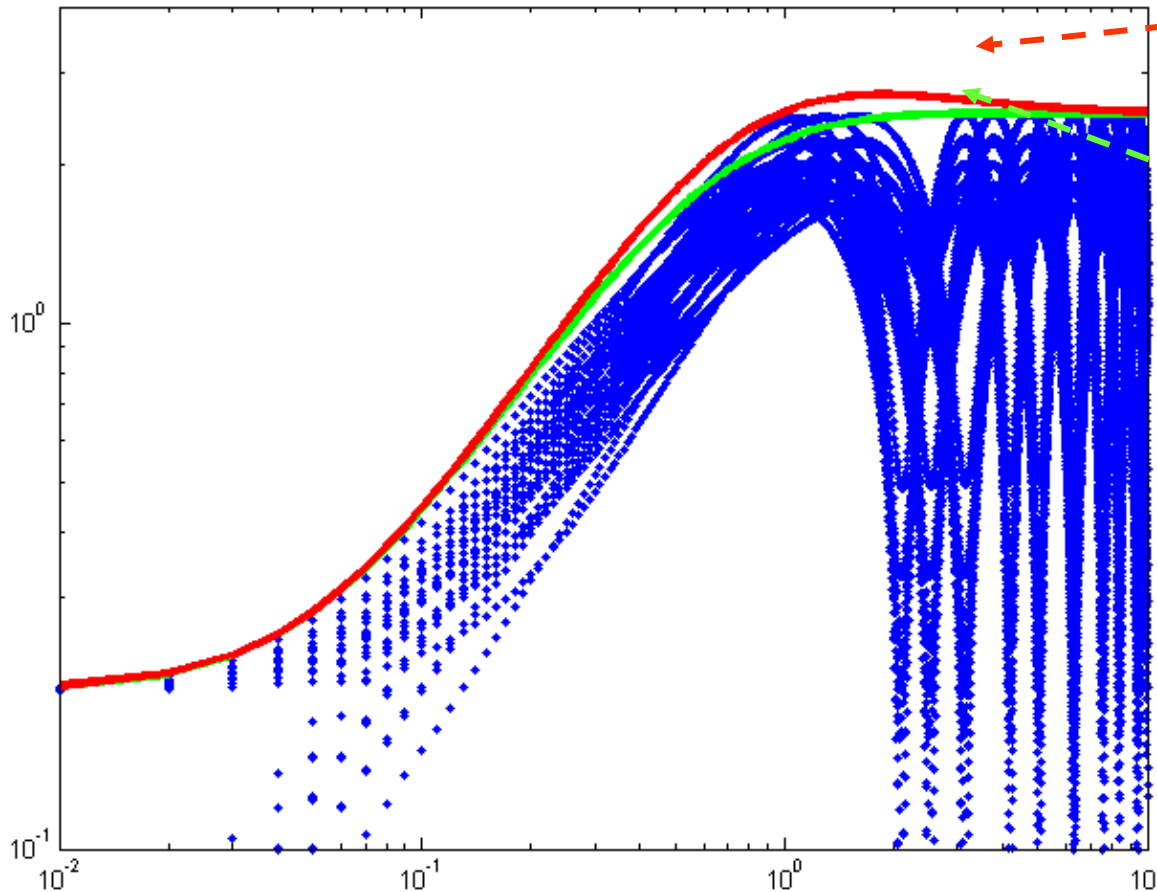
- náhrada racionální funkcí řádu **1** a **3**





Zanedbané dopravní zpoždění

$$W_{2,2}(j\omega) = W_{2,1}(j\omega) \left| \frac{s^2 + 2.1s + 1}{s^2 + 1.4s + 1} \right|_{s=j\omega}$$



$$W_{2,1}(j\omega) = \left| \frac{4s + 0.2}{10s + 1} \right|_{s=j\omega}$$

$$\left| \frac{\frac{k}{\tau s + 1} e^{-\theta s}}{G_0(s)} - 1 \right|$$

$k, \tau, \theta \in \{2, 2.5, 3\}$



Zanedbané zpoždění 1.řádu

Uvažme $G(s) = G_0(s)f(s)$, kde $f(s) = 1/(\tau_p s + 1)$, $0 \leq \tau_p \leq \tau_{\max}$

