Příklady k přednášce
19 - Polynomiální metody

Michael Šebek

Automatické řízení 2019

16-dub-19

Dělení polynomů: se zbytkem a bez

- Polynomy netvoří těleso (jako reálná čísla, racionální funkce, …),
  ale okruh (jako celá čísla)
- Obecně nelze dělit polynom polynomem beze zbytku.
  Jde to jen jednotkou, což jsou polynomy stupně 0, tedy nenulová reálná čísla

- Ve zvláštních případech beze zbytku dělit jde
  $a|c$ tj. *a* dělí *c* beze zbytku, když existuje *b*, že $c = ab$
  pak říkáme *a* je dělitelem *c*, a *c* je násobkem *a*

- společný dělitel dvou polynomů dělí oba beze zbytku
- největší společný dělitel má ze všech takových nejvyšší stupeň

- Příklad $a(s) = (s+1)(s-1), b(s) = (s+1)(s+2) \to \mathrm{gcd}(a,b) = s+1$
  greatest (left) common divisor

Největší společný dělitel a Bezoutova identita

Pro

$$g(s)=\gcd\left(a(s),b(s)\right)$$

je $\quad a(s)p(s)+b(s)q(s)=g(s)$

$$a(s)v(s)+b(s)w(s)=0$$

a přitom matice

$$\mathbf{U}(s)=\begin{bmatrix} p(s) & q(s) \\ v(s) & w(s) \end{bmatrix}$$

je unimodulární = její determinant je nenulová konstanta

```
>> pformat rootr
>> a=(s+1)^2*(s-1)*(s+2)
a =
 (s+2)(s^2+2s+1)(s-1)
>> b=(s+1)*(s-1)*(s-2)
b =
       (s+1)(s-1)(s-2)
>> g=grd(a,b)
g =
       (s+1)(s-1)
>> [g,U]=grd(a,b)
g =
       (s+1)(s-1)
U =
  0.0833          -0.0833(s+5.0000)
  -0.2294(s-2)     0.2294(s+2)(s+1)
>> U*[a; b]
ans =
       (s+1)(s-1)
          0
```

Dělení se zbytkem

- Euklides z Alexandrie (~ 300 před n.l.)

- zavedl ještě dělení se zbytkem
- Pro dané polynomy $a(s), b(s) \neq 0$
  existují polynomy $q(s), r(s)$ takové, že

$$a = b\boxed{q} + \boxed{r}, \quad \deg r < \deg b$$

podíl

zbytek

- Proto polynomy tvoří tzv. euklidovský okruh

```
>> a=prand(5,'int'),b=prand(3,'int')
a = -8 - 7s + 3s^2 - 2s^3 + 3s^4 + 4s^5
b =  6 + 3s + 6s^2 - 6s^3
>> [q,r] = rdiv(a,b)
q = -1.2 - 1.2s - 0.67s^2
r = -1 + 3.5s + 18s^2
>> a-(b*q+r)
ans = 0
```

Nutná a postačující podmínka řešitelnosti

Věta: Rovnice $a(s)x(s)+b(s)y(s)=c(s)$

má řešení, právě když $\gcd(a,b)\,|\,c$

Diofantos z Alexandrie
řecký matematik
3. století n. l.

Důkaz

Nutnost („jen když“):

Nechť $ax'+by'=c$ a označme $\gcd(a,b)=g,\ a=g\bar{a},\ b=g\bar{b}$

Pak $g(\bar{a}x'+\bar{b}y')=c$ a tudíž $g\,|\,c$

Postačitelnost („když“)

