

# Příklady k přednášce 20 - Číslicové řízení



Michael Šebek  
Automatické řízení 2017



# Vzorkování: vztah mezi $s$ a $z$ pro komplexní póly

**Spojité signál**  $y(t) = e^{-\alpha t} \sin \beta t, t > 0$

- má Laplaceův obraz

$$y(s) = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

s póly v  $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

**Diskrétní signál**

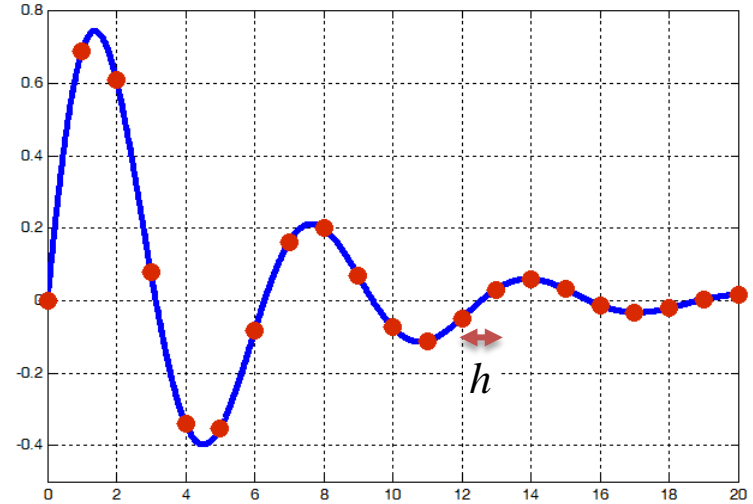
- má  $z$ -obraz  $y(k) = e^{-\alpha kh} \sin(\beta kh)$

$$y(z) = \frac{z^{-1} e^{-\alpha h} \sin(\beta h)}{1 - z^{-1} 2e^{-\alpha h} \cos(\beta h) + z^{-2} e^{-2\alpha h}} = \frac{z e^{-\alpha h} \sin(\beta h)}{z^2 - z 2e^{-\alpha h} \cos(\beta h) + e^{-2\alpha h}}$$

- s póly  $z_{1,2} = e^{-\alpha h} (\cos(\beta h) \pm j \sin(\beta h)) = e^{(-\alpha \pm j\beta)h}$

- Mezi póly obrazu spojitého a (vzorkovaného) diskrétního signálu platí vztah

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}h}$$





- Signály s frekvencemi od 0 do  $\pi/h$  se po vzorkování zobrazí do jednotkového kruhu. Kam se zobrazí signály s většími frekvencemi?

- Uvažme sinusovku s L-obrazem majícím póly

$$y(t) = \sin \omega_1 t \quad y(s) = \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} \quad s_{1,2} = \pm j\omega_1$$

- Vzorkováním s periodou  $h$

$$y(k) = \sin(\omega_1 h k) \quad y(z) = \frac{z \sin \omega_1 h}{z^2 - z 2 \cos \omega_1 h + 1} \quad z_{1,2} = e^{\pm j\omega_1 h}$$

- Pro případ

$$\omega_1 > \pi/h \leftrightarrow h > \pi/\omega_1$$

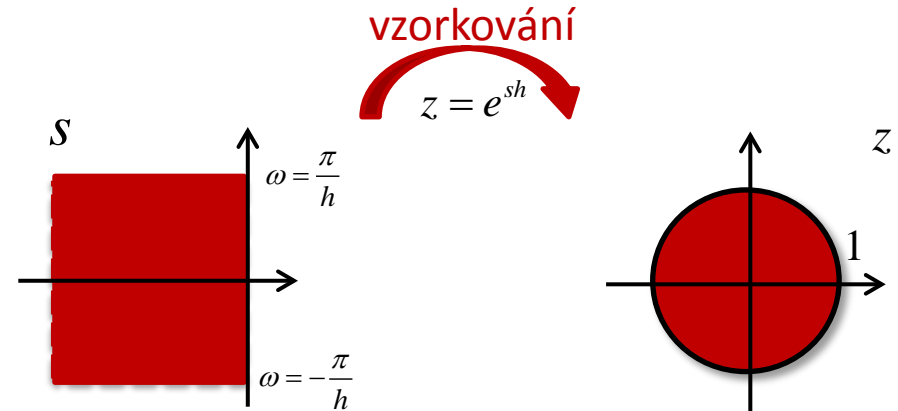
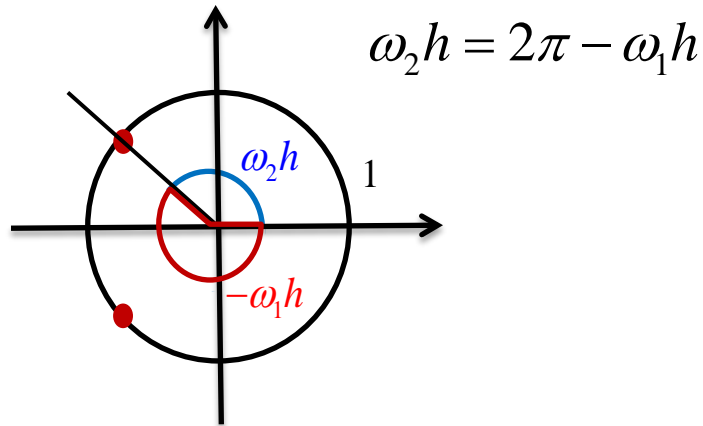
neboli v Hz

