

# Příklady k přednášce 19 - Polynomiální metody



Michael Šebek  
Automatické řízení 2016



# Dělení polynomů: se zbytkem a bez

- Polynomy netvoří **těleso** (jako reálná čísla, racionální funkce, ...) ale **okruh** (jako celá čísla)
- Obecně nelze dělit polynom polynomem beze zbytku. Jde to jen **jednotkou**, což jsou tu polynomy stupně 0, tedy nenulová reálná čísla
- Ve zvláštních případech beze zbytku dělit jde  
 $a|c$  tj.  $a$  dělí  $c$  beze zbytku, když existuje  $b$ , že  $c = ab$   
pak říkáme  $a(s)$  je dělitelem  $c(s)$ , a že  $c(s)$  je násobkem  $a(s)$
- **společný dělitel** dvou polynomů dělí oba beze zbytku
- **největší společný dělitel** má ze všech takových nejvyšší stupeň
- Příklad  $a(s) = (s + 1)(s - 1), b(s) = (s + 1)(s + 2) \rightarrow \gcd(a, b) = s + 1$   
greatest (left) common divisor



# Největší společný dělitel a Bezoutova identita

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Pro

$$g(s) = \gcd(a(s), b(s))$$

$$\text{je } a(s)p(s) + b(s)q(s) = g(s)$$

$$a(s)v(s) + b(s)w(s) = 0$$

a přitom matice

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} p(s) & q(s) \\ v(s) & w(s) \end{bmatrix}$$

je unimodulární  
(determinant je nenulová  
konstanta)

```
>> pformat rootr
>> a=(s+1)^2*(s-1)*(s+2)
a =
      (s+2)(s^2+2s+1)(s-1)
>> b=(s+1)*(s-1)*(s-2)
b =
      (s+1)(s-1)(s-2)
>> g=grd(a,b)
g =
      (s+1)(s-1)
>> [g,U]=grd(a,b)
g =
      (s+1)(s-1)
U =
      0.0833          -0.0833(s+5.0000)
      -0.2294(s-2)   0.2294(s+2)(s+1)
>> U*[a; b]
ans =
      (s+1)(s-1)
      0
```



- Euklides z Alexandrie ( ~ 300 před n.l. )
- zavedl ještě dělení se zbytkem
- Pro dané polynomy  $a(s)$ ,  $b(s) \neq 0$  existují polynomy  $q(s)$ ,  $r(s)$  takové, že

$$a = bq + r, \quad \deg r < \deg b$$

podíl

zbytek



- Proto polynomy tvoří tzv. euklidovský okruh

```
>> a=rand(5,'int'),b=rand(3,'int')
a = -8 - 7s + 3s^2 - 2s^3 + 3s^4 + 4s^5
b = 6 + 3s + 6s^2 - 6s^3
>> [q,r] = rdiv(a,b)
q = -1.2 - 1.2s - 0.67s^2
r = -1 + 3.5s + 18s^2
>> a-(b*q+r)
ans = 0
```



# Nutná a postačující podmínka řešitelnosti

**Věta:** Rovnice  $a(s)x(s) + b(s)y(s) = c(s)$

má řešení, právě když  $\gcd(a, b) \mid c$

Diofantos z Alexandrie  
řecký matematik  
3. století n. l.

## Důkaz

**Nutnost** („jen když“):

Nechť  $ax' + by' = c$  a označme  $\gcd(a, b) = g$ ,  $a = g\bar{a}$ ,  $b = g\bar{b}$

Pak  $g(\bar{a}x' + \bar{b}y') = c$  a tudíž  $g \mid c$

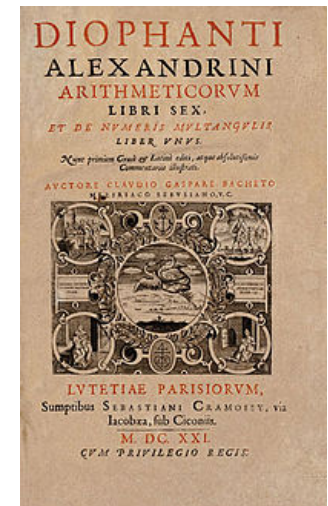
**Postačitelnost** („když“)

