


Příklady k přednášce 15 - Stavové metody



Michael Šebek
Automatické řízení 2018



Příklad: Naivní návrh stavové ZV

- Naivní přístup je schůdný jen pro jednoduché případy, obvykle 2. řádu
- Uvažme soustavu (kyvadlo s frekvencí ω_0) a umístěme dvojnásobný pól do polohy $s = -2\omega_0$ (čímž zdvojnásobíme přirozenou frekvenci a zvýšíme tlumení z 0 na 1). $p(s) = (s + 2\omega_0)^2 = s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2$
- Tedy požadujeme charakteristický polynom výsledného systému 
- Výsledný charakteristický polynom je obecně

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = \det\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2]\right)\right\} = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ k_1 + \omega_0^2 & s + k_2 \end{bmatrix}$$

$$= s^2 + k_2 s + k_1 + \omega_0^2$$

- Porovnáme obecné koeficienty s požadovanými a tím dostaneme koeficienty ZV

$$\begin{array}{l} k_1 + \omega_0^2 = 4\omega_0^2 \\ k_2 = 4\omega_0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} k_1 = 3\omega_0^2 \\ k_2 = 4\omega_0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \end{bmatrix}$$

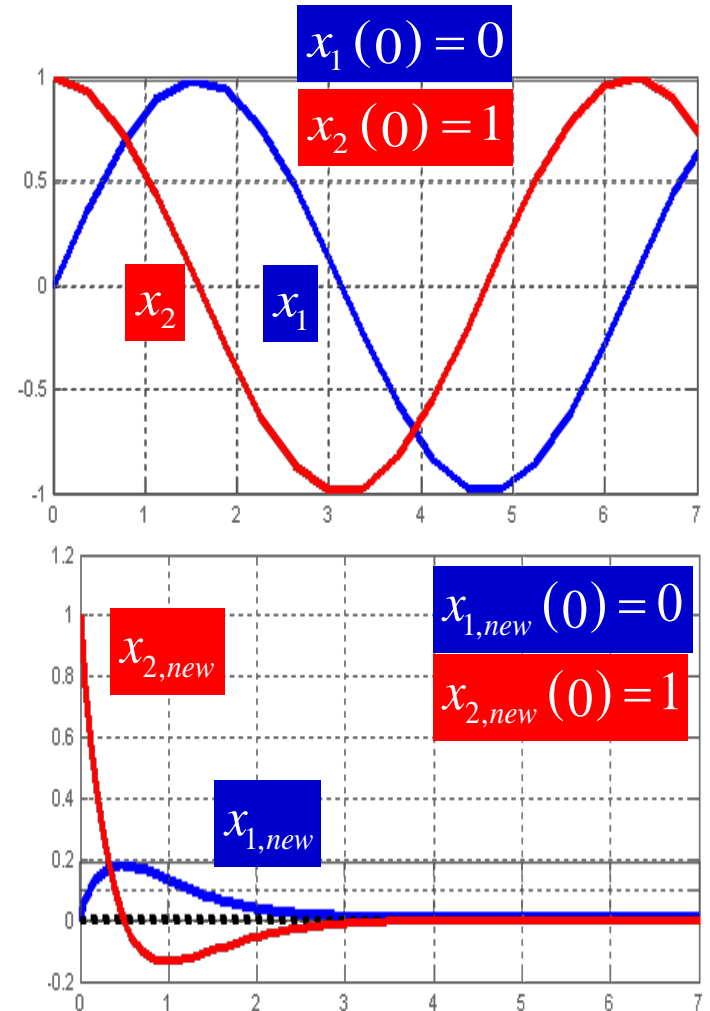


Příklad: Naivní návrh stavové ZV

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- V Matlabu pro $\omega_0 = 1$

```
>> omega0=1; A=[0 1;-omega0^2 0];...  
    B=[0; 1];C=eye(2); D=[0;0]; pend=ss(A,B,C,D)  
A =  
    x1  x2  
x1   0   1  
x2  -1   0  
B =  
    u1  
x1   0  
x2   1  
C =  
    x1  x2  
y1   1   0  
y2   0   1  
D =  
    u1  
y1   0  
y2   0  
  
>> K=[ 3*omega0^2  4*omega0]  
K =   3   4  
>> Anew=A-B*K  
Anew =  
    0   1  
   -4  -4  
>> pend_FB=ss(Anew,B,C,D);  
>> impulse(pend,pend_FB,7)
```