Nechť $(a,b)\,|\,c$ a označme $(a,b)=g,\ c=g\bar{c}$

Pak vždy existuje $p,\ q$ takové, že $ap+bq=g$

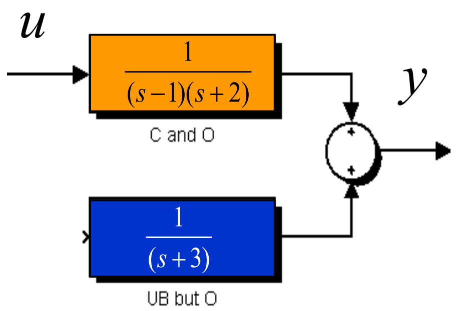
Vynásobením $\bar{c}$ dostaneme $a(p\bar{c})+b(q\bar{c})=c$

```
a=(s+1)^2*(s-1); b=(s+1)*(s-2); c=(s+1)*(s+2); cc=(s-1)*(s+2);g=gld(a,b) -> g=1+s
pol(c/g) -> ans = (s+2.0000)
x,y]=axbyc(a,b,c) -> x =  1.3333,  y = -1.3333(s+1.2500), a*x+b*y-c -> ans=0
pol(cc/g)
??? Error using ==> frac.pol   Argument is not convertible to polynomial.
[x,y]=axbyc(a,b,cc)-> x = NaN, y = NaN
```

Příklad: interpretace podmínky řešitelnosti

- přenos bez skrytých módu (bez krácení)

$$y(s)=\frac{1}{(s-1)(s+2)}\frac{(s+3)}{(s+3)}u(s)$$



$$y(s)=\frac{b(s)}{a(s)}u(s) \qquad \begin{aligned} a(s)&=(s-1)(s+2)(s+3)\\ b(s)&=(s+3)\end{aligned}$$

- charakteristický polynom je

$$a(s)x(s)+b(s)y(s)=(s-1)(s+2)(s+3)x(s)+(s+3)y(s)=(s+3)d(s)$$

- tedy žádný ZV regulátor nezmění neřiditelnou část

Obecné řešení

Věta: Obecné řešení

- Obecné řešení rovnice má tvar $\boxed{\begin{aligned} x &= x' - \bar{b}t \\ y &= y' + \bar{a}t \end{aligned}}$ kde t je libovolný polynomiální parametr

Důkaz:

1) Je to řešení pro každé *t*: Prostě ho dosadíme do rovnice

$$ax + by = ax' - a\bar{b}t + by' + b\bar{a}t = ax' + by' + \left(b\bar{a} - a\bar{b}\right)t = c$$

2) Neexistuje žádné jiné řešení:

- pro libovolná řešení x, y a x', y' platí $ax + by = c, \quad ax' + by' = c$
- Odečtením a vydělením případným $g = \gcd(a, b)$ dostaneme $\bar{a}(x - x') + \bar{b}(y - y') = 0$ a z toho $\bar{a}(x - x') = -(y - y')\bar{b}$
- Jelikož polynomy $\bar{a}, \bar{b}$ jsou nesoudělné, musí být $\bar{a} \mid y - y'$ a tak pro nějaký polynom *t* platí $y - y' = \bar{a}t$
- Když to dosadíme, dostaneme $\bar{a}(x - x') = -\bar{a}t\bar{b}$
- Vydělením $\bar{a}$ dostaneme $x - x' = -\bar{b}t$ a z toho $x = x' - \bar{b}t$
- Když t probíhá množinu všech polynomů, dostáváme všechna řešení

Příklad: Obecné řešení

- Nějaké řešení

```
a=(s+1)^2*(s-1)
a = -1 - s + s^2 + s^3
>> b=(s+1)*(s-2)
b = -2 - s + s^2
>> c=(s+1)*(s+2)
c =  2 + 3s + s^2
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)
x =  1.3333
y = -1.7 - 1.3s
>> [x,y,v,w]=axbyc(a,b,c)
x =  1.3333
y = -1.7 - 1.3s
v =  0.76 - 0.38s
w = -0.38 + 0.38s^2
```