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \text{ Hz}, \quad f_s = \frac{1}{h} < 2f_1 \quad \text{je a diskrétní póly mají úhel } > 180^\circ$$

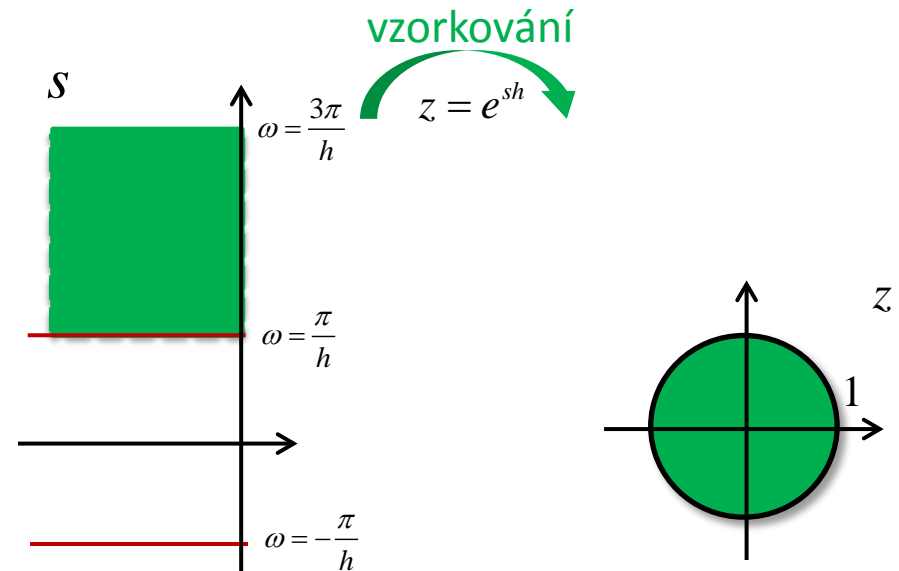
$$\omega_1 h > \pi$$

- Při  $\omega_1 h > \pi$  je  $e^{-j\omega_1 h} = e^{j(2\pi - \omega_1 h)}$ ,  $e^{j\omega_1 h} = e^{-j(2\pi - \omega_1 h)}$ , kde  $(2\pi - \omega_1 h) \in [0, 180^\circ]$
- A poloha pólů odpovídá i frekvenci

$$(\omega_2 h = 2\pi - \omega_1 h) \rightarrow \omega_2 = 2\pi/h - \omega_1 = \omega_s - \omega_1$$



- Při zpětném zobrazení (rekonstrukci signálu) nepoznáme správné frekvenční pásmo
- Abychom tomu zabránili, musíme vzorkovat hustěji
- Nebo předem odfiltrovat ze spojitého signálu frekvence vyšší než  $\omega_N = \omega_s/2$  (anti-aliasing filter)





# Příklad: Disková jednotka

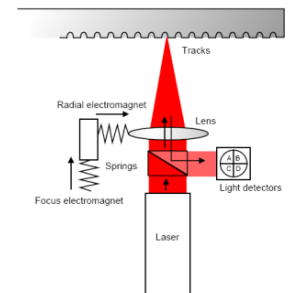
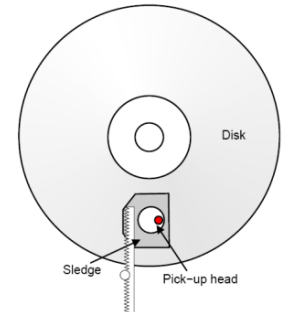
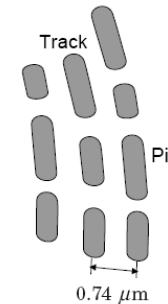
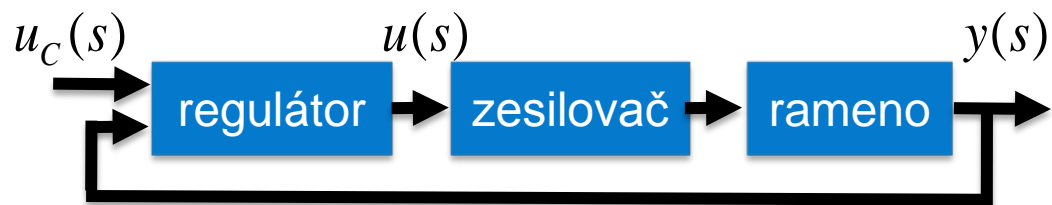
Automatické řízení - Kybernetika a robotika

## Rameno v diskové mechanice

- zjednodušeno (normalizováno na 1)  
podrobněji ÅW, s13, ex1.2
- přenos napětí zesilovače na polohu ramene