Nechť  $(a, b) \mid c$  a označme  $(a, b) = g$ ,  $c = g\bar{c}$

Pak vždy existuje  $p, q$  takové, že  $ap + bq = g$

Vynásobením  $\bar{c}$  dostaneme  $a(p\bar{c}) + b(q\bar{c}) = c$

a tím jsme zkonstruovali řešení  $x = p\bar{c}$ ,  $y = q\bar{c}$





```
>> c=(s+1)*(s+2);
>> a=(s+1)^2*(s-1); b=(s+1)*(s-2);
>> g=gld(a,b)
g = (s+1)
>> pol(c/g)
ans = (s+2.0000)
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)
x = 1.3333
y = -1.3333(s+1.2500)
>> a*x+b*y-c
ans = 0
```

```
>> c=(s-1)*(s+2)
c = (s+2)(s-1)
>> c/g
ans = (s+2)(s-1)/(s+1)
>> pol(c/g)
??? Error using ==> frac.pol
Argument is not convertible
to polynomial.
```



# Příklad: interpretace podmínky řešitelnosti

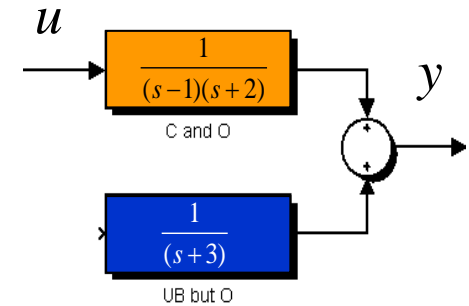
- přenos bez skrytých módu (bez krácení)

$$y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \frac{(s+3)}{(s+3)} u(s)$$

$$y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} u(s)$$

$$a(s) = (s-1)(s+2)(s+3)$$

$$b(s) = (s+3)$$



- charakteristický polynom je

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = (s-1)(s+2)(s+3)x(s) + (s+3)y(s) = (s+3)d(s)$$

- tedy žádný ZV regulátor nezmění neřiditelnou část



## Věta: Obecné řešení

- Obecné řešení rovnice má tvar

$$\begin{cases} x = x' - \bar{b}t \\ y = y' + \bar{a}t \end{cases}$$

kde  $t$  je libovolný polynomiální parametr

Důkaz:

1) Je to řešení pro každé  $t$ : Prostě ho dosadíme do rovnice

$$ax + by = ax' - \bar{a}\bar{b}t + by' + b\bar{a}t = ax' + by' + (b\bar{a} - \bar{a}\bar{b})t = c$$

2) Neexistuje žádné jiné řešení:

- pro libovolná řešení  $x, y$  a  $x', y'$  platí  $ax + by = c$ ,  $ax' + by' = c$
- Odečtením  $a(x - x') + b(y - y') = 0$  a z toho  $-a(x - x') = (y - y')b$
- Přitom polynomy  $\bar{a}, \bar{b}$  definované dříve jsou nesoudělné a platí  $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{b}$
- Tudíž  $\bar{b} \mid x - x'$ , takže pro nějaký polynom  $t$  platí  $x - x' = -\bar{b}t$   
 $\bar{a} \mid y - y'$   $y - y' = \bar{a}t$
- Libovolné řešení získáme tak, že necháme  $t$  probíhat množinu všech reálných polynomů





- Nějaké řešení

```

a=(s+1)^2*(s-1)
a = -1 - s + s^2 + s^3
>> b=(s+1)*(s-2)
b = -2 - s + s^2
>> c=(s+1)*(s+2)
c = 2 + 3s + s^2
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)
x = 1.3333
y = -1.7 - 1.3s
>> [x,y,v,w]=axbyc(a,b,c)
x = 1.3333
y = -1.7 - 1.3s
v = 0.76 - 0.38s
w = -0.38 + 0.38s^2

```

- Jiné řešení

```

>> t=1-s
t = 1 - s
>> xnew=x+v*t,ynew=y+w*t
xnew =
    2.1 - 1.1s + 0.38s^2
ynew =
    -2 - 0.96s + 0.38s^2 - 0.38s^3
>> a*xnew+b*ynew-c
ans =
    0