- Jiné řešení

```
>> t=1-s
t = 1 - s
>> xnew=x+v*t,ynew=y+w*t
xnew =
   2.1 - 1.1s + 0.38s^2
ynew =
  -2 - 0.96s + 0.38s^2 - 0.38s^3
>> a*xnew+b*ynew-c
ans =
     0
```

$$x_{new}(s) = x'(s) + r(s)t(s)$$
$$y_{new}(s) = y'(s) + v(s)t(s)$$

$$r(s) = -\bar{b}(s)$$
$$v(s) = \bar{a}(s)$$

$$x(s) = x'(s) - \bar{b}(s)t(s)$$
$$y(s) = y'(s) + \bar{a}(s)t(s)$$

Řešení minimálního stupně

- Vezmeme obecné řešení

$$x = x' - \bar{b}t$$
$$y = y' + \bar{a}t$$

  a algoritmem dělení redukujeme x' modulo $\bar{b}$:

$$x' = \bar{b}q + r$$
$$\deg r < \deg \bar{b}$$

- Pak je

$$x = r - \bar{b}(t - q)$$
$$y = y' + \bar{a}t$$

- Volbou $t = q$ dostaneme řešení x, y minimálního stupně v x

$$x = r \qquad \deg x < \deg \bar{b}$$
$$y = y' + \bar{a}q$$

- Podobně bychom dokázali existenci a unicitu řešení minimálního stupně v y

- Tato dvě řešení jsou obecně různá

Příklad: řešení minimálního stupně

- Data

```
>> a=prand(3),b=prand(2),c=prand(5)
a = 0.62 - s + 1.5s^2 + 0.43s^3
b = 0.47 + 1.3s + 0.64s^2
c = 1.3 - 0.91s - 2.3s^2 + 1.8s^3 + 0.39s^4 + 0.02s^5
>> [x,y,b_bar,a_bar]=axbyc(a,b,c); b_bar,a_bar
b_bar = -0.19 - 0.51s - 0.25s^2
a_bar =  0.25 - 0.42s + 0.61s^2 + 0.17s^3
```

- Řešení min. stupně y

```
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)
x = 1.9 + 2.4s + 0.047s^2
y = 0.34 - 1.9s - 1.1s^2
>> [x,y]=axbyc(a,b,c,'miny')
x = 1.9 + 2.4s + 0.047s^2
y = 0.34 - 1.9s - 1.1s^2
```

- Řešení min. stupně x

```
>> [x,y]=axbyc(a,b,c,'minx')
x = 1.8 + 2.3s
y = 0.38 - 2s - s^2 + 0.032s^3
```

Koincidence

- Důležitý zvláštní případ nastane, když $\deg c < \deg a + \deg b$
  Vysvětlení (předpokládáme nesoudělná a, b)

$$ax + by = c \;\mapsto\; \boxed{\frac{x}{b}} + \boxed{\frac{y}{a}} = \frac{c}{ab}$$

striktně ryzí, když platí

striktně ryzí, když řeš. min $\deg x$

striktně ryzí, když řeš. min $\deg y$

  - Pravá strana striktně ryzí ➡ buď oba zlomky na levé straně jsou striktně ryzí nebo žádný
  - Pravá strana není striktně ryzí ➡ vždy pouze jeden zlomek na levé může být striktně ryzí
- když $\deg c < \deg a + \deg b$, pak obě řešení minimálních stupňů koincidují a existuje jediné řešení minimálního stupně (které je minimální v obou neznámých současně)
- když $\deg c \geq \deg a + \deg b$, pak skutečně existují dvě různá řešení minimálního stupně (jedno v x a druhé v y)

Příklad: koincidence

Ano

- Obě jsou stejná!
- Tedy existuje jediné řešení minimálního stupně (v obou současně)

```
>> a=prand(3),b=prand(2),c1=1, c2=prand(6)
a = -1.5 + 0.22s - 1.4s^2 - 0.84s^3
b =  0.76 + 0.38s - 1.3s^2
c1 = 1
>> [x,y]=axbyc(a,b,c1,'minx')
x = -0.43 + 0.11s
y =  0.45 + 0.13s - 0.071s^2
>> [x,y]=axbyc(a,b,c1,'miny')
x = -0.43 + 0.11s
y =  0.45 + 0.13s - 0.071s^2
```

