

Příklady k přednášce 21 - Diskrétní modely spojitých systémů



Michael Šebek
Automatické řízení 2018

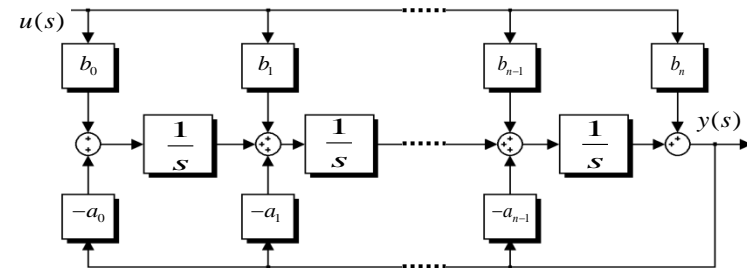


- Protože obecný regulátor (systém) můžeme realizovat sestavou s integrátory

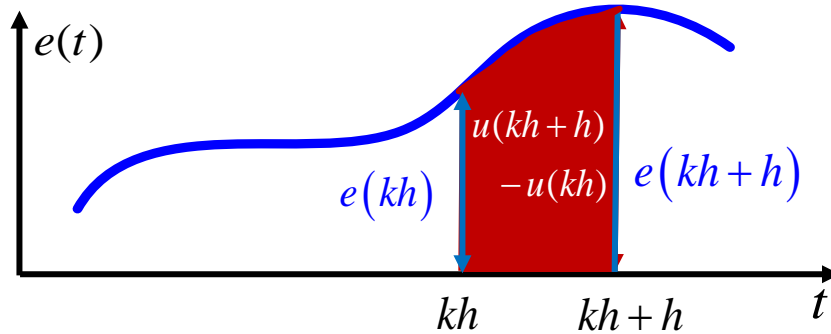
$$C(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}$$

- odvodíme diskrétní aproximaci pro jeden (každý) integrátor

$$C(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{1}{s} \quad u(t) = u(0) + \int_0^t e(\tau) d\tau$$



- Výstup za jednu vzorkovací periodu je



$$u(kh + h) = u(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e(\tau) d\tau$$

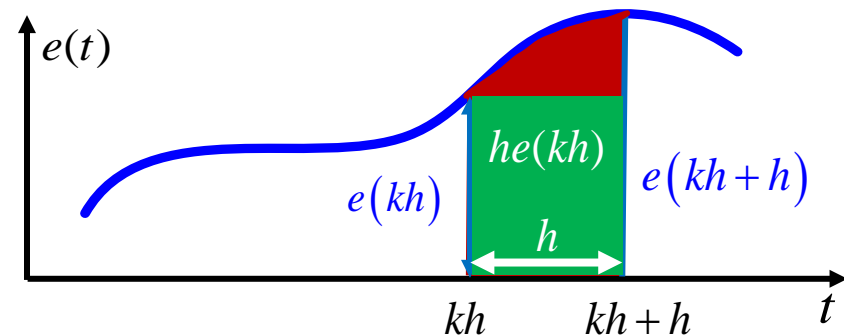
Různé populární metody různě aproximují **integrál** použitím hodnot v diskrétních okamžicích vzorkování



- Náhradě derivace přímou diferencí odpovídá v tomto grafu náhrada **červené plochy zeleným obdélníkem**

$$\int_{kh}^{kh+h} e(\tau) d\tau \approx he(kh)$$

$$\begin{aligned} u(kh+h) &= u(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e(\tau) d\tau \\ &= u(kh) + he(kh) \end{aligned}$$