Příklad: Stavové ZV ve zvláštním tvaru

- Dynamika pohybu nohy příšery při natáčení Jurského parku (BiDo 11ed P11.16): Model je v normální tvaru říditelnosti, cíle je přiřadit póly do $s_{1,2} = -2 \pm 2j$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$



- Po zavedení stavové ZV dostaneme stavovou matici CL smyčky

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - k_1 & -k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Která má charakteristický polynom $p_{new}(s) = s^2 + (2 + k_1)s + k_2$
- Jelikož požadovaný charakteristický polynom je

$$p_{CL}(s) = (s + 2 + 2j)(s + 2 - 2j) = s^2 + 4s + 8$$

- dostáváme porovnáním $k_1 = 2, k_2 = 8$

- Zkouška:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Jak najít transformační matic pro převod do kan. tvaru?

Průhledný delší postup - výpočet \mathbf{T} : $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_{\text{con}}, \mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{B}_{\text{con}}, \mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}_{\text{con}}\mathbf{T}^{-1}$

1. Vypočteme matici říditelnosti $\mathcal{C}_x = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$
2. Napíšeme kanonický tvar (vypočteme charakteristický polynom a dosadíme koeficienty do známé struktury matic $\mathbf{A}_{\text{con}}, \mathbf{B}_{\text{con}}$)
3. Vypočteme matici říditelnosti $\mathcal{C}_{\text{con}} = [\mathbf{B}_{\text{con}} \quad \mathbf{A}_{\text{con}}\mathbf{B}_{\text{con}} \quad \dots \quad \mathbf{A}_{\text{con}}^{n-1}\mathbf{B}_{\text{con}}]$ v nových souřadnicích
4. Vypočteme transformační matici $\mathbf{T} = \mathcal{C}_x \mathcal{C}_{\text{con}}^{-1}$

Méně průhledný kratší postup - výpočet \mathbf{T}^{-1} :

1. Jako výše $\mathcal{C}_x = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$
2. Vypočteme poslední řádek matice \mathbf{T}^{-1} jako $\mathbf{t}_n = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]\mathcal{C}_x^{-1}$
3. Vypočteme matici

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_n \mathbf{A}^{n-1} \\ \mathbf{t}_n \mathbf{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n \end{bmatrix}$$

System musí být plně říditelný,
jinak nejde převést



Vysvětlení druhého postupu

- Postup využívá zvláštního tvaru matic \mathbf{A}_{con} , \mathbf{B}_{con}
- Ukážeme to na systému 3. řádu, obecně je to stejné
- Matici \mathbf{T}^{-1} rozepíšeme po řádcích, které označíme takto
- Protože

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\text{con}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}_{\text{con}} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}$$

tak

$$\begin{bmatrix} -a_2/a_3 & -a_1/a_3 & -a_0/a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{t}_2 &= \mathbf{t}_3 \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_1 &= \mathbf{t}_2 \mathbf{A} = \mathbf{t}_3 \mathbf{A}^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{\text{con}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{t}_3 \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{t}_2 \mathbf{B} &= 0 = \mathbf{t}_3 \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \mathbf{t}_1 \mathbf{B} &= 1 = \mathbf{t}_3 \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_3 \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{t}_3 \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix}$$