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

- cíl: sledovat stopu (čím přesněji, tím užší)
- přesné řízení polohy ramene
- důležitá dynamika – rychlost čtení
- struktura řízení





# Příklad: spojité řízení

- spojitý regulátor (navrhujeme “spojitými metodami“)

$$u(s) = \frac{1}{2}u_C(s) - 2\frac{s+0.5}{s+2}y(s)$$

- CL charakteristický polynom

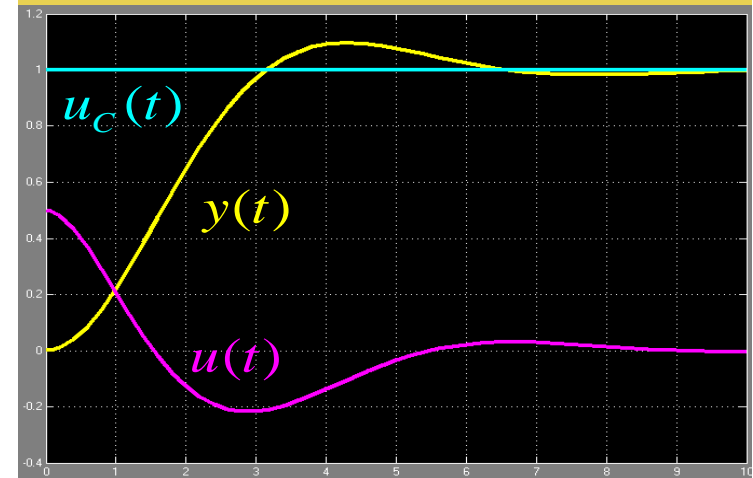
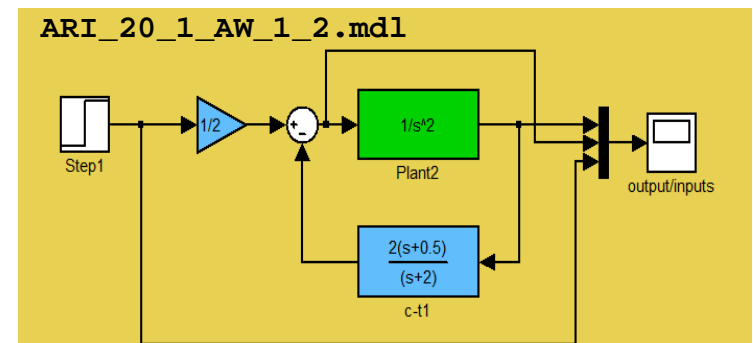
$$c_{CL}(s) = (s+1)(s^2+s+1) \quad s_1 = 1$$

- CL přenos

$$y(s) = \frac{1}{2} \frac{s+2}{(s+1)(s^2+s+1)} u_C(s)$$

$$s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- simulace **AW\_1\_2.mdl**
- doba ustálení na 5% je 5.5, překmit do 10% - OK
- Jak realizovat digitálně ?



$$(s+1.0000)(s^2+1.0000s+1.0000)$$



# Příklad: Naivní aproximace regulátoru

- Spojitý regulátor vyjádříme

$$\frac{s+0.5}{s+2} = 1 - \frac{1.5}{s+2}$$

$$\begin{aligned} u(s) &= 0.5u_c(s) - 2\frac{s+0.5}{s+2}y(s) = 0.5u_c(s) - 2y(s) + 2\frac{1.5}{s+2}y(s) \\ &= 2\left[0.25u_c(s) - y(s) + x(s)\right] \quad \text{kde} \quad x(s) = \frac{1.5}{s+2}y(s) \end{aligned}$$

- dostaneme v časové oblasti spojitý algoritmus (zákon řízení)

$$u(t) = 2\left[0.25u_c(t) - y(t) + x(t)\right] \quad \frac{dx}{dt} = -2x(t) + 1.5y(t)$$

- diskretní algoritmus - signály vzorkujeme s periodou  $h$
- a derivaci aproximujeme diferencí

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = -2x(t) + 1.5y(t)$$



- Tak dostaneme diskretní aproximaci

$$\begin{aligned} x(t_k + h) &= x(t_k) + h[1.5y(t_k) - 2x(t_k)] \\ u(t_k) &= 2[0.25u_C(t_k) - y(t_k) + x(t_k)] \end{aligned}$$

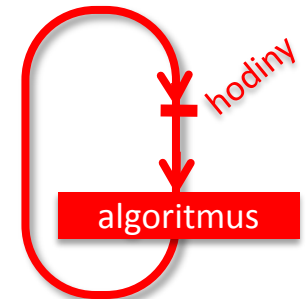
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x(t) + 1.5y(t) \\ u(t) &= 2[0.25u_C(t) - y(t) + x(t)] \end{aligned}$$

- Tu můžeme realizovat programem (kde  $u_C$  je dáno digitálně)

```

y:= adin(in2)           {čti hodnotu procesu}
u:= 2*(0.25*uc-y+x)     {vypočti řídicí hodnotu}
dout(u)                 {pošli ven řídicí hodnotu}
x:= x+h(1.5*y-2*x)     {vypočti novou hodnotu x}