- Použitím z-transformace

$$zu(z) = u(z) + he(z)$$

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{h}{z-1}$$



$$\frac{1}{s} \approx \frac{h}{z-1}$$



$$s \approx \frac{z-1}{h}$$

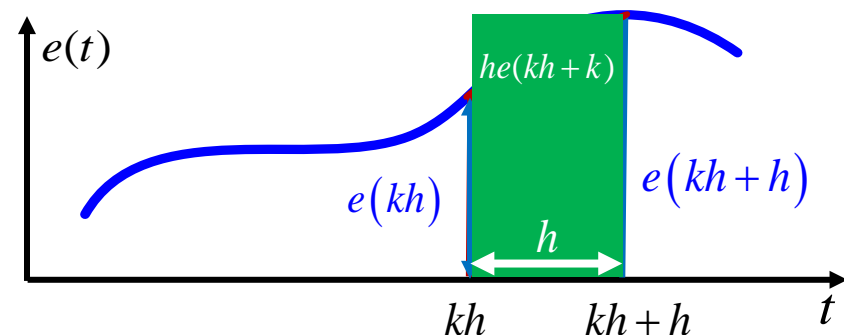
- Metoda se také nazývá Eulerova aproximace



- Náhradě derivace zpětnou diferencí odpovídá v tomto grafu náhrada **červené plochy zeleným obdélníkem**

$$\int_{kh}^{kh+h} e(\tau) d\tau \approx he(kh+h)$$

$$\begin{aligned} u(kh+h) &= u(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e(\tau) d\tau \\ &= u(kh) + he(kh+h) \end{aligned}$$



- Použitím z-transformace

$$zu(z) = u(z) + zhe(z)$$

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{zh}{z-1}$$



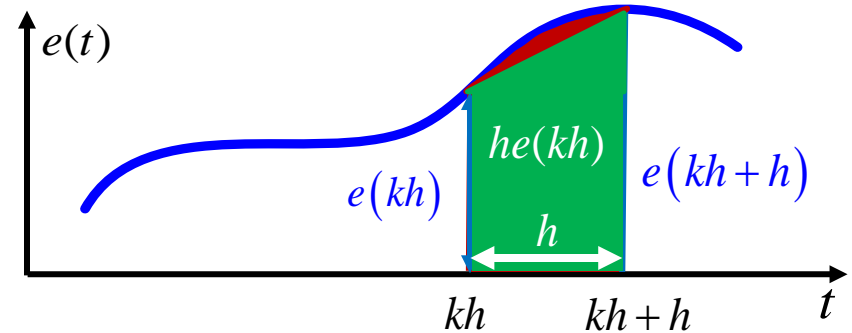
$$\frac{1}{s} \cong \frac{zh}{z-1}$$



$$s \cong \frac{z-1}{zh}$$



- Bilineární Tustinově transformaci odpovídá v tomto grafu náhrada **červené plochy zeleným lichoběžníkem**



obsah zeleného lichoběžníku

$$\frac{h}{2} [e(hk) + e(hk + h)]$$

$$\int_{kh}^{kh+h} e(\tau) d\tau \approx \frac{h}{2} [e(hk) + e(hk + h)]$$

$$\begin{aligned} u(kh + h) &= u(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e(\tau) d\tau \\ &= u(kh) + \frac{h}{2} [e(hk) + e(hk + h)] \end{aligned}$$

- Použitím z-transformace

$$zu(z) = u(z) + \frac{h}{2} e(z) + \frac{h}{2} ze(z)$$

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{h}{2} \frac{z+1}{z-1}$$



$$\frac{1}{s} \cong \frac{h}{2} \frac{z+1}{z-1}$$



$$s \cong \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{h} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$



Řád

- Všechny tyto transformace zachovávají řád systému a tedy i počet pólů
- Aproximace vyšších řádů se neužívají proto, že by řád zvyšovaly

Aliasing

- Pozor na stroboskopický efekt: regulátor nesprávně reaguje na nesprávně vzorkovaný (alised) signál: poruchu nebo referenci
- Může pomoci „anti-aliasing filter“: Pak VF signály nepůsobí chybně, jsou neviditelné
- Ale filtr přidává fázové zpoždění a potenciálně destabilizuje CL

Stabilita OL

- Je-li $C(s)$ stabilní, je stabilní i $C(z)$? Porovnání dále. **Podobně minimální fáze**

Stabilita CL:

- I když je při předběžném návrhu spojitý CL systém navržen jako stabilní, po připojení aproximovaného diskretního regulátoru stabilní být nemusí
- Musíme vypočítat diskretní model soustavy se vzorkovačem a ZOH, spojit ho s diskretním regulátorem a testovat toto CL spojení na diskretní stabilitu!