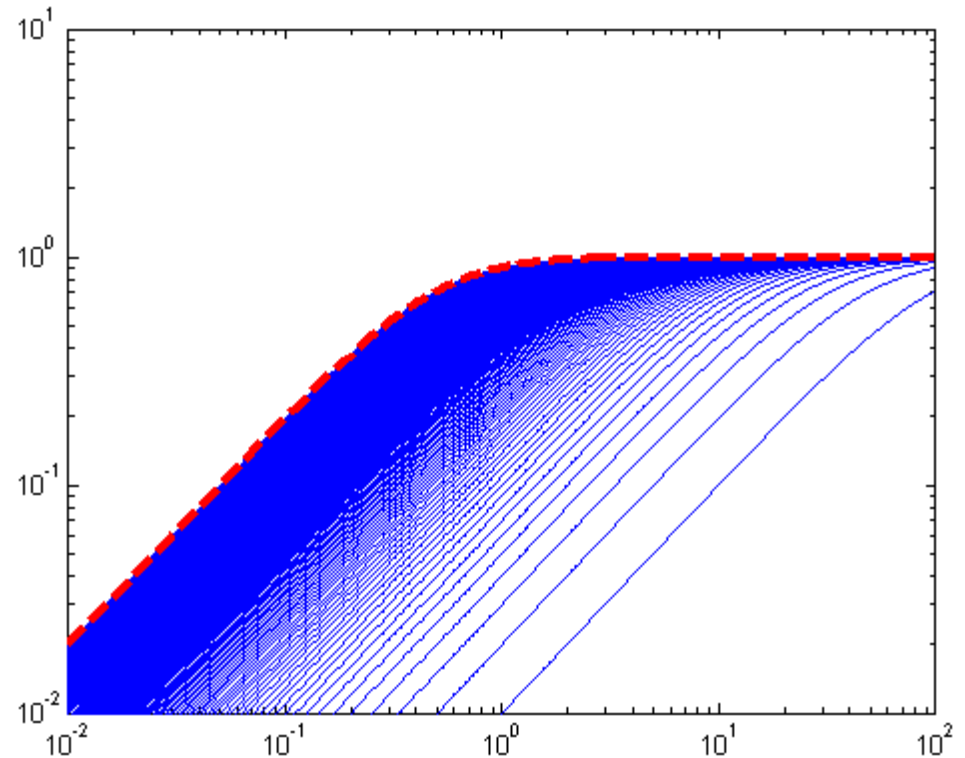
- Odchylka

$$l_I(\omega) = |1 - 1/(\tau_{\max} s + 1)|$$

- nakreslena na obrázku
- pro $\tau_{\max} = 2$ červeně
- a pro menší τ modře
- reprezentujeme ji racionální váhovou funkcí

$$|w_I(j\omega)| = l_I(\omega)$$

$$w_I(j\omega) = 1 - \frac{1}{\tau_{\max} s + 1} = \frac{\tau_{\max} s}{\tau_{\max} s + 1}$$





Podmínka robustní stability - důkaz

- Předpokládejme, že je nominální návrh hotov a CL je nominálně stabilní, Nyquistův graf $L_0(s)=D(s)G_0(s)$ tedy splňuje Nyquistovo kritérium stability
- Dále speciálně nominální CL nemá pól na mezi stability
 $\rightarrow 1 + L_0(s)$ nemá nulu na mezi stability $\rightarrow 1 + L_0(j\omega) \neq 0, \forall \omega$
- Aby byla CL stabilní i robustně, nesmí mít ani $1 + L(s)$ nulu na mezi stability, a to pro žádné ω a žádné Δ $\leftrightarrow 1 + L(j\omega) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall |\Delta(j\omega)| \leq 1$

$$1 + L_0(j\omega) + L_0(j\omega)W_2(\omega)\Delta(j\omega) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall |\Delta(j\omega)| \leq 1$$

$$1 + L_0(j\omega) + \frac{1 + L_0(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)} L_0(j\omega)W_2(\omega)\Delta(j\omega) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall |\Delta(j\omega)| \leq 1$$

nominální stabilita $\underbrace{(1 + L_0(j\omega))}_{\neq 0 \forall \omega} (1 + T_0(j\omega)W_2(\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall |\Delta(j\omega)| \leq 1$

$$(1 + T_0(j\omega)W_2(\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall |\Delta(j\omega)| \leq 1$$