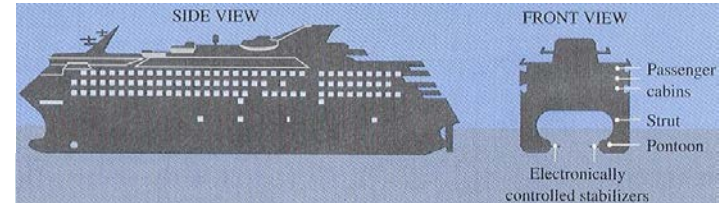
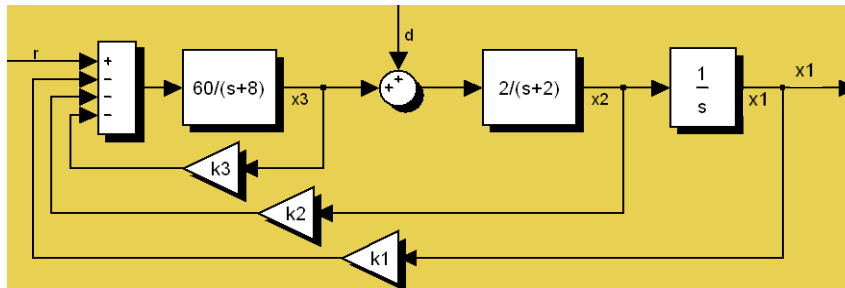
$$\rightarrow \mathbf{t}_3 [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B}] = \mathbf{t}_3 \mathbf{C}_x = [0 \quad 0 \quad 1] \quad \rightarrow \quad \mathbf{t}_3 = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{C}_x^{-1}$$



Příklad: Obecný případ

Zadání: Výletní loď Asia Star

- k redukci kývání do stran (roll)
- používá plováky a stabilizátory a řídicí systém z obrázku



SWATH = Small-Waterplane-Area-Twin-Hull



- Z diagramu plyne stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

- Najděte stavovou ZV, aby výsledný systém měl póly $s_{1,2} = -2 \pm j2, s_3 = -15$



Řešení pomocí zvláštního tvaru

- Zadaná data

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$p_{CL}(s) = (s + 2 + j2)(s + 2 - j2)(s + 15) \\ = s^3 + 19s^2 + 68s + 120$$

- Z toho je char. polynom soustavy

$$a(s) = s^3 + 10s^2 + 16s = s(s + 2)(s + 8)$$

- Matice v kanonickém tvaru říditelnosti můžeme napsat rovnou

$$\mathbf{A}_{con} = \begin{bmatrix} -10 & -16 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{con} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
>> pformat rootc
>> A=[0 1 0;0 -2 2; 0 0 -8],B=[0;0;60]
A =
     0     1     0
     0    -2     2
     0     0    -8
B =
     0
     0
    60
>> a=det(s*eye(3)-A)
a =   s(s+8)(s+2)
>> s1=-2+j*2;s2=s1';s3=-15;
>> pcl=(s-s1)*(s-s2)*(s-s3)
pcl = (s+2+2i)(s+2-2i)(s+15)
```

```
>> Acon=[-a{2},-a{1},-a{0};1,0,0;0,1,0],
Bcon=[1;0;0]
Acon =
    -10    -16     0
     1     0     0
     0     1     0
Bcon =
     1
     0
     0
```




Řešení pomocí zvláštního tvaru

Výpočet transformační matice

1. Pomocí zadané a kanonického tvaru

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 120 \\ 0 & 120 & -1200 \\ 60 & -480 & 3840 \end{bmatrix}$$

$$C_{con} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 84 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 120 \\ 0 & 120 & 0 \\ 60 & 120 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = C_x C_{con}^{-1}$$

2. nebo druhým způsobem, při němž vypočteme nejdříve T a pak teprve kanonický tvar

```
>> CON=[B A*B A*A*B]
CON =
     0     0    120
     0    120  -1200
    60  -480   3840

>> CONcon=[Bcon,Acon*Bcon,Acon*Acon*Bcon]
CONcon =
     1    -10     84
     0     1    -10
     0     0     1

>> T=CON/CONcon
T =
     0     0    120
     0    120     0
    60    120     0
```