Přímá diference

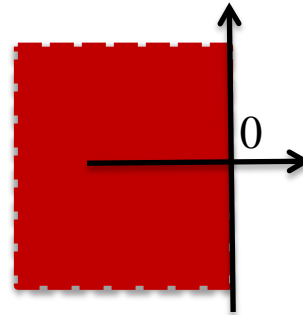
$$z = e^{sh} \approx 1 + sh$$

$$\operatorname{Re} s < 0 \rightarrow \operatorname{Re} z < 1$$

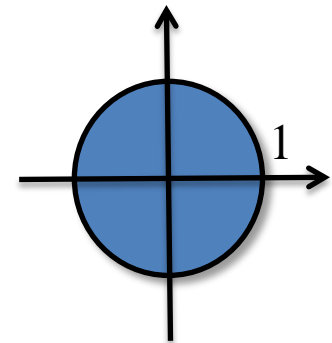
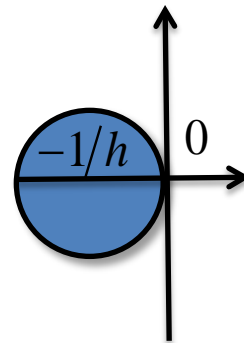
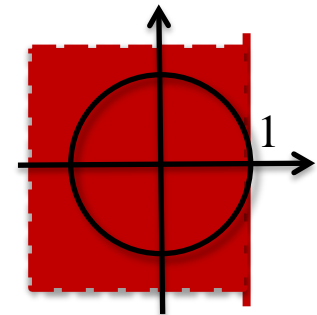
$$z = 1 + sh$$

$$|z| < 1 \rightarrow |1 + sh| < 1$$

spojitý



diskrétní



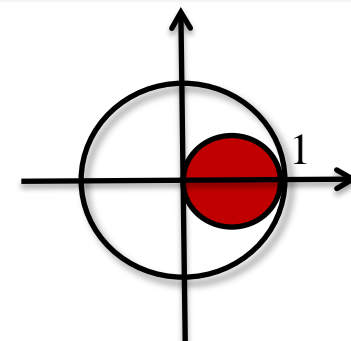
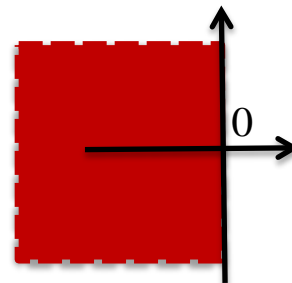
Stabilní spojitý regulátor s módy (póly) VF nebo slabě tlumenými má nestabilní diskretní aproximaci



Zpětná diference

$$z = \frac{1}{1 - sh}$$

- Stabilita zachována
- I když má spojitý málo tlumené módy, diskrétní je nemá

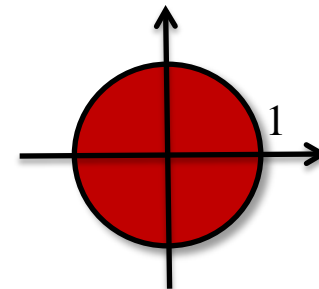
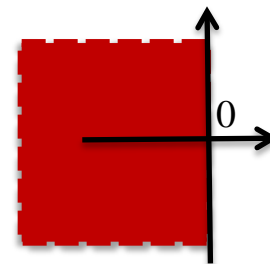
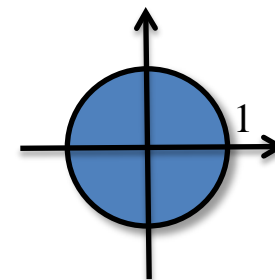
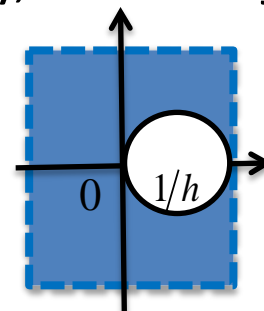


$$s = \frac{1}{h} - \frac{1}{hz}$$

Tustinova metoda

$$z = \frac{1 + sh/2}{1 - sh/2}, s = \frac{2}{h} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- Nejen že zachová stabilitu (a minimální fázovost)
- Zobrazení stabilní oblasti je one-to-one, proto se užívá nejčastěji