```



- nebo diskretním přenosem

$$u(z) = 0.5u_C(z) - 2 \frac{z + 0.5h - 1}{z + 2h - 1} y(z)$$

$$u(z) = 2[0.25u_C(z) - y(z) + x(z)]$$

$$zx(z) = x(z) + h[1.5y(z) - 2x(z)]$$

← Odpovídá dosazení  $s = \frac{z-1}{h}$  do spojitého přenosu

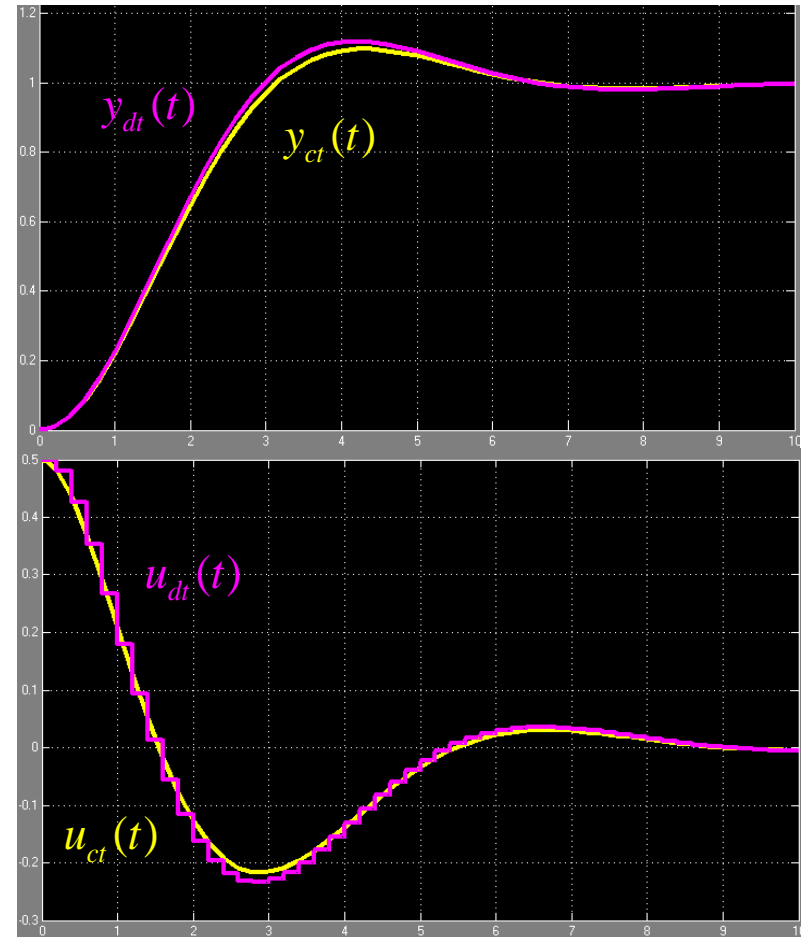
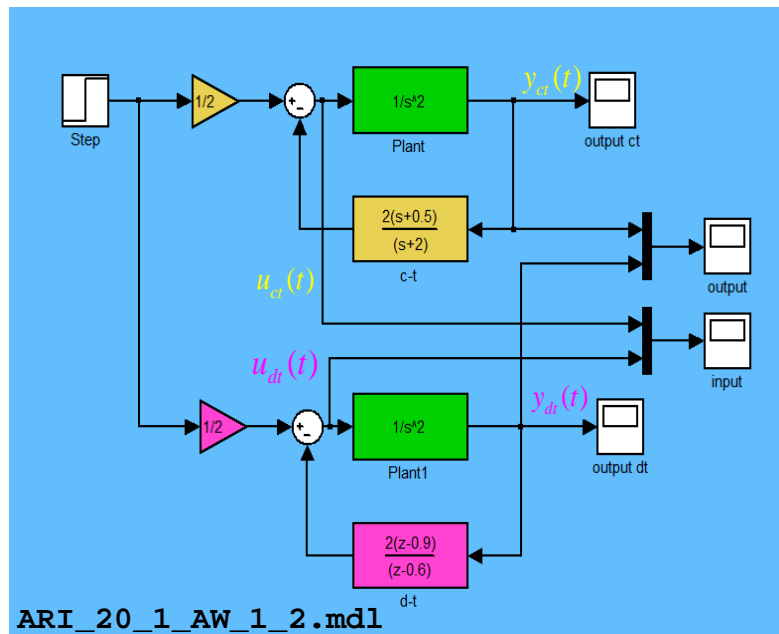