```

$$x_{new}(s) = x'(s) + r(s)t(s)$$

$$y_{new}(s) = y'(s) + v(s)t(s)$$

$$r(s) = -\bar{b}(s)$$

$$v(s) = \bar{a}(s)$$

$$x(s) = x'(s) - \bar{b}(s)t(s)$$

$$y(s) = y'(s) + \bar{a}(s)t(s)$$



- Vezmeme obecné řešení

$$\begin{aligned}x &= x' - \bar{b}t \\ y &= y' + \bar{a}t\end{aligned}$$

a algoritmem dělení redukuje  $x'$  modulo  $\bar{b}$  :  $x' = \bar{b}q + r$   
 $\deg r < \deg \bar{b}$

- Pak je

$$\begin{aligned}x &= r - \bar{b}(t - q) \\ y &= y' + \bar{a}t\end{aligned}$$

- Volbou  $t = q$  dostaneme řešení  $x, y$  minimálního stupně v  $x$

$$\begin{aligned}x &= r \\ y &= y' + \bar{a}q\end{aligned} \quad \deg x < \deg \bar{b}$$

- Podobně bychom dokázali existenci a unicitu řešení minimálního stupně v  $y$
- Tato dvě řešení jsou obecně různá



# Příklad: řešení minimálního stupně

- Data

```
>> a=prand(3),b=prand(2),c=prand(5)
a = 0.62 - s + 1.5s^2 + 0.43s^3
b = 0.47 + 1.3s + 0.64s^2
c = 1.3 - 0.91s - 2.3s^2 + 1.8s^3 + 0.39s^4 + 0.02s^5
>> [x,y,b_bar,a_bar]=axbyc(a,b,c); b_bar,a_bar
b_bar = -0.19 - 0.51s - 0.25s^2
a_bar = 0.25 - 0.42s + 0.61s^2 + 0.17s^3
```

- Řešení  
min.  
stupně y

```
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)
x = 1.9 + 2.4s + 0.047s^2
y = 0.34 - 1.9s - 1.1s^2
>> [x,y]=axbyc(a,b,c,'miny')
x = 1.9 + 2.4s + 0.047s^2
y = 0.34 - 1.9s - 1.1s^2
```

- Řešení  
min.  
stupně x

```
>> [x,y]=axbyc(a,b,c,'minx')
x = 1.8 + 2.3s
y = 0.38 - 2s - s^2 + 0.032s^3
```



- Důležitý zvláštní případ nastane, když  $\deg c < \deg a + \deg b$   
Vysvětlení (předpokládáme nesoudělná  $a, b$ )

$$ax + by = c \mapsto \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{c}{ab}$$

striktně ryzí, když platí

striktně ryzí, když řeš. min  $\deg x$

striktně ryzí, když řeš. min  $\deg y$

- Pravá strana striktně ryzí  $\Rightarrow$  buď oba zlomky na levé straně jsou striktně ryzí nebo žádný
- Pravá strana není striktně ryzí  $\Rightarrow$  vždy pouze jeden zlomek na levé může být striktně ryzí
- když  $\deg c < \deg a + \deg b$ , pak obě řešení minimálních stupňů koincidují a existuje jediné řešení minimálního stupně (které je minimální v obou neznámých současně)
- když  $\deg c \geq \deg a + \deg b$ , pak skutečně existují dvě různá řešení minimálního stupně (jedno v  $x$  a druhé v  $y$ )



Ano

- Obě jsou stejná!
- Tedy existuje jediné řešení minimálního stupně (v obou současně)

```
>> a=prand(3),b=prand(2),c1=1, c2=prand(6)
a = -1.5 + 0.22s - 1.4s^2 - 0.84s^3
b = 0.76 + 0.38s - 1.3s^2
c1 = 1
>> [x,y]=axbyc(a,b,c1,'minx')
x = -0.43 + 0.11s
y = 0.45 + 0.13s - 0.071s^2
>> [x,y]=axbyc(a,b,c1,'miny')
x = -0.43 + 0.11s
y = 0.45 + 0.13s - 0.071s^2
```