- Ručně

$$C(s) = \frac{a}{a+s} \quad \xrightarrow{\quad} \quad C_{\text{Tustin}}(z) = \frac{a}{a + \frac{2}{h} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} = \frac{(1+z^{-1})ah}{ah + 2(1-z^{-1})}$$
$$s = \frac{2}{h} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

- V Matlabu – CSTbx:

```
>> a=2;h=4;C=a./(a+s)
C =      2
-----
      2 + s

>> CTustin=c2d(tf(C),h,'tustin')
Transfer function:
0.8 z + 0.8
-----
      z + 0.6
Sampling time: 4
```



Spojitý regulátor s přenosem

$$C(s) = \frac{a}{a+s}$$

- Aproximujeme přímou diferencí

$$C_{\text{forward}}(z) = \frac{a}{a + \frac{z-1}{h}} = \frac{ah}{z + ah - 1}$$

- Zpětnou diferencí

$$C_{\text{backward}}(z) = \frac{a}{a + \frac{z-1}{zh}} = \frac{ahz}{z(ah+1) - 1}$$

- A Tustinovou metodou

$$C_{\text{Tustin}}(z) = \frac{a}{a + \frac{2}{h} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)} = \frac{ah(z+1)}{(ah+2)z + ah - 2}$$



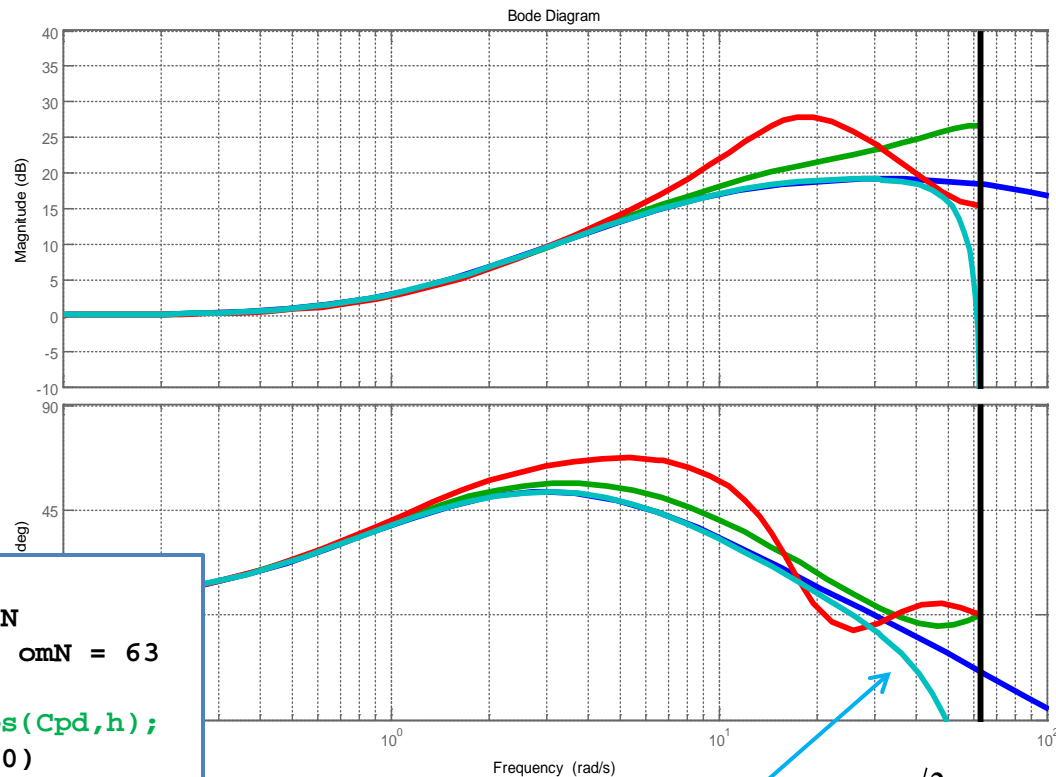
Spojité regulátor s přenosem

$$C(s) = \frac{s+1}{(0.1s+1)(0.01+s)}$$

Aproximujeme:

- přímá diference
- zpětná diference
- tustin

```
>> C=(s+1)/((0.1*s+1)*(0.01*s+1));h=.05;  
>> fs=1/h,fN=fs/2,oms=2*pi*fs,omN=2*pi*fN  
h = 0.0500, fs = 20, fN = 10, oms = 12^, omN = 63  
>> S=(z-1)/h;  
>> Cpd=(S+1)/((0.1*S+1)*(0.01*S+1)),props(Cpd,h);  
Cpd = 50(z-0.9500) / (z+4.0000)(z-0.5000)  
>> S=(z-1)./h*z;  
>> Czdz=(S+1)/((0.1*S+1)*(0.01*S+1)),props(Czdz,h);  
>> Ctu=c2d(tf(C),h,'tustin')  
Transfer function:  
5.857 z^2 + 0.2857 z - 5.571  
-----  
z^2 - 0.1714 z - 0.2571  
>> bode(tf(C),tf(Cpd),tf(Czdz),Ctu)
```



$$\omega_s/2 = \omega_N = 63 \text{ rad/s}$$

Tustinova aproximace: nejlepší, až na okolí Nyquistovy frekvence!



Metoda sladěných nul a pólů - MPZ (Matched pole-zero)

- vychází ze vztahu mezi póly/nulami $z_i = e^{s_i h}$ spojitého a vzorkovaného signálu
- použitého zde na impulsní charakteristiku regulátoru
- Navíc, je-li to možné, přidáváme nuly v $z^{-1} = -1$, tj. členy $(z^{-1} + 1)$ do čitatele, což vede k zprůměrování současné a předchozí hodnoty
- Metoda je jednoduchá a praktická, i když ne moc podložená

Postup MPZ

1. vypočti nuly a póly spojitého regulátoru $C(s)$
2. sestav $C(z)$ tak, aby pro jeho nuly a póly platilo $z_i = e^{s_i h}$
3. je-li to možné, **přidej do čitatele členy $(z + 1)$** tak, aby se **stupeň čitatele = stupeň jmenovatele**
4. nastav zesílení $C(z)$ pro nulové nebo nízké frekvence stejné jako bylo zesílení v $C(s)$



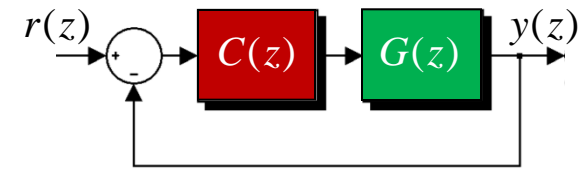
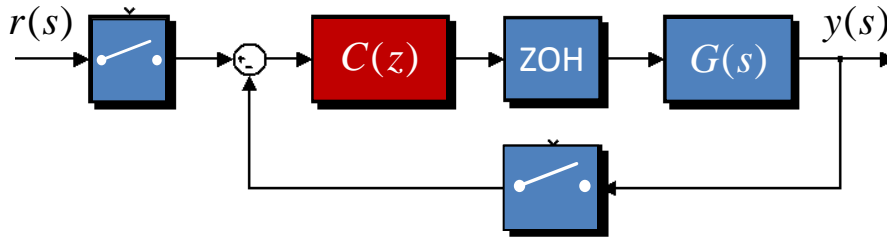
MPZ pro

$$C(s) = K_C \frac{s+a}{s+b} \quad \downarrow \quad z_i = e^{s_i h}$$
$$C_{MPZ}(z) = K_D \frac{z - e^{-ah}}{z - e^{-bh}}$$

$$C(0) = K_C \frac{a}{b} = C_{MPZ}(1) = K_D \frac{1 - e^{-ah}}{1 - e^{-bh}} \quad \rightarrow \quad K_D = K_C \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bh}}{1 - e^{-ah}}$$