Ne

- Jsou různá

```
>> c2=prand(6)
c2 = -0.71+0.51s-0.42s^2+0.23s^3
               -0.96s^4-0.15s^5+0.74s^6
>> [x,y]=axbyc(a,b,c2,'minx')
x = 0.49 - 0.28s
y = 0.064 - 0.064s + 0.56s^2
               - 0.046s^3 - 0.55s^4
>> [x,y]=axbyc(a,b,c2,'miny')
x = -0.28 - 0.16s + 1.6s^2 - 0.89s^3
y = -1.5 + 1.2s - 0.99s^2
```

Elementární operace na polynomiální matici

- Řádkové operace - 3 základní
  - násobení řádku nenulovou konstantou
  - výměna dvou řádků
  - přičtení řádku násobeného polynomem k jinému řádku

$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ 2 & s^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1. řádek ×3}} \begin{bmatrix} 3 & 3s \\ 2 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ 2 & s^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{výměna řádků}} \begin{bmatrix} 2 & s^2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ 2 & s^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1. řádek + s× 2.řád.}} \begin{bmatrix} 1+2s & s+s^3 \\ 2 & s^2 \end{bmatrix}$$

- Sloupcové operace jsou duální
- Elementární operace zachovávají až na násobení konstantou determinant
- odpovídají násobení unimodulární maticí
  (tj. maticí s konstantním nenulovým determinantem)

Postup řešení polynomiálními redukcemi

Řešení rovnice polynomiálními redukcemi

Krok 1 Utvoř složenou matici

$$\begin{bmatrix} a(s) & 1 & 0 \\ b(s) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 2 Redukuj ji elementárními řádkovými operacemi na tvar

$$\begin{bmatrix} g(s) & p(s) & q(s) \\ 0 & v(s) & w(s) \end{bmatrix}$$

Pak je $p(s)a(s)+q(s)b(s)=g(s)$ kde $\gcd\big(a(s),b(s)\big)=g(s)$

$v(s)a(s)+w(s)b(s)=0$ $\gcd\big(v(s),w(s)\big)=1$

Krok 3 Extrahuj $g(s)$ z $c(s)$ a dostaň $c(s)=\overline{c}(s)g(s)$

Když to nejde, rovnice nemá řešení !

Postup řešení polynomiálními redukcemi

Výsledek: jako řešení vezmi

$$x(s) = \bar{c}(s)p(s)$$
$$y(s) = \bar{c}(s)q(s)$$

Navíc, všechna řešení jsou vyjádřena takto

$$x(s) = \bar{c}(s)p(s) + v(s)t(s)$$
$$y(s) = \bar{c}(s)q(s) + w(s)t(s)$$

volný polynomiální parametr

Postup výpočtu plyne z rovnosti

$$\begin{bmatrix} p & q \\ v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & p & q \\ 0 & v & w \end{bmatrix}$$

Příklad: Řešení rovnice redukcemi

$$\left(s+1\right)x(s)+\left(s-1\right)y(s)=s$$

Krok 1 a 2

$$\left[\begin{array}{c:cc} s+1 & 1 & 0 \\ s-1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c:cc} s+1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c:cc} 1 & ½ & -½ \\ s+1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c:cc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1-s}{2} & \frac{1+s}{2} \end{array}\right]$$