Ne

- Jsou různá

```
>> c2=prand(6)
c2 = -0.71+0.51s-0.42s^2+0.23s^3
      -0.96s^4-0.15s^5+0.74s^6
>> [x,y]=axbyc(a,b,c2,'minx')
x = 0.49 - 0.28s
y = 0.064 - 0.064s + 0.56s^2
      - 0.046s^3 - 0.55s^4
>> [x,y]=axbyc(a,b,c2,'miny')
x = -0.28 - 0.16s + 1.6s^2 - 0.89s^3
y = -1.5 + 1.2s - 0.99s^2
```



# Elementární operace na polynomiální matici

- **Řádkové operace** - 3 základní

- násobení řádku nenulovou konstantou

$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ 2 & s^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1. řádek } \times 3} \begin{bmatrix} 3 & 3s \\ 2 & s^2 \end{bmatrix}$$

- výměna dvou řádků

$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ 2 & s^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{výměna řádků}} \begin{bmatrix} 2 & s^2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

- přičtení řádku násobeného polynomem k jinému řádku

$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ 2 & s^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1. řádek } + s \times \text{2.řád.}} \begin{bmatrix} 1+2s & s+s^3 \\ 2 & s^2 \end{bmatrix}$$

- **Sloupcové operace** jsou duální
- Elementární operace zachovávají až na násobení konstantou determinant
- odpovídají násobení unimodulární maticí (tj. maticí s konstantním nenulovým determinantem)



# Postup řešení polynomiálními redukcemi

## Řešení rovnice

## polynomiálními redukcemi

**Krok 1** Utvoř složenou matici

$$\begin{bmatrix} a(s) & 1 & 0 \\ b(s) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Krok 2** Redukuj ji elementárními řádkovými operacemi na tvar

$$\begin{bmatrix} g(s) & p(s) & q(s) \\ 0 & v(s) & w(s) \end{bmatrix}$$

Pak je  $p(s)a(s) + q(s)b(s) = g(s)$  kde  $\gcd(a(s), b(s)) = g(s)$   
 $v(s)a(s) + w(s)b(s) = 0$   $\gcd(v(s), w(s)) = 1$

**Krok 3** Extrahuj  $g(s)$  z  $c(s)$  a dostaň  $c(s) = \bar{c}(s)g(s)$

Když to nejde, **rovnice nemá řešení !**



# Postup řešení polynomiálními redukcemi

Výsledek: jako řešení vezmi

$$x(s) = \bar{c}(s)p(s)$$

$$y(s) = \bar{c}(s)q(s)$$

Navíc, všechna řešení jsou vyjádřena takto

$$x(s) = \bar{c}(s)p(s) + v(s)t(s)$$

$$y(s) = \bar{c}(s)q(s) + w(s)t(s)$$

volný polynomiální parametr

Postup výpočtu plyne z rovnosti

$$\begin{bmatrix} p & q \\ v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & p & q \\ 0 & v & w \end{bmatrix}$$





# Příklad: Řešení rovnice redukcemi

$$(s+1)x(s) + (s-1)y(s) = s$$

Krok 1 a 2

$$\left[ \begin{array}{c|cc} s+1 & 1 & 0 \\ \hline s-1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c|cc} s+1 & 1 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 1/2 & -1/2 \\ \hline s+1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 0 & \frac{1-s}{2} & \frac{1+s}{2} \end{array} \right]$$

Krok 3

$$g(s) = 1 \rightarrow \bar{c}(s) = s$$

Krok 4

$$x(s) = \frac{s}{2}$$

$$y(s) = -\frac{s}{2}$$

$$x(s) = \frac{s}{2} + \frac{1-s}{2}t(s)$$

$$y(s) = -\frac{s}{2} + \frac{1+s}{2}t(s)$$



# Postup řešení Sylvestrovou maticí

Ukážeme na příkladu 2. stupně, kdy je dáno  
a hledáme  $x(s) = x_0 + x_1s$ ,  $y(s) = y_0 + y_1s$

$$a(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2$$

$$b(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2$$

$$c(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2$$

Krok1: Dosadíme polynomy s neurčitými koeficienty do rovnice,

$$(a_0 + a_1s + a_2s^2)(x_0 + x_1s) + (b_0 + b_1s + b_2s^2)(y_0 + y_1s) = c_0 + c_1s + c_2s^2$$