MPZ pro

$$C(s) = K_C \frac{s+a}{s(s+b)} \rightarrow C_{MPZ,1}(z) = K_D \frac{z - e^{-ah}}{(z-1)(z - e^{-bh})} \rightarrow C_{MPZ}(z) = K_D \frac{(z+1)(z - e^{-ah})}{(z-1)(z - e^{-bh})}$$
$$K_D = K_C \frac{a}{2b} \frac{1 - e^{-bh}}{1 - e^{-ah}}$$



pro spojitý přenos

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

je diskretní přenos

$$G(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{a}{s(s+a)} \right\} =$$

$$= (1-z^{-1}) \frac{(1-e^{-ah})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-ah}z^{-1})}$$

$$= \frac{1-\alpha}{z-\alpha},$$

$$\alpha = e^{-ah}$$

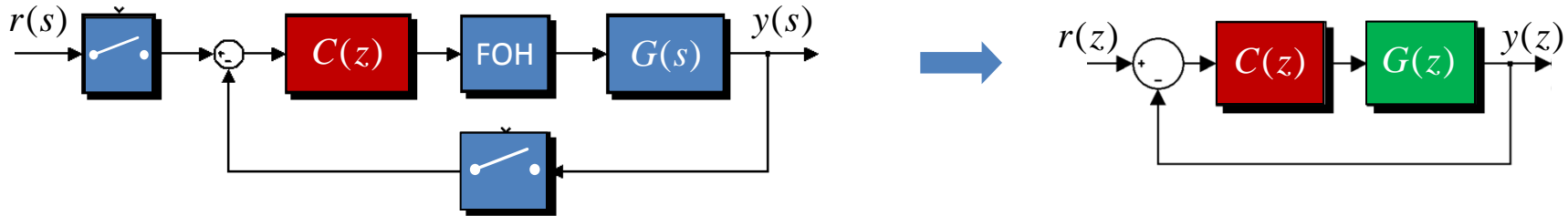
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{s(s+a)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right\} = 1 - e^{-at} \rightarrow 1 - e^{-akh}$$

$$\mathcal{Z} \{ 1 - e^{-akh} \} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-ah}}$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-ah}z^{-1}}$$

$$= \frac{(1-e^{-ah})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-ah}z^{-1})}$$

```
>> sdf(c2d(tf(1/(s+1)),1,'zoh'))
ans = 0.6321
----- reduced
      (z-0.3679)
```



- pro spojitý přenos $G(s) = \frac{1}{s^2}$ napřed vypočteme

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^3}{3!} \rightarrow \frac{(kh)^3}{6} \rightarrow \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{6}(kh)^3\right\} = \frac{h^3}{6} \mathcal{Z}\{k^3\} = \frac{h^3}{6} \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$$

- Pak je diskrétní přenos

$$G(z) = \frac{(z-1)^2}{hz} \frac{h^3}{6} \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{h^2}{6} \frac{(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^2}$$

```
>> Gz=c2d(tf(1/s^2),1,'foh')
Transfer function:
0.1667 z^2 + 0.6667 z + 0.1667
-----
                z^2 - 2 z + 1
Sampling time: 1
>> Gzp=sdf(Gz)
Gzp =
0.1667(z+3.7321)(z+0.2679)
-----
                (z-1)(z-1)
```



```
>> D=5/(s+5);DD=zpk(D); T=1/15;
>> DDtustin=c2d(DD,T,'tustin'),
    DDmpz=c2d(DD,T,'matched'), ...
    DDzoh=c2d(DD,T,'zoh'),DDfoh=c2d(DD,T,'foh'), ...
Zero/pole/gain:
    0.14286 (z+1)
    -----
    (z-0.7143)
    Sampling time: 0.066667
Zero/pole/gain:
    0.28347
    -----
    (z-0.7165)
    Sampling time: 0.066667
Zero/pole/gain:
    0.28347
    -----
    (z-0.7165)
    Sampling time: 0.066667
Zero/pole/gain:
    0.14959 (z+0.8949)
    -----
    (z-0.7165)
    Sampling time: 0.066667

>> bode(DD,DDtustin,DDmpz,DDzoh,DDfoh)
>> omegas=2*pi/T          omegas = 94.2478
```