$$T_0(j\omega)W_2(\omega)\Delta(j\omega) \neq 1 \quad \forall \omega, \forall |\Delta(j\omega)| \leq 1$$

$$|T_0(j\omega)W_2(\omega)| < 1 \quad \forall \omega$$



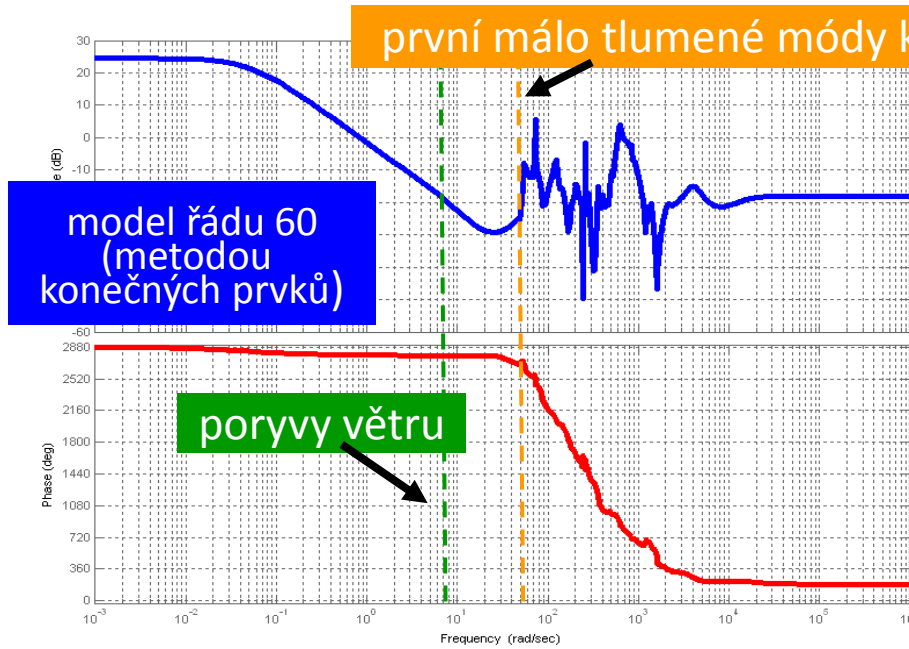
- European Southern Observatory:
čtyři 8 m teleskopy (~16 m), Atacama v Chile
- přesné nasměrování a potlačení poruchy (vliv větru)
metodami robustního řízení
- projekt katedry, Z. Hurák: popularizační článek AUTOMA 1/05
- video



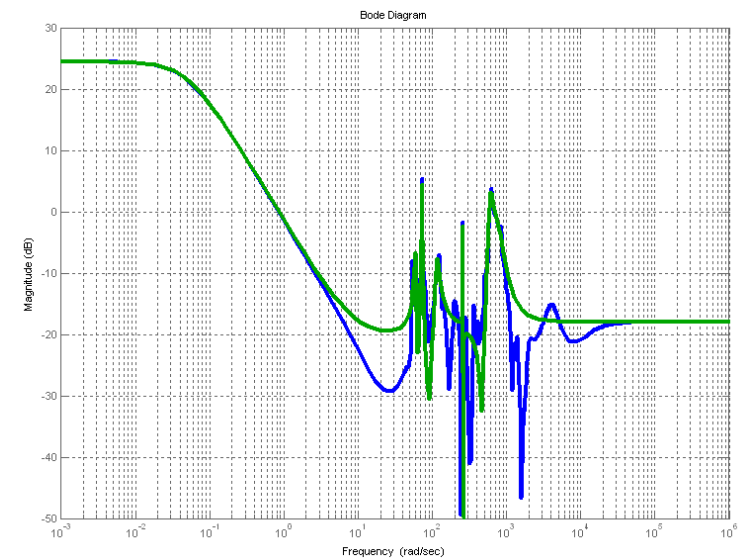
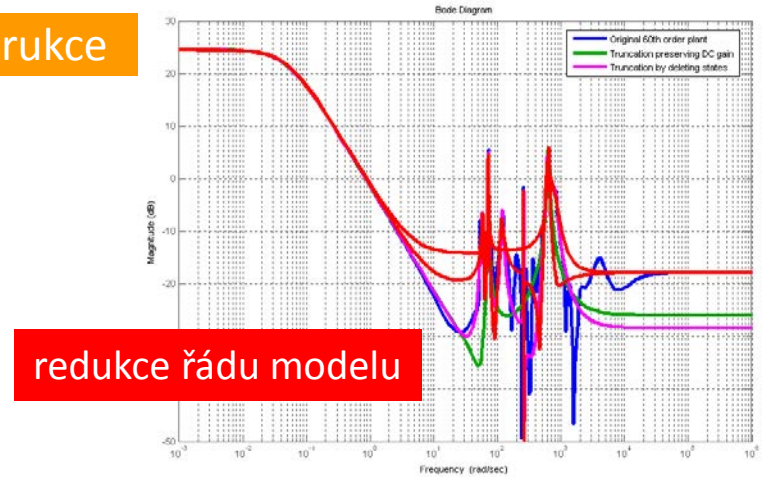