porovnáme koeficienty u stejných mocnin,  
nebo maticově

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_0x_0 + b_0y_0 = c_0$$

$$a_1x_0 + b_1y_0 + a_0x_1 + b_0y_1 = c_1$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 + a_1x_1 + b_1y_1 = c_2$$

$$a_2x_1 + b_2y_1 = 0$$

Vyřešíme tuto maticovou rovnici, čímž dostaneme  $x_0, y_0, x_1, y_1$  a z nich sestavíme hledané  $x(s) = x_0 + x_1s$ ,  $y(s) = y_0 + y_1s$



# Příklad: Řešení Sylvestrovou maticí

$$(s+1)x(s) + (s-1)y(s) = s \quad \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} a(s) = 1 + s \\ b(s) = -1 + s \\ c(s) = s \end{array} \quad + \quad \begin{array}{l} x(s) = x_0 \\ y(s) = y_0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x(s) = \frac{1}{2}, y(s) = \frac{1}{2}$$

- Dostali jsme řešení minimálního stupně (v obou neznámých), které je jiné než partikulární řešení získané dříve

- To z minulého příkladu dostaneme z obecného řešení volbou  $t(s) = 1$

$$x(s) = \frac{s}{2} + \frac{1-s}{2} t(s)$$

$$y(s) = -\frac{s}{2} + \frac{1+s}{2} t(s)$$



- Pro rovnici

$$a = 1 + s^2, b = (1 + s)^2 = 1 + 2s + s^2, c = 1 + 2s + 2s^2$$

hledáme i tady řešení stupňů 0 (s vědomím, že to asi je špatný odhad)

- a tak řešíme maticovou rovnice

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

která ale nemá žádné řešení.

- Přesto polynomiální rovnice řešení má, ale vyšších stupňů, např.

$$x = -0.5s, y = 1 + 0.5s$$

- Toto je typický případ

```
>> a=1+s^2,b=(1+s)^2,c=a+b-1
a = 1 + s^2
b = 1 + 2s + s^2
c = 1 + 2s + 2s^2
>> S=sylv([a;b],0),C=c{0:2}
S = 1      0      1
     1      2      1
C = 1      2      2
>> XY=C/S
XY = 0.5000      1.0000
>> XY*S==C
ans = 0      0      0
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)
x = -0.5s
y = 1 + 0.5s
```



Soustava – motor

přenos vstupního napětí

- Dříve navržený PI regulátor dává nulovou odchylku na skok ale ne dobrou dynamiku
- tak zkusme lepší  $c$

```
b = 0.0670
a = 0.017 + 0.0079s + 0.0011s^2
p = s
q = 15 + 3s
c1 = a*p + b*q
c1 = 1 + 0.22s + 0.0079s^2 + 0.0011s^3
>> roots(c1)
ans =
    -1.1476 +13.6253i
    -1.1476 -13.6253i
    -4.8866 + 0.0000i

>> c2=(s+5)*(s+1+j)*(s+1-j)
c2 =
    10 + 12s + 7s^2 + s^3
```



- řešením je obecný regulátor 1. řádu
- zajistí dobrou dynamiku, ale nemá integrační charakter a tedy nezajistí nulovou odchylku
- zkusme tam tedy dát integrátor natvrdo (při řešení rovnice z něj uděláme část soustavy)
- dostaneme regulátor s dobrou dynamikou a nulovou odchylkou
- ale je PID, což se dalo čekat

```
>> [x1,y1]=axbyc(a,b,c2)
x = -1.7e+02 + 9.1e+02s
y = 1.9e+02 - 32s
```

## Poučení:

- máme dobrou kontrolu nad dynamikou (vhodným výběrem CL pólů)
- dokážeme zajistit i další požadavky
- ale nemáme kontrolu nad řádem regulátoru – ten prostě vyjde

```
>> [x2,y2]=axbyc(a*s,b,c2)
x2 = 909.0909
y2 = 1.5e+02 - 52s - 2.7s^2
>> p2 = x2*s, q2 =y2
p2 = 9.1e+02s
q2 = 1.5e+02 - 52s - 2.7s^2
```