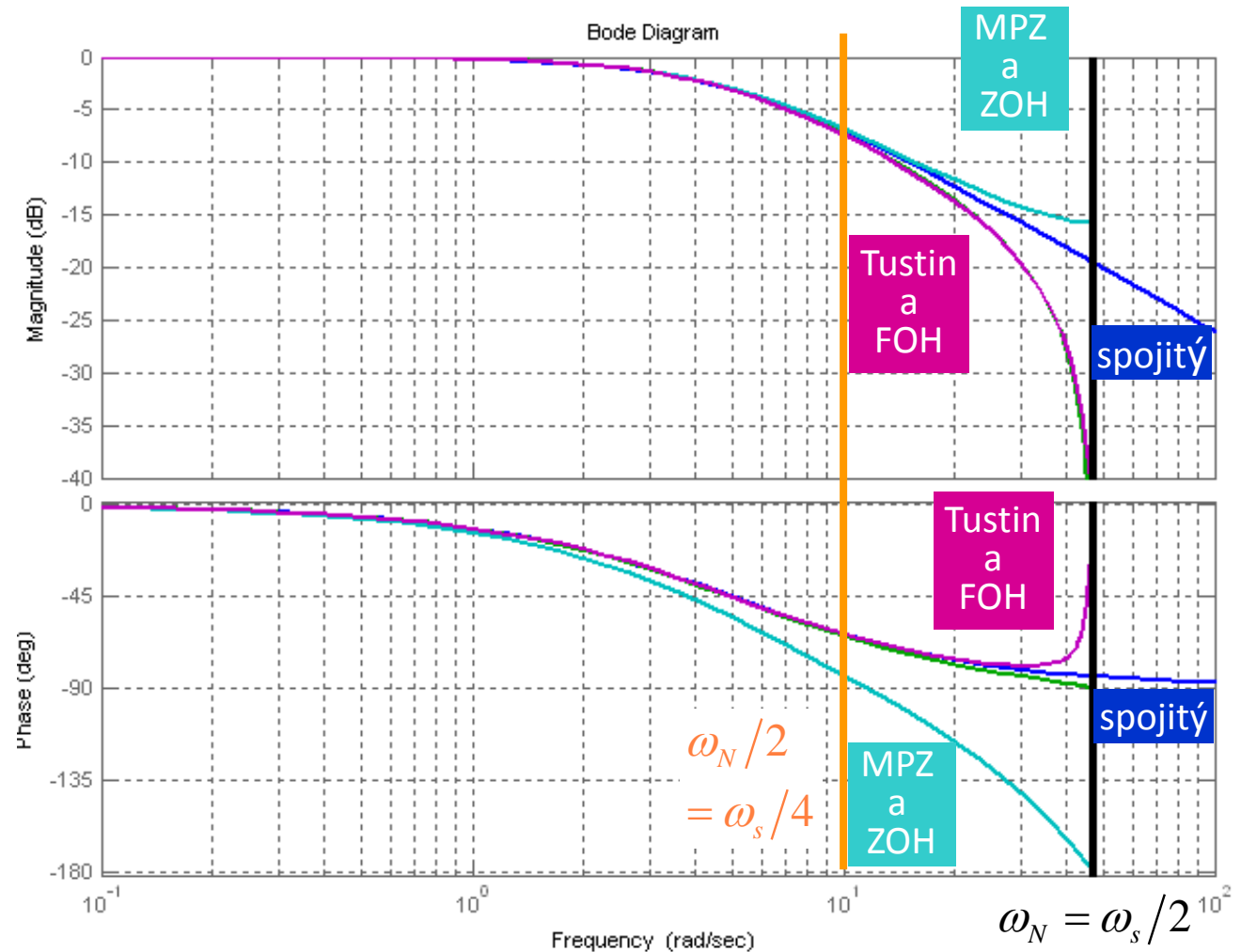



Porovnání frekvenčních charakteristik

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

$$G(s) = \frac{5}{s+5}$$
$$h = 1/15 \text{ s}$$
$$\omega_s \approx 94 \text{ rad}$$