```
>> CONT=[B A*B A*A*B];CONTi=inv(CONT);
>> t3=CONTi(3,:);
>> Ti=[t3*A^2;t3*A;t3];T=inv(Ti);
>> Acon=Ti*A*T,Bcon=Ti*B;
```



Příklad: Obecný případ pomocí zvláštního tvaru

- Návrh v kanonické formě

$$\mathbf{K}_{con} = [9 \quad 5 \quad 120]$$

$$\mathbf{A}_{new,con} = \begin{bmatrix} -19 & -68 & -120 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Transformace vektoru zpětné vazby do původních souřadnic

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{con} \mathbf{T}^{-1} = [1 \quad 0.2833 \quad 0.1500]$$

- Zkouška

$$\mathbf{A}_{new} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -60 & -17 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{new}) = (s + 15)(s + 2 + j2)(s + 2 - j2)$$

```
>> Kcon=pc1{2:-1:0}-a{2:-1:0}
Kcon = 9    5   120
>> Anewcon=Acon-Bcon*Kcon
Anewcon =
    19   -68   120
     1     0     0
     0     1     0
eig(Anewcon)
ans =
-15 + 0i
-2 + 2i
-2 - 2i
```

```
>> >> K=Kcon/T
K = 1.0000    0.2833    0.1500
>> Anew=A-B*K
Anew =
     0     1     0
     0    -2     2
    -60   -17   -17
>> eig(Anew)
ans =
-15 + 0i
-2 + 2i
-2 - 2i
```



Příklad: Obecný případ Ackermannovým vzorce

- Výpočet pomocí Ackermannova vzorce

$$\mathbf{K} = [1 \quad 0.2830 \quad 0.1500]$$

- V CSTbx jsou na to funkce **acker** a **place**

```
>> KK=CON\mvalue(pcl,A)
KK =
    16.0000    8.0000    2.0000
    10.0000    3.2667    0.8667
     1.0000    0.2833    0.1500
>> KK=KK(3,:)
KK =
     1.0000    0.2833    0.1500
```

```
>> KKK=acker(A,B,[s1,s2,s3])
KKK =
     1.0000    0.2833    0.1500
>> KKKK=place(A,B,[s1,s2,s3])
KKKK =
     1.0000    0.2833    0.1500
```



Příklad: Tepelný systém

Soustava (Fe5s479)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

$$G(s) = \frac{s - z_0}{(s + 4)(s + 3)}$$

```
>> syms s z0 k1 k2 dzeta omegan
>> A=[-7 1;-12 0],B=[1;-z0],C=[1 0],
    D=0,K=[k1 k2]
>> G=C/(s*eye(2)-A)*B+D;G=factor(G)
G = (s-z0)/(s+4)/(s+3)
```

Analýza

- nula v $s = z_0$
- póly v $s_1 = -3, s_2 = -4,$
- neřiditelný pro $z_0 = -3, -4$

Specifikace návrhu

- umístit póly do
- $$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
- tj. požadovaný CL charakteristický polynom

$$p_{CL} = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

```
>> Cont=[B A*B]
Cont =
[ 1, -7-z0]
[-z0, -12]
>> det(Cont)
ans =
-12-7*z0-z0^2
>> factor(det(Cont))
ans =
-(z0+4)*(z0+3)
```

```
>> pCL=s^2+2*dzeta*omegan*s+omegan^2
pCL =
s^2+2*dzeta*omegan*s+omegan^2
```



Návrh – naivní metodou

- CL charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_{new} &= \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) \\ &= s^2 + (k_1 - z_0 k_2 + 7)s + 12 - k_1 z_0 - k_2(7z_0 + 12) \end{aligned}$$

- porovnáme s požadovaným

$$p_{CL} = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

- dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} k_1 - z_0 k_2 &= 2\zeta\omega_n - 7 \\ -k_1 z_0 - k_2(7z_0 + 12) &= \omega_n^2 - 12 \end{aligned}$$

- a z nich

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{z_0(7 - 2\zeta\omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)} \\ k_1 &= \frac{z_0(14\zeta\omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12(2\zeta\omega_n - 7)}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)} \end{aligned}$$