# Příklad: Ryzost regulátoru

- Pokud nemá pravá strana rovnice dostatečně vysoký stupeň
- ryzí regulátor existuje jen náhodou (není to generický případ)

```
>> a=(s-1)^2,b=s,c=(s+1)^2  
a = 1 - 2s + s^2  
b = s  
c = 1 + 2s + s^2  
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)  
x = 1.0000  
y = 4.0000
```

Jiný příklad:

- ryzí regulátor neexistuje, to je generický případ

```
>> c=prand(2,'sta')  
c = 0.86 + 2.6s + s^2  
>> [x,y]=axbyc(a,b,c)  
x = 0.8573  
y = 4.4 + 0.14s
```



# Příklad: Sledování 2DOF

$$a(s) = (1+s)(1-s)$$

$$b(s) = 2+s$$

$$f(s) = f^-(s) = s^2$$

$$m(s) = (2+s)(1+s)^2$$

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = m(s)$$

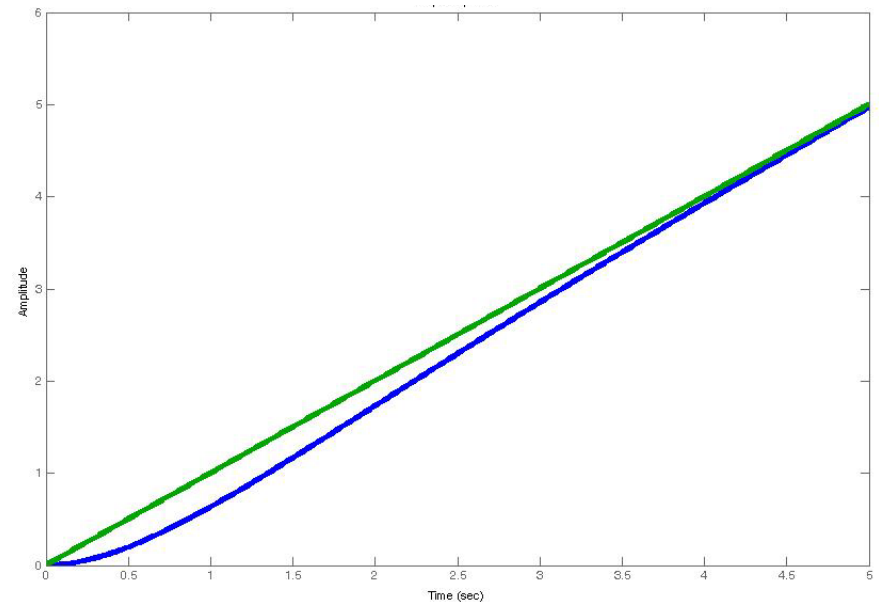
$$f^-(s)t(s) + b(s)r(s) = m(s)$$

$$p(s) = -2 - s$$

$$q(s) = 2 + 2s$$

$$r(s) = 1 + 2s$$

```
>> a=(1+s)*(1-s), b=2+s, f=s^2,  
m=(2+s)*(s+1)^2  
>> [p,q]=axbyc(a,b,m,'miny')  
p = -2 - s, q = 2 + 2s  
>> [t,r]=axbyc(f,b,m,'miny'); r  
r = 1 + 2s  
>> T=coprime(b*r/(a*p+b*q))  
T = 0.3 + 0.6s / 0.3 + 0.6s + 0.3s^2  
>> step(tf(T/s),tf(1/s),5)
```







Navrhněme pro stejné zadání regulátor 1DOF, tedy řízení odchylkou

## Postup „výběrem z 2DOF regulátorů“

- Z obecného řešení předchozí úlohy vybereme takové, aby  $q(s) = r(s)$

$$p(s) = -2 - s + w(s)(2 + s)$$

$$q(s) = 2 + 2s - w(s)(1 - s^2)$$

$$r(s) = 1 + 2s - v(s)s^2$$

- Volbou  $w(s) = 1 + s^2, v(s) = -s^2$  dostaneme nevyhovující  $p_1(s) = 0$

$$q_1(s) = 1 + 2s + s^2 = r_1(s)$$

- Jinou volbou  $u(s) = 1, v(s) = -1$  dostaneme

$$p_2(s) = (2 + s)s^2, q_2(s) = 1 + 2s + s^4 = r_2(s)$$

- Toto řešení sice není ryzí, ale jinak vyhovuje. Ryzí řešení tady neexistuje.
- Podle očekávání obsahuje jmenovatel 1DOF regulátoru faktor  $s^2$