# Příklad: porovnání

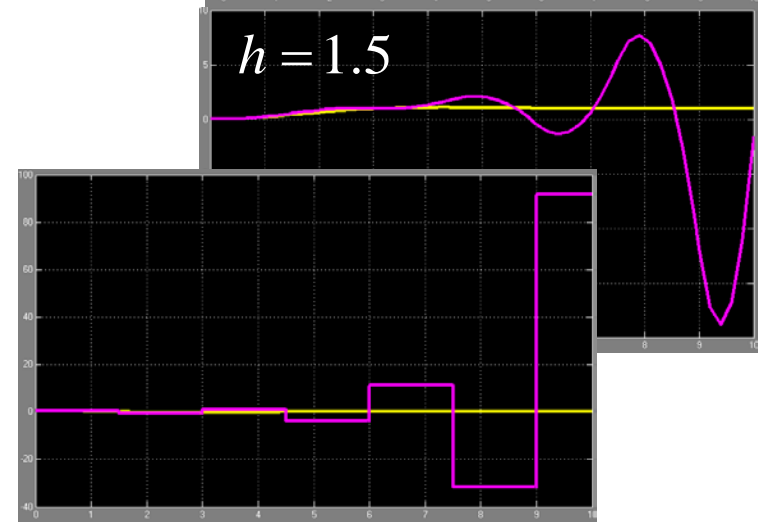
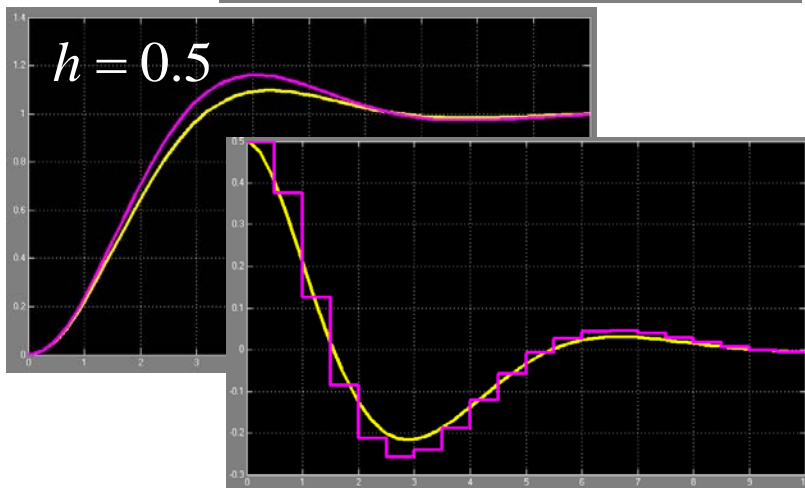
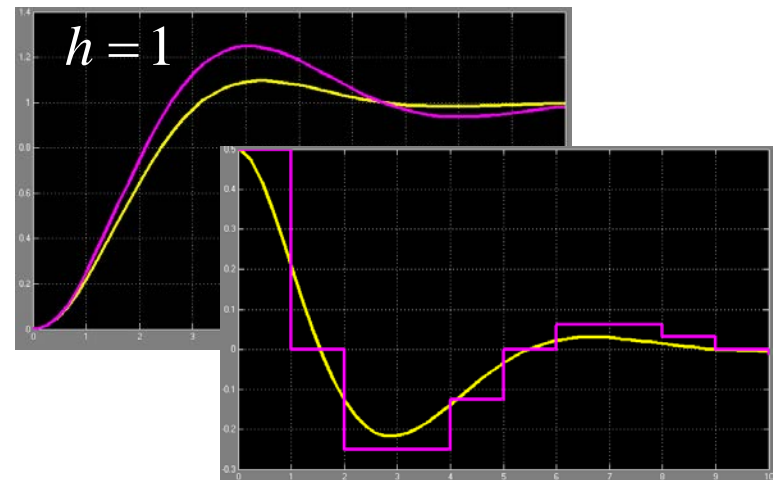
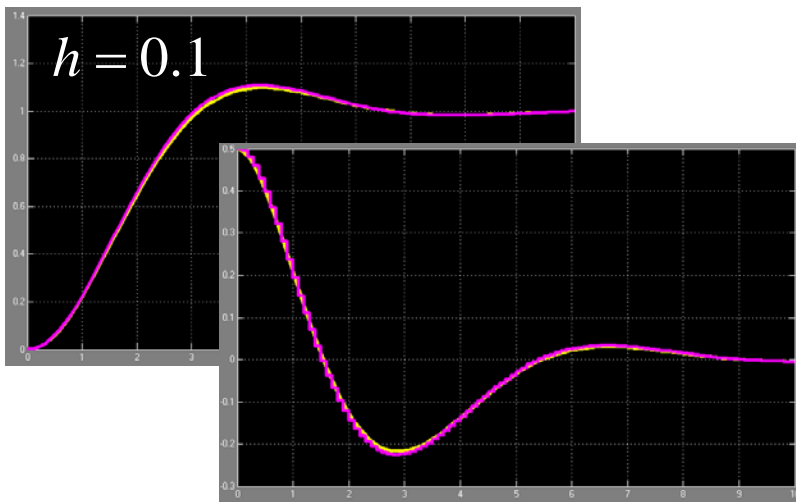
- Porovnáme spojité a diskrétní řízení pro  $h = 0.2$

$$u(z) = 0.5u_c(z) - 2 \frac{z-0.9}{z-0.6} y(z)$$





- Různé periody vzorkování  $h = 0.1, 0.5, 1, 1.5$





- Nejprve najdeme diskretní přenos soustavy a tvarovače

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad \longrightarrow \quad G(z) = \frac{h^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