```
>> pnew=det(s*eye(2)-(A-B*K));pCL=collect(pCL,s)
pnew=s^2+(k1-z0*k2+7)*s+12-z0*k1-7*z0*k2-12*k2
>> roz=collect(pCL-pCL,s)
roz = (k1-z0*k2+7-2*dzeta*omegan)*s
      -12*k2+12-z0*k1-7*z0*k2-omegan^2
```

```
>> KK=solve('k1-z0*k2+7-2*dzeta*omegan',...
            '-12*k2+12-z0*k1-7*z0*k2-omegan^2',k1,k2)
>> [NK1,DK1] = numden(KK.k1)
>> [NK2,DK2] = numden(KK.k2)
>> Nk1=collect(NK1,z0)
>> Nk2=collect(NK2,z0)
>> Dk=factor(DK2)
>> k1=Nk1/Dk
k1=
((-37-omegan^2+14*dzeta*omegan)*z0-84
 +24*dzeta*omegan)/(z0+4)/(z0+3)
>> k2=Nk2/Dk
k2=((7-2*dzeta*omegan)*z0-omegan^2+12)
    /(z0+4)/(z0+3)
```



- Koeficienty stavové ZV jsou

$$k_1 = \frac{z_0(14\zeta\omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12(2\zeta\omega_n - 7)}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)}$$

$$k_2 = \frac{z_0(7 - 2\zeta\omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)}$$

- zřejmě ZV zesílení roste, když se nula z_0 blíží -3 nebo -4, tj.
- když soustava ztrácí říditelnost
- Když se ztrácí říditelnost, řídicí systém má stále těžší práci
- Velikost ZV zesílení také roste, s rostoucím ω_n
- To opět ukazuje, že když chceme posunout póly daleko od původních hodnot, musíme použít velká zesílení



2 příklady: Stavová ZV nemění nuly

- Asia Star

```
>> A=[0 1 0;0 -2 2;0 0 -8];
B=[0;0;60]; C=[1 0 0];
>> G=sdf(A,B,C)
G =
      1.2e+002
-----
      16s + 10s^2 + s^3
>> KKK=place(A,B,[-2+2*j,-2-2*j,-15])
KKK =
      1.0000      0.2833      0.1500
>> Anew=A-B*KKK
Anew =
           0      1.0000           0
           0     -2.0000      2.0000
    -60.0000  -17.0000  -17.0000
>> Gnew=sdf(Anew,B,C)
Gnew =
      1.2e+002
-----
      1.2e+002 + 68s + 19s^2 + s^3
```

- Tepelný systém