Krok 3

$$g(s)=1 \Rightarrow \overline{c}(s)=s$$

Krok 4

$$x(s)=\frac{s}{2} \qquad x(s)=\frac{s}{2}+\frac{1-s}{2}t(s)$$

$$y(s)=-\frac{s}{2} \qquad y(s)=-\frac{s}{2}+\frac{1+s}{2}t(s)$$

Postup řešení Sylvestrovou maticí

Ukážeme na příkladu 2. stupně, kdy je dáno

$$a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2$$
$$b(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2$$
$$c(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2$$

a hledáme $x(s) = x_0 + x_1 s,\ \ y(s) = y_0 + y_1 s$

Krok1: Dosadíme polynomy s neurčitými koeficienty do rovnice,

$$\left(a_0 + a_1 s + a_2 s^2\right)\left(x_0 + x_1 s\right) + \left(b_0 + b_1 s + b_2 s^2\right)\left(y_0 + y_1 s\right) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2$$

porovnáme koeficienty u stejných mocnin,

$$\begin{aligned} a_0 x_0 + b_0 y_0 &= c_0 \\ a_1 x_0 + b_1 y_0 + a_0 x_1 + b_0 y_1 &= c_1 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + a_1 x_1 + b_1 y_1 &= c_2 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 &= 0 \end{aligned}$$

nebo maticově

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vyřešíme tuto maticovou rovnici, čímž dostaneme x_0, y_0, x_1, y_1 a z nich sestavíme hledané $x(s) = x_0 + x_1 s,\ \ y(s) = y_0 + y_1 s$

Příklad: Řešení Sylvestrovou maticí

$$(s+1)\,x(s)+(s-1)\,y(s)=s \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a(s)&=1+s \\ b(s)&=-1+s \\ c(s)&=s \end{aligned} \quad + \quad \begin{aligned} x(s)&=x_0 \\ y(s)&=y_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x(s)=\frac{1}{2},\, y(s)=\frac{1}{2}$$

- Dostali jsme řešení minimálního stupně (v obou neznámých), které je jiné než partikulární řešení získané dříve

- To z minulého příkladu dostaneme z obecného řešení volbou $t(s)=1$

$$x(s)=\frac{s}{2}+\frac{1-s}{2}t(s)$$

$$y(s)=-\frac{s}{2}+\frac{1+s}{2}t(s)$$

Pozor na špatný odhad

- Pro rovnici

$$a = 1 + s^2, b = (1+s)^2 = 1 + 2s + s^2, c = 1 + 2s + 2s^2$$

hledáme i tady řešení stupňů 0 (s vědomím, že to asi je špatný odhad)

- a tak řešíme maticovou rovnice

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

která ale nemá žádné řešení.

- Přesto polynomiální rovnice řešení má, ale vyšších stupňů, např.

$$x = -0.5s, y = 1 + 0.5s$$

- Toto je typický případ

```
>> a=1+s^2,b=(1+s)^2,c=a+b-1
a =  1 + s^2
b =  1 + 2s + s^2
c =  1 + 2s + 2s^2
>> S=sylv([a;b],0),C=c{0:2}
S =  1     0     1
     1     2     1
C =  1     2     2
>> XY=C/S
XY = 0.5000    1.0000
>> XY*S==C
ans = 0     0     0
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)
x =  -0.5s
y =   1 + 0.5s
```

Příklad: přiřazení pólů

Soustava – motor
přenos vstupního napětí

- Dříve navržený PI regulátor dává nulovou odchylku na skok ale ne dobrou dynamiku

- tak zkusme lepší *c*

```
b =  0.0670
a =  0.017 + 0.0079s + 0.0011s^2
p = s
q = 15 + 3s
c1 = a*p + b*q
c1 = 1 + 0.22s + 0.0079s^2 + 0.0011s^3
>> roots(c1)
ans =
  -1.1476 +13.6253i
  -1.1476 -13.6253i
  -4.8866 + 0.0000i


>> c2=(s+5)*(s+1+j)*(s+1-j)
c2 =
     10 + 12s + 7s^2 + s^3
```

pokračování

- řešením je obecný regulátor 1. řádu
- zajistí dobrou dynamiku, ale nemá integrační charakter a tedy nezajistí nulovou odchylku
- zkusme tam tedy dát integrátor natvrdo (při řešení rovnice z něj uděláme část soustavy)
- dostaneme regulátor s dobrou dynamikou a nulovou odchylkou
- ale je PID, což se dalo čekat

```
>> [x1,y1]=axbyc(a,b,c2)
x = -1.7e+02 + 9.1e+02s
y =  1.9e+02 - 32s
```

```
>> [x2,y2]=axbyc(a*s,b,c2)
x2 = 909.0909
y2 = 1.5e+02 - 52s - 2.7s^2
>> p2 = x2*s, q2 =y2
p2 = 9.1e+02s
q2 = 1.5e+02 - 52s - 2.7s^2
```