- 1DOF regulátor můžeme navrhnout i přímo řešením rovnice

$$a(s)f^{-}(s)x(s) + b(s)q(s) = m(s)$$

- a položením

$$p(s) = f^{-}(s)x(s)$$

- Protože řešení minimálního stupně

$$x_3(s) = p_3(s) = 0$$

$$q_3(s) = 1 + 2s + s^2$$

- tu opět nevyhovuje, musíme najít jiné pomocí obecného řešení

$$x(s) = 0 + w(s)(2 + s)$$

$$q(s) = 1 + 2s + s^2 + w(s)(1 - s^2)s^2$$

- Pro  $w = 1$  dostáváme

$$x_4(s) = 2 + s, p_4(s) = (2 + s)s^2$$

$$q_4(s) = 1 + 2s + s^4$$

```
>> [x3,q3]=axbyc(a*f,b,m),  
p3=x3*f  
x3 = 0  
q3 = 1 + 2s + s^2  
p3 = 0  
>> w=1;x4=x3+w*b;  
p4=x4*f,q4=q3-w*a*f  
p4 = 2s^2 + s^3  
q4 = 1 + 2s + s^4
```



# Porovnání sledování 2DOF a 1DOF

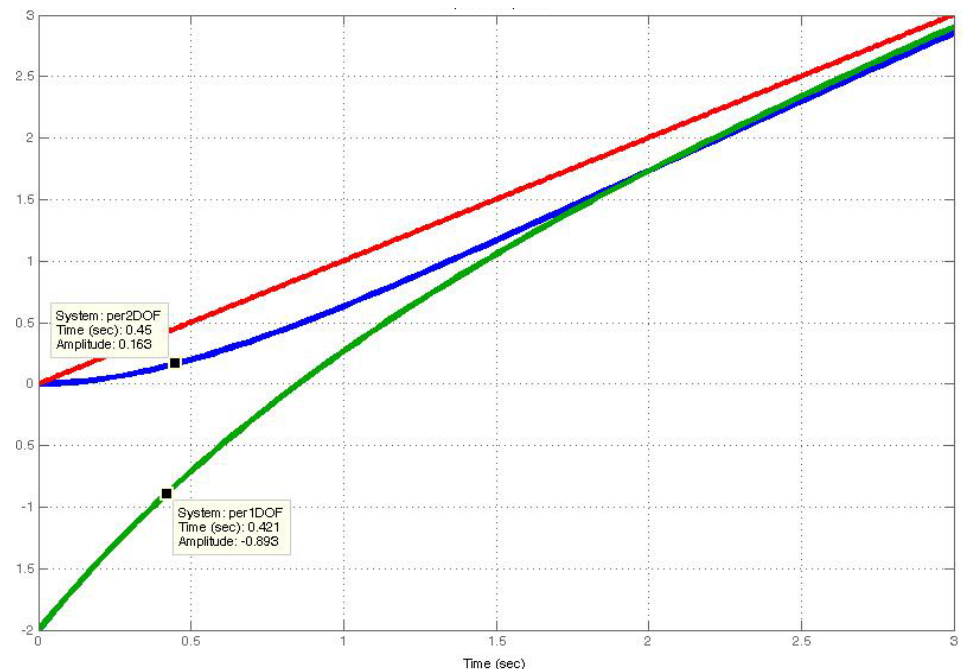
Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Povšimněte si, že 2DOF regulátor vyšel ryzí
- ale 1DOF regulátor ryzí není
- To se projeví na CL přenosech v na odezvě na rampu