```
>> A=[-7 1;-12 0];B=[1;-2];|
C=[1 0]; G=sdf(A,B,C)
G =
      -2 + s
-----
      12 + 7s + s^2
>> p=roots([1 2 4])
p =
    -1.0000 + 1.7321i
    -1.0000 - 1.7321i
>> K=place(A,B,p)
K = -3.8000      0.6000
>> Anew=A-B*K
Anew =
      -3.2000      0.4000
     -19.6000      1.2000
>> Gnew=sdf(Anew,B,C)
Gnew =
      -2 + s
-----
      4 + 2s + s^2
```

- V obou případech se nuly se nezměnily, nevznikly, nezanikly, ale póly ano



Jak toho využít - krácení nul

- Soustava $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = [0 \ 20 \ 100] \mathbf{x}$

s přenosem

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

- Specifikace

$$\%OS = 9.5\%, T_s = 0.74s \rightarrow s_{1,2} = -5.4 \pm j7.2$$

- Třetí pól zvolíme tak, aby vykrátil nulu soustavy

$$s_3 = -5$$

- Návrh $\rightarrow K = [10.8 \ 131 \ 405]$

$$A_{celk} = \begin{bmatrix} -15.8 & -135 & -405 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Výsledný přenos

$$T_{celk}(s) = \frac{20}{s^2 + 10.8s + 81} = \frac{20}{(s + 5.4 + j7.2)(s + 5.4 - j7.2)}$$

- Pokud soustava nemá nuly (a tedy není co krátit), volíme další potřebné CL póly „dostatečně nalevo“

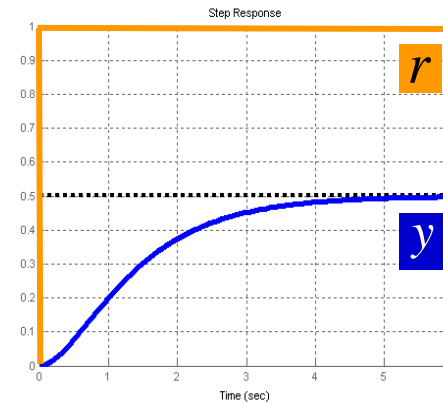


Příklad: ustálená odezva

- Soustava s maticemi $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [1 \ 0]$

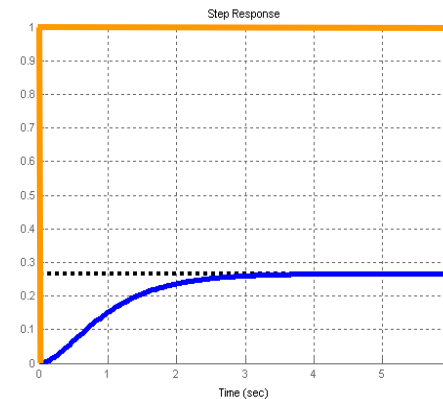
- umístění pólů do -1,-2 $\rightarrow K_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$

```
>> A=[0 1;0 -1];B=[0;1];C=[1 0];J=0;  
>> Ka=place(A,B,[-1,-2])  
K1 = 2.0000    2.0000  
>> G1=sdf(A-B*K1,B,C), step(G1)  
G1 =  
      1  
-----  
2 + 3s + s^2
```



- umístění do -1.5,-2.5 $\rightarrow K_2 = \begin{bmatrix} 3.75 & 3 \end{bmatrix}$

```
>> K2=place(A,B,[-1.5,-2.5])  
K2 = 3.7500    3.0000  
>> G2=sdf(A-B*K2,B,C), step(G2)  
fb =  
      1  
-----  
3.7 + 4s + s^2
```





Příklad: řešení pomocí FF

- Ustálené zesílení můžeme „napravit“ přímovazebním členem

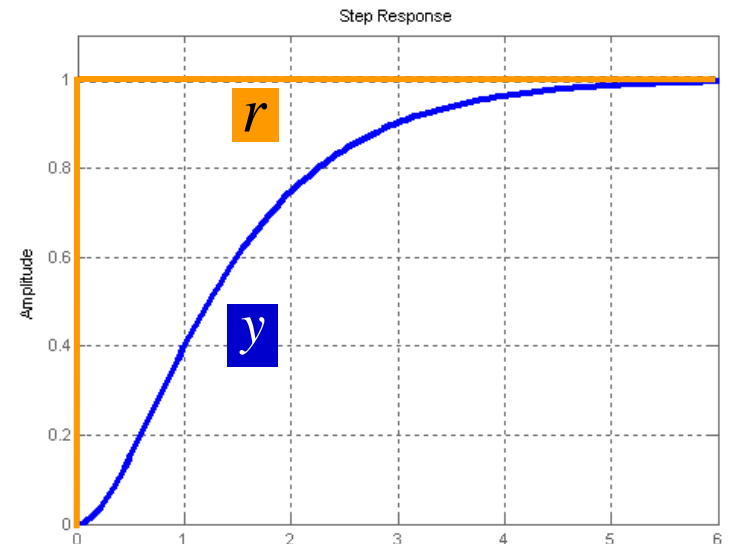
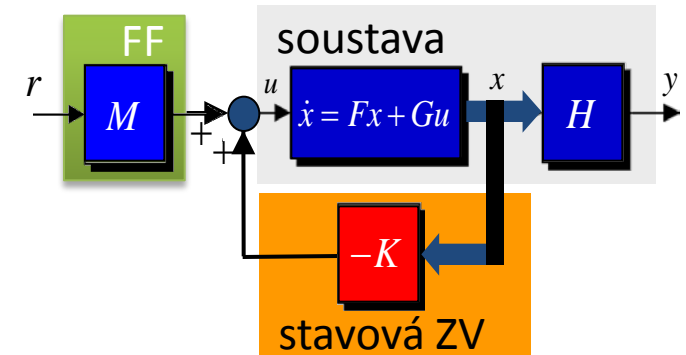
$$G(0) = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}$$

$$M = 1/G(0)$$

$$F(0) = G(0)M = 1$$

- Pokračování příkladu