Poučení:

- máme dobrou kontrolu nad dynamikou (vhodným výběrem CL pólů)
- dokážeme zajistit i další požadavky
- ale nemáme kontrolu nad řádem regulátoru – ten prostě vyjde

Příklad: Ryzost regulátoru

- Pokud nemá pravá strana rovnice dostatečně vysoký stupeň
- ryzí regulátor existuje jen náhodou (není to generický případ)

```
>> a=(s-1)^2,b=s,c=(s+1)^2
a = 1 - 2s + s^2
b = s
c = 1 + 2s + s^2
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)
x =  1.0000
y =  4.0000
```

Jiný příklad:

- ryzí regulátor neexistuje, to je generický případ

```
>> c=prand(2,'sta')
c = 0.86 + 2.6s + s^2
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)
x = 0.8573
y = 4.4 + 0.14s
```

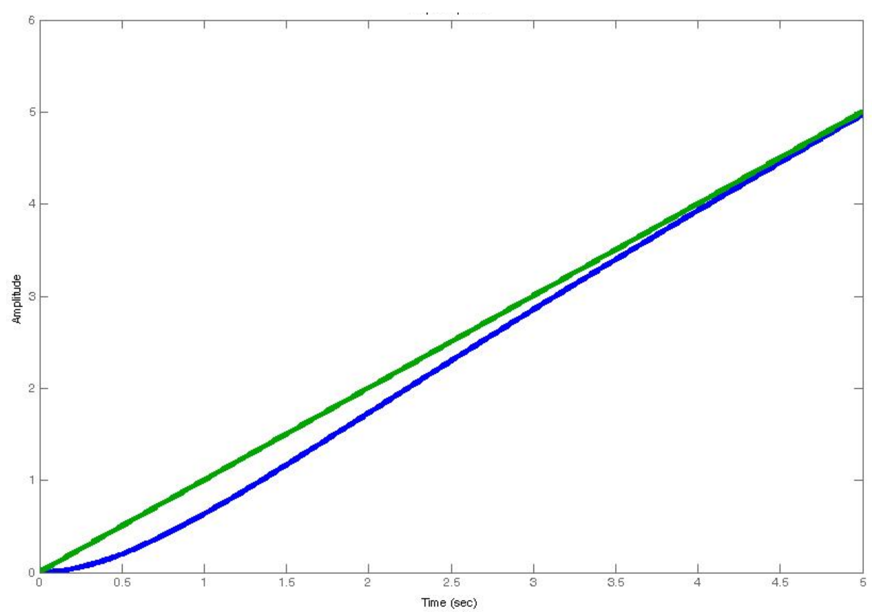
Příklad: Sledování 2DOF

$$a(s)=\left(1+s\right)\left(1-s\right)$$
$$b(s)=2+s$$
$$f(s)=f^{-}(s)=s^{2}$$
$$m(s)=\left(2+s\right)\left(1+s\right)^{2}$$

```
>> a=(1+s)*(1-s), b=2+s, f=s^2,
m=(2+s)*(s+1)^2
>> [p,q]=axbyc(a,b,m,'miny')
p = -2 - s, q =  2 + 2s
>> [t,r]=axbyc(f,b,m,'miny'); r
r =  1 + 2s
>> T=coprime(b*r/(a*p+b*q))
T = 0.3 + 0.6s / 0.3 + 0.6s + 0.3s^2
>> step(tf(T/s),tf(1/s),5)
```

$$a(s)p(s)+b(s)q(s)=m(s)$$
$$f^{-}(s)t(s)+b(s)r(s)=m(s)$$

$$p(s)=-2-s$$
$$q(s)=2+2s$$
$$r(s)=1+2s$$



Fyzikální interpretace a srovnání s 1DOF

Podmínky řešitelnosti mají hezkou interpretaci:

- Stabilita $\gcd(a,b)$ znamená stabilizovatelnost soustavy
- $\gcd(f^-,b)=1$ je obecná podmínka pro sledování, souvis. s definicí nul: nemůže projít žádný (zde nestabilní) mód, který se rovná jejím nulám
- $f^- \mid a$ je také přirozená: soustava „poháněná“ vstupem konvergujícím k nule asymptoticky sleduje jen takový nestabilní signál, který je schopna sama o sobě vygenerovat. Pokud to není splněno, systém může sledovat, jen když vzdáme požadavek stabilního vstupu

Srovnání dvou a jednoho stupně volnosti

- zvláštní případ $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}$ snadno odlišíme. Rovnice $ap+bq=m$, $f^-t+br=m$ mají řešení s $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}$ právě když $ap=f^-t$
- takže klasická struktura vyžaduje, aby nestabilní módy reference byly v soustavě nebo regulátoru, i v případě, že vstup může být nestabilní.

Odvození - Přizpůsobení soustavy modelu

$$y = \frac{b(s)}{a(s)}u \quad + \quad u = -\frac{q(s)}{p(s)}y + \frac{r(s)}{p(s)}u_{new} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b(s)r(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)}u_{new} \quad = \quad y = \frac{g(s)}{f(s)}u_{new}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b(s)r(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)} = \frac{g(s)}{f(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{b}(s)r(s)}{a(s)p(s)+b(s)q(s)} = \frac{\bar{g}(s)}{f(s)} \quad \Rightarrow$$

$$a(s)p(s)+b(s)q(s) = f(s)\bar{b}(s)t(s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{b}(s)r(s)}{f(s)\bar{b}(s)t(s)} = \frac{\bar{g}(s)}{f(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{r(s)}{t(s)} = \frac{\bar{g}(s)}{1} \quad \Rightarrow \quad r(s) = \bar{g}(s)t(s)$$

Řešitelné: Vždy. Ale pokud chceme stabilní řešení, pak musí být splněny

Podmínky stability:

- $f(s)$ stabilní (samozřejmé) a vezmeme $t(s)$ stab. , musí být $\gcd(a,b)$ stab.
- $\bar{b}(s)$ stabilní: to znamená, že nestabilní nuly nemůžeme změnit !

Příklad: Model matching

- Soustava $\dfrac{b(s)}{a(s)}=\dfrac{(s+1)(s-1)}{(s+2)(s-2)}$ a požadovaný přenos $\dfrac{g(s)}{f(s)}=\dfrac{s-1}{(s+2)^2}$
- Nesoudělné faktory $\dfrac{b(s)}{g(s)}=\dfrac{(s+1)(s-1)}{(s-1)}=\dfrac{(s+1)}{1}=\dfrac{\bar{b}(s)}{\bar{g}(s)}$
- Volíme $t(s)=1$ a řešíme rovnici

$$(s+2)(s-2)p(s)+(s+1)(s-1)q(s)=(s+2)^2(s+1)$$

- Řešení $p(s)=-3(s+1),q(s)=2(s+2)$. Feedforward je $r(s)=1$
- Tedy vychází regulátor $u=\dfrac{2(s+2)}{3(s+1)}y+\dfrac{1}{3(s+1)}u_{new}$
- Zkouška

$$\frac{(s+1)(s-1)}{-3(s+2)(s-2)(s+1)+2(s+1)(s-1)(s+2)}=\frac{(s+1)(s-1)}{(s+2)^2(s+1)}=\frac{(s-1)}{(s+2)^2}$$