Příklad: VLT ESO

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

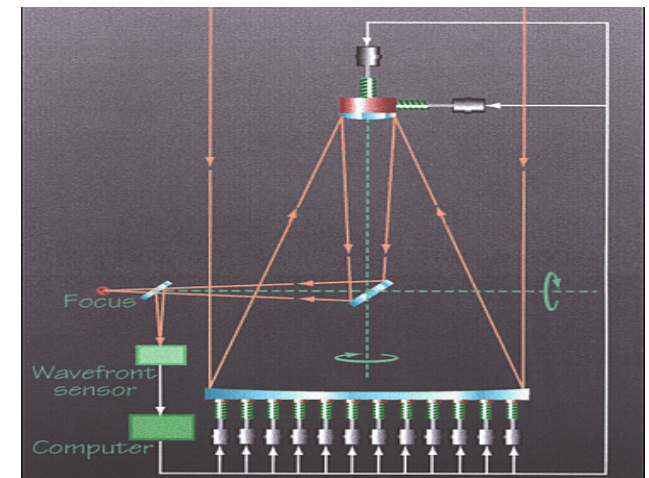
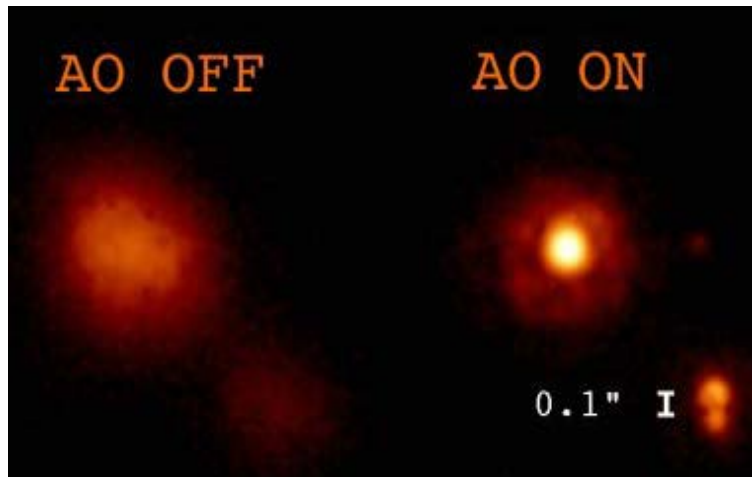


redukovaný model řádu 24



Aktivní a adaptivní optika

- plán 2015:
- OWL Teleskop, zrcadlo 100m,
- deformovatelné segmenty
- 500.000 akčních členů
- návrh ?
- numerické metody ?
- VIDEO OWL.mpeg