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{2+2s}{-2-s}, \quad \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{1+2s}{-2-s}$$

$$\frac{q_4(s)}{p_4(s)} = \frac{1+2s+s^4}{(2+s)s^2}$$

```
>> T2DOF= r*coprime(b/m)
T2DOF =
1 + 2s / 1 + 2s + s^2
>> T1DOF= q4*coprime(b/m)
T1DOF =
1 + 2s + s^4 / 1 + 2s + s^2
>> per2DOF=tf((T2DOF)/s^2);
per1DOF=tf(T1DOF/s^2);
impulse(per2DOF,per1DOF,tf(1/
s^2),3)
```





Podmínky řešitelnosti mají hezkou interpretaci:

- Stabilita  $\gcd(a, b)$  znamená **stabilizovatelnost soustavy**
- $\gcd(f^-, b) = 1$  je **obecná podmínka pro sledování**, souvis. s definicí nul: nemůže projít žádný (zde nestabilní) mód, který se rovná jejím nulám
- $f^- \mid a$  je také přirozená: soustava „poháněná“ vstupem konvergujícím k nule asymptoticky sleduje jen takový nestabilní signál, který je schopna sama o sobě vygenerovat. Pokud to není splněno, systém může sledovat, jen když vzdáme požadavek stabilního vstupu

Srovnání dvou a jednoho stupně volnosti

- zvláštní případ  $q = r$  snadno odlišíme. Rovnice  $ap + bq = m$   
mají řešení s  $q = r$  právě když  $ap = f^-t$   $f^-t + br = m$
- takže klasická struktura vyžaduje, aby nestabilní módy reference byly v soustavě nebo regulátoru, i v případě, že vstup může být nestabilní.



# Odvození - Přizpůsobení soustavy modelu

$$y = \frac{b(s)}{a(s)}u + u = -\frac{q(s)}{p(s)}y + \frac{r(s)}{p(s)}u_{new} \rightarrow y = \frac{b(s)r(s)}{a(s)p(s) + b(s)q(s)}u_{new} = y = \frac{g(s)}{f(s)}u_{new}$$

$$\rightarrow \frac{b(s)r(s)}{a(s)p(s) + b(s)q(s)} = \frac{g(s)}{f(s)} \rightarrow \frac{\bar{b}(s)r(s)}{a(s)p(s) + b(s)q(s)} = \frac{\bar{g}(s)}{f(s)} \rightarrow$$

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = f(s)\bar{b}(s)t(s)$$

$$\downarrow \rightarrow \frac{\bar{b}(s)r(s)}{f(s)\bar{b}(s)t(s)} = \frac{\bar{g}(s)}{f(s)} \rightarrow \frac{r(s)}{t(s)} = \frac{\bar{g}(s)}{1} \rightarrow r(s) = \bar{g}(s)t(s)$$

**Řešitelné:** Vždy. Ale pokud chceme stabilní řešení, pak musí být splněny

**Podmínky stability:**

- $f(s)$  stabilní (samozřejmě) a vezmeme  $t(s)$  stab. , musí být  $\text{gcd}(a,b)$  stab.
- $\bar{b}(s)$  stabilní: to znamená, že nestabilní nuly nemůžeme změnit !



- Soustava  $\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+2)(s-2)}$  a požadovaný přenos  $\frac{g(s)}{f(s)} = \frac{s-1}{(s+2)^2}$

- Nesoudělné faktory  $\frac{b(s)}{g(s)} = \frac{(s+1)(s-1)}{(s-1)} = \frac{(s+1)}{1} = \frac{\bar{b}(s)}{\bar{g}(s)}$

- Volíme  $t(s) = 1$  a řešíme rovnici

$$(s+2)(s-2)p(s) + (s+1)(s-1)q(s) = (s+2)^2(s+1)$$

- Řešení  $p(s) = -3(s+1), q(s) = 2(s+2)$  . Feedforward je  $r(s) = 1$

- Tedy vychází regulátor  $u = \frac{2(s+2)}{3(s+1)}y + \frac{1}{3(s+1)}u_{new}$

- Zkouška  $\frac{(s+1)(s-1)}{-3(s+2)(s-2)(s+1) + 2(s+1)(s-1)(s+2)} = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{(s-1)}{(s+2)^2}$