- diskretními metodami najdeme diskretní regulátor tak, aby

$$(z^2 - 2z + 1)p(z) + h^2/2(z+1)q(z) = z^3$$

- řešením rovnice

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ h^2/2 & h^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2/2 & h^2/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- dostaneme

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1 & -\frac{3}{2h^2} & \frac{5}{2h^2} \end{bmatrix}$$

$$p(z) = 3/4 + z$$

$$q(z) = -\frac{3}{2h^2} + \frac{5}{2h^2}z$$



- tento „čistě diskrétní“ regulátor

$$u(z) = \frac{4}{7h^2} u_c(z) - \frac{5}{2h^2} \frac{z-3/5}{z+3/4} y(z)$$

- dává výsledný přenos

$$y(z) = \frac{2}{7} \frac{(z+1)(z+3/4)}{z^3} u_c(z)$$

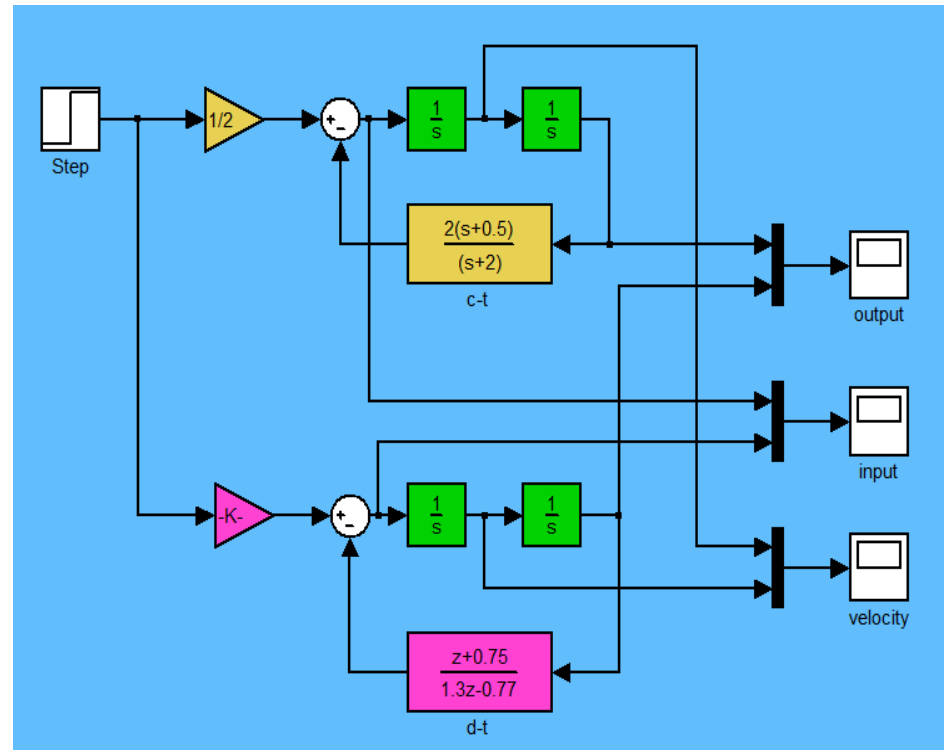
- a CL charakteristický polynom

$$c_{CL}(z) = z^3$$

- simulace

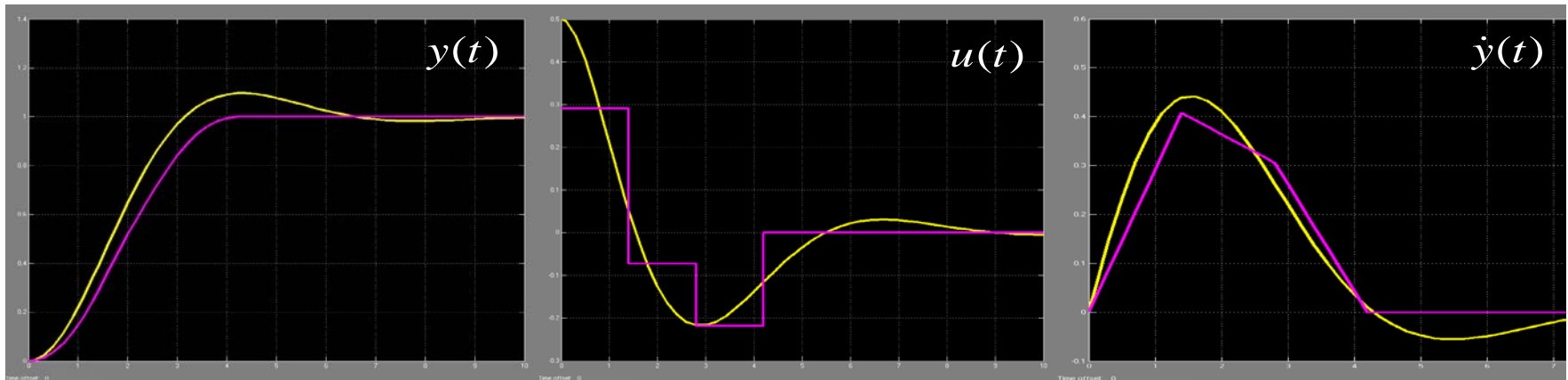
[ARI\\_20\\_2\\_AW\\_1\\_3.mdl](#)

pro  $h = 1.4$





- Simulace `ARI_20_2_AW_1_3.mdl` pro  $h = 1.4$   
výstup: vstup: rychlost:



- počínaje 4. okamžikem vzorkování se výstup přesně rovná požadovanému (neblíží se mu jen asymptoticky)!
- Toto čistě diskrétní řešení je lepší než spojité a
- nemá obdoby mezi spojitými (není aproximací žádného spoj)
- Co se tedy děje při zmenšování  $h$  ?