Příklad: Efekt vodní postele I

- Pro $L(j\omega) = \frac{4}{(s+2)(s-1)}$ s jedním nestabilním pólem

- je S stabilní $S(j\omega) = \frac{-2+s+s^2}{2+s+s^2}$

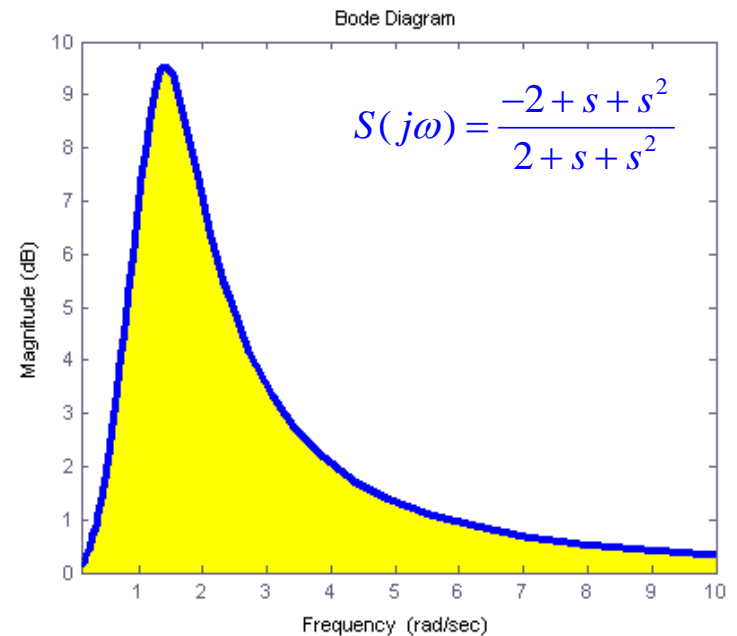
- ale

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi$$

- z Bodeho diagramu vidíme, že dokonce

$$|S(j\omega)| > 1 \quad \forall \omega$$

- to je celkem pochopitelné, protože za stabilizaci musíme něco zaplatit





Efekt vodní postele I - obecněji

- Podmínku na relativní řád lze vypustit.
- Pak platí obecnější vztah

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_0^{n_p} \operatorname{Re} p_{\text{unstable},i} - \frac{\pi}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} sL(s)$$



Příklad: Efekt vodní postele II.

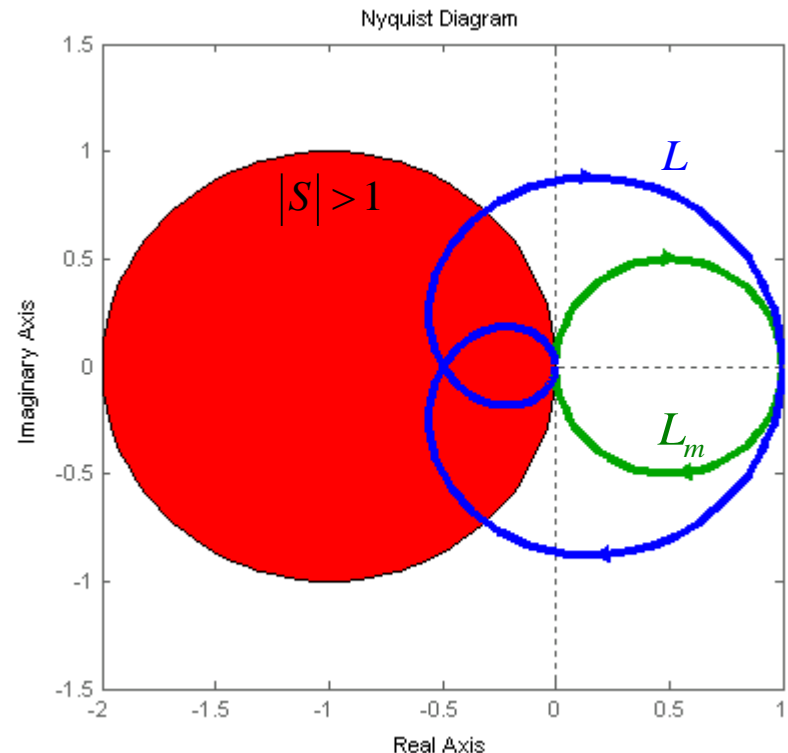
- Porovnejme neminimálně fázový přenos

$$L(j\omega) = \frac{1}{1+s} \frac{1-s}{1+s}$$

- s jeho minimálně fázovým „protějškem“

$$L_m(j\omega) = \frac{1}{1+s}$$

- vidíme, že další fázové zpoždění způsobené nestabilní nulou vytlačí graf do červeného kruhu





Příklad: Efekt vodní postele II.

- Uvažme neminimálně fázovou soustavu $G(s) = \frac{2-s}{2+s}$ a regulátor $\frac{k}{s}$
tj.

$$L(s) = \frac{k}{s} \frac{2-s}{2+s}$$

- Nakreslíme Bodeho diagram citlivosti S pro $k = 0.1, 0.5, 1.0$ a 2.0

- vidíme, že s rostoucím zesílením roste vliv nestabilní nuly a tím i špička citlivosti

- až pro $k = 2$ do nekonečna protože ZV systém přestává být stabilní