```
>> G1=rd(f(G1))
G1 = 1 / 2 + 3s + s^2
>> M=1/value(G1,0)
M = 2.0000
>> F1=M*G1
F1 = 2 / 2 + 3s + s^2
>> step(F1)
>> MM=-1/(C/(A-B*K1)*B)
MM = 2.0000
```





Příklad: Integrovní řízení

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Pro soustavu $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$, $y = [0 \ 1] \mathbf{x}$
- Navrhne
nejprve stavovou zpětnou vazbu, aby $OS\% = 10\%, T_s = 0.5 \text{ s}$
- a pak integrovní řízení

Stavová ZV

- Požadavkům odpovídá výsledný charakteristický pol. $s^2 + 16s + 183.1$
- Model je v kanonické formě, takže po zavedení ZV bude char. pol.

$$s^2 + (5 + k_1)s + (3 + k_2)$$

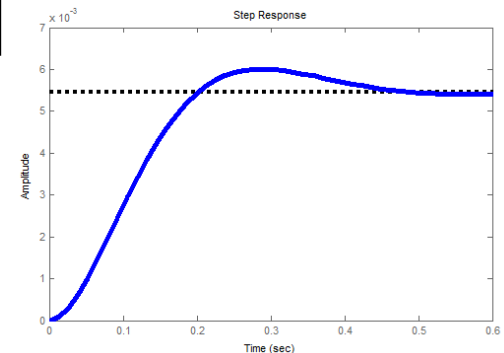
- Porovnáním dostaneme $K = [k_1 \ k_2] = [11 \ 180.1]$
- Po aplikaci ZV

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -16 & -183.1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [0 \ 1] \mathbf{x}$$

- Ale

$$e_{step,ss} = 1 + \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B} = 1 - 0.0055 = 0.9945$$





Integrovaní řízení

- Přidáme integrátor a dostaneme systém 3.řádu
- Protože soustava nemá nuly, tak do požadovaného charakteristického polynomu přidáme jeden pól „hodně vlevo“

$$(s^2 + 16s + 183.1)(s + 100) = s^3 + 116s^2 + 1783.1s + 18310$$

- Výsledný systém má (viz další slajd) charakteristický polynom

$$s^3 + (5 + k_1)s^2 + (3 + k_2)s - K_I$$

- Porovnáním dostaneme

$$k_1 = 111, k_2 = 1780.1, K_I = -18310$$

- Alternativně můžeme postupovat třeba Ackermannovým vzorcem pro velký (celkový) systém

$$\mathbf{K}_{celk} = [\mathbf{K} \quad K_I] = [111 \quad 1780.1 \quad -18310]$$



Soustava je v kanonické formě, řešení je snadné:

- Celkový systém se zpětnými vazbami

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} K_I \\ 1 & 0 \\ -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ &= \begin{bmatrix} -(k_1 + 5) & -(k_2 + 3) & -K_I \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- A jeho charakteristický polynom

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{big}) &= \det \begin{bmatrix} s + (k_1 + 5) & (k_2 + 3) & K_I \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix} \\ &= (s + k_1 + 5)s^2 + (k_2 + 3)s - K_I = s^3 + (5 + k_1)s^2 + (3 + k_2)s - K_I \end{aligned}$$



- Výpočet Ackermannovým vzorcem