## Příklad: a ještě jiné řešení

- Nešlo by počet kroků ještě zkrátit? Zdánlivě ano:
- Vyřešíme  $(z^2 - 2z + 1)p(z) + h^2/2(z + 1)q(z) = z^2(z + 1)$  pomocí

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ h^2/2 & h^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2/2 & h^2/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- dostaneme  $\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{h^2} & \frac{4}{h^2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} p_{weak}(z) &= 1 + z \\ q_{weak}(z) &= 4/h^2 z - 2/h^2 \end{aligned}$

- Tedy regulátor

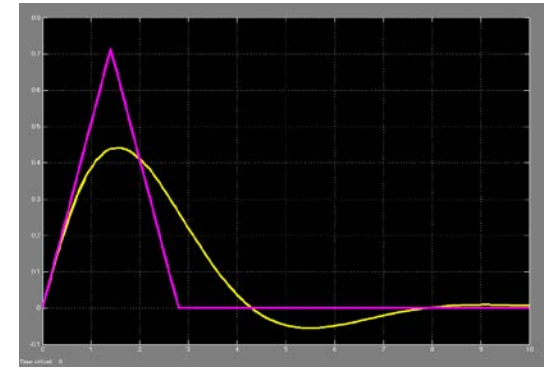
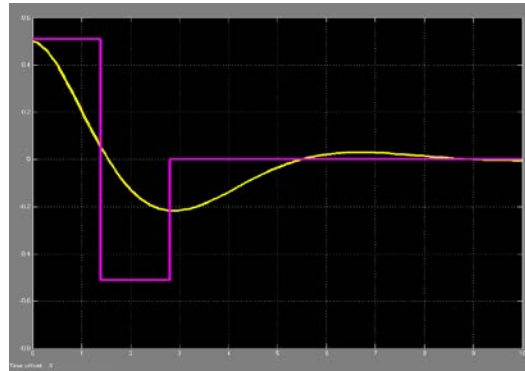
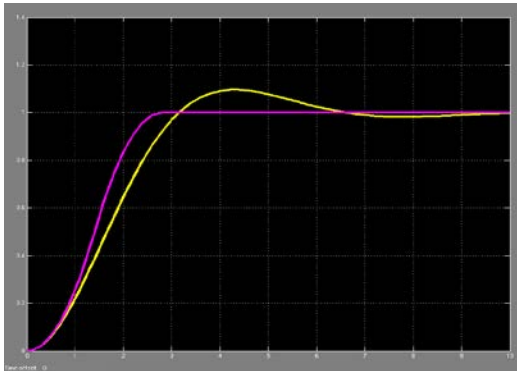
$$u = \frac{1}{h^2} u_c - \frac{4}{h^2} \frac{z - 1/2}{z + 1} y$$

který dá výsledný přenos uzavřené smyčky  
a CL charakteristický polynom  $c_{CL}(z) = z^2(z + 1)$

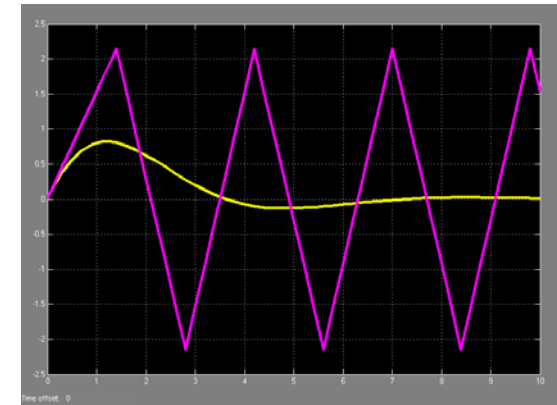
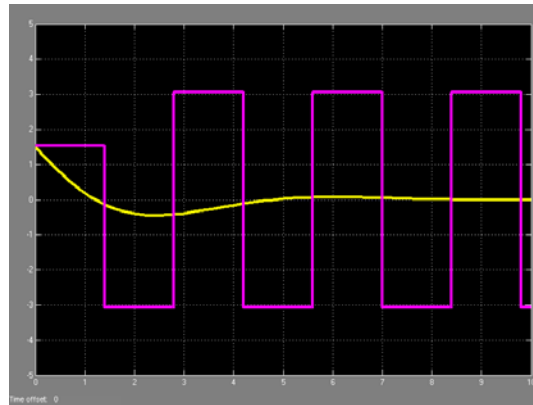
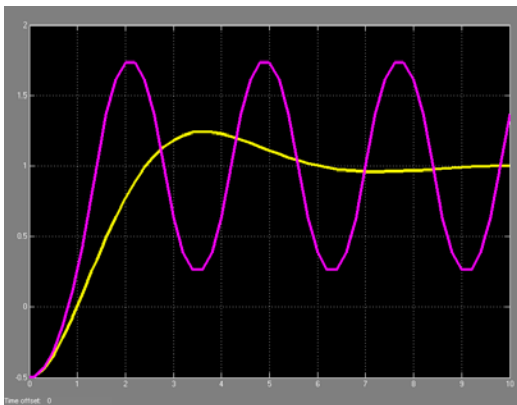
$$y = \frac{1}{2} \frac{(z + 1)}{z^2} u_c$$



Simulace – druhý model v [ARI\\_20\\_2\\_AW\\_1\\_3.mdl](#) vypadá OK



Ale pro nenulové počáteční podmínky (třetí model tamtéž) odhalí problém



Všimněte si, že v okamžicích vzorkování se chová vzorně



# Příklad: a ještě čtvrté, stavové řešení

- Nakonec ještě ukážeme řešení stavovou zpětnou vazbou
- Stavové rovnice dvojitého integrátoru  $G(s) = 1/s^2$  jsou např.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), y = [1 \quad 0] x(t)$$

- Jejich diskrétní verze (s ZOH a periodou vzorkování  $h$ )

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} h^2/2 \\ h \end{bmatrix} u(k), y(k) = [1 \quad 0] x(k)$$

- Zapojením stavového regulátoru

$$u(k) = - \begin{bmatrix} 1/h^2 \\ 3/(2h) \end{bmatrix} x(k) + 1/h^2 u_c(k)$$

$$y(z) = \frac{1}{2} \frac{z+1}{z^2} u_c(z)$$

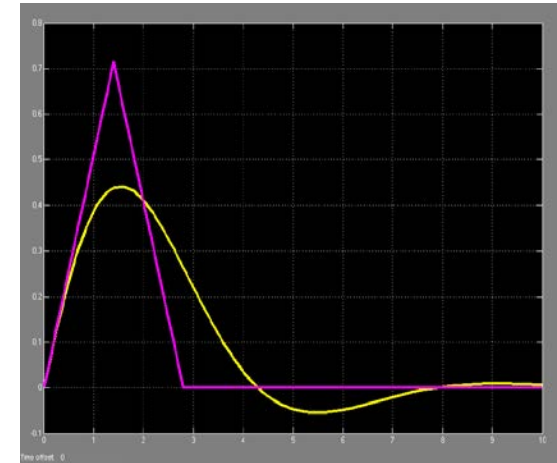
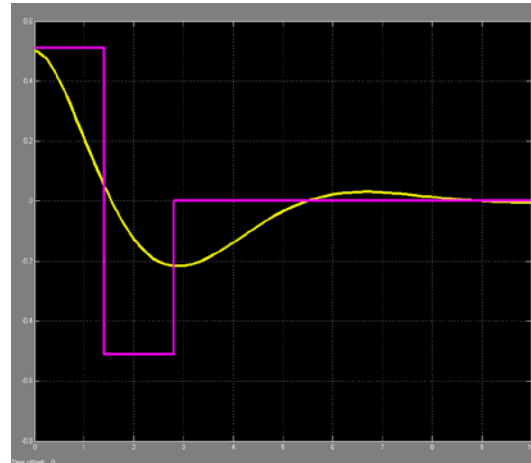
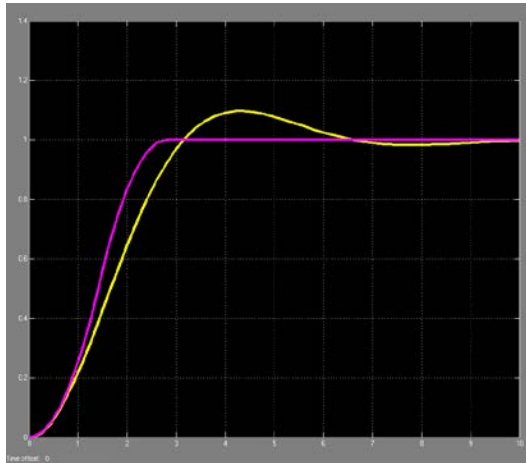
- Se systém změní na  s char. polynomem  $c_{CL}(z) = z^2$  a přenosem 

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4h \\ -1/h & -1/2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/h \end{bmatrix} u_c(k), y(k) = [1 \quad 0] x(k)$$





- Simulace `ARI_20_3_AW_4_5.mdl` pro  $h = 1.4$



- Počínaje třetím krokem je žádaná hodnota přesně nastavena a řízení je nulové
- a to pro každé počáteční podmínky
- systém je vnitřně stabilní



# Chyby kvantování



- LSB = least significant bit
- chyba kvantování v rozmezí  $\pm\frac{1}{2}$  LSB

Příklad:

- 12 bitový A/D na škále  $\pm 10$  V
- Chyba

$$\pm 0.5 \text{ LSB} = \pm 0.00244 \text{ V}$$