```
>> A=[-5 -3;1 0];B=[1;0];C=[0 1]; Abig=[A,zeros(2,1);-C,0],Bbig=[B;0]
```

```
Abig =  
    -5    -3     0  
     1     0     0  
     0    -1     0
```

```
Bbig =  
     1  
     0  
     0
```

```
>> CON=[Bbig,Abig*Bbig,Abig^2*Bbig]
```

```
CON =  
     1    -5    22  
     0     1    -5  
     0     0    -1
```

```
>> p_celk=(s+100)*(s^2+16*s+183.1)
```

```
p_celk = 1.8e+004 + 1.8e+003s + 1.2e+002s^2 + s^3
```

```
>> roots(p_celk)
```

```
ans =  
    -8.0000 +10.9133i  
    -8.0000 -10.9133i  
    -1.0000
```

```
>> Kcelk=[0 0 1]*inv(CON)*mvalue(p_celk,Abig)
```

```
Kcelk = 1.0e+004 *  
     0.0111     0.1780    -1.8310
```

```
>> poles=roots(p_celk)
```

```
poles =  
    1.0e+002 *  
    -1.0000  
    -0.0800 + 0.1091i  
    -0.0800 - 0.1091i
```

```
>> place(Abig,Bbig,poles)
```

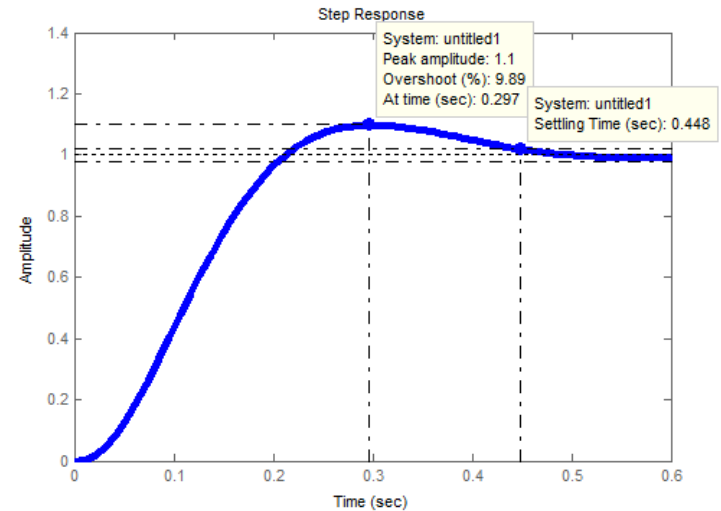
```
ans =  
    1.0e+004 *  
     0.0111     0.1780    -1.8310
```



• Simulace

```
>> Cbig=[C 0],Bref=[0;0;1]
Cbig = 0    1    0
Bref =
    0
    0
    1
>> T=sdf((Abig-Bbig*Kcelk),Bref,Cbig)
          1.8310e+004
-----
1.8310e+004 + 1.7831e+003s + 116.0000s^2 + s^3
>> step(T)

>> Tdc=value(T,0)
Tdc = 1
>> -Cbig*inv(Abig-Bbig*Kcelk)*Bref
ans = 1.0000
>> e_infty=1+Cbig*inv(Abig-Bbig*Kcelk)*Bref
e_infty = 1.1102e-016
```



$$T(s) = \frac{18310}{s^3 + 116s^2 + 1783.1s + 18310}$$

$$e_{step,ss} = 1 + \mathbf{C}_{big} \left(\mathbf{A}_{big} - \mathbf{B}_{big} K_{celk} \right)^{-1} \mathbf{B}_{ref} = 1 - 1 = 0$$