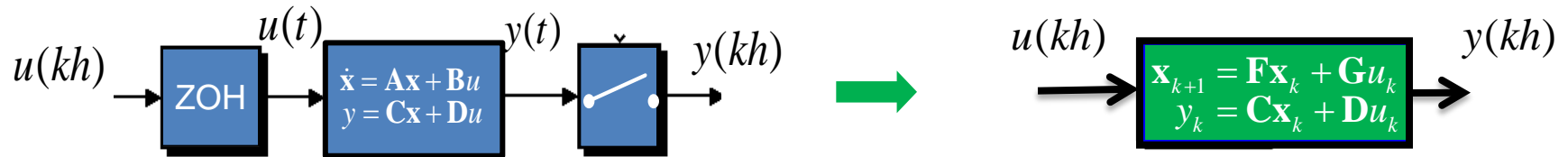
- všechny OK asi do $\omega_N/2 = \omega_s/4$





Diskretizace stavového modelu: odvození

Diskrétní stavový model soustavy + tvarovacího členu 0. řádu



- Při odvození diskrétního modelu vyjdeme z modelu spojitého

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}$$

- Je-li tento systém v čase t_0 ve stavu $x(t_0)$, pak v čase $t \geq t_0$ je ve stavu

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

- kde pro výpočet musíme znát vstup v celém intervalu $[t_0, t)$



Diskretizace stavového modelu: odvození

- Při hledání diskrétního modelu nás zajímá, jaký závisí stav v čase t_{k+1} na stavu v čase t_k za předpokladu ZOH, tj. konstantního vstupu $u_k = u(\tau), \tau \in [t_k, t_{k+1})$ během celého intervalu mezi vzorkováními
- Označíme-li $h = t_{k+1} - t_k$ a použijeme předchozí vzoreček, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_{k+1}) &= e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-t_k)} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-\tau)} d\tau \mathbf{B}u(t_k) & \nu = t_{k+1} - \tau \\ &= e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x}(t_k) + \left(\int_0^h e^{\mathbf{A}\nu} d\nu \right) \mathbf{B}u(t_k)\end{aligned}$$

- Protože výstupní rovnici vzorkování nezmění, dostaneme diskrétní model

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_{k+1}) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{G}u(t_k) \\ y(t_k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t_k) + Du(t_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= e^{\mathbf{A}h} \\ \mathbf{G} &= \left(\int_0^h e^{\mathbf{A}\nu} d\nu \right) \mathbf{B}\end{aligned}$$



Výpočet maticové exponenciály

Existuje mnoho metod pro výpočet maticové exponenciály a jejího integrálu

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}h}, \quad \mathbf{G} = \left(\int_0^h e^{\mathbf{A}v} dv \right) \mathbf{B}$$

- Rozklad exponenciály v Taylorovu řadu

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

$$\mathbf{V} = \int_0^h e^{\mathbf{A}v} dv = \mathbf{I}h + \frac{\mathbf{A}h^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2h^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^i h^{i+1}}{(i+1)!} + \dots$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{V}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{V}\mathbf{B}$$

- Přes Jordanův tvar (vlastní čísla)

$$A = V \operatorname{diag} \{ \lambda_i \} V^{-1} \quad \longrightarrow \quad e^{Ah} = V \operatorname{diag} \{ e^{h\lambda_i} \} V^{-1}$$

- Caylay-Hamiltonův teorém

- Matlabská funkce `expm` – Padého aproximace

>> `expdemo2`

>> `expdemo3`

>> `expdemo1`



- Pro spojité systém 1. řádu
- a periodu vzorkování h je

$$\dot{x} = \alpha x + \beta u$$

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}h} = e^{\alpha h}$$

$$\mathbf{G} = \left(\int_0^h e^{\alpha v} dv \right) \beta = \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha h} - 1)$$

- Takže diskrétní popis vzorkovaného systému se ZOH je

$$x(k+1) = e^{\alpha h} x(k) + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha h} - 1) u(k)$$



- Pro dvojitý integrátor se stavovým popisem
- vzorkovaný s periodou h
- je

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}h} = \mathbf{I} + \mathbf{A}h + \mathbf{A}^2 h^2/2 + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 + \dots = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \int_0^h e^{\mathbf{A}v} \mathbf{B} dv = \int_0^h \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} h^2/2 \\ h \end{bmatrix}$$

- Takže diskrétní popis vzorkovaného systému (se ZOH) je

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} h^2/2 \\ h \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$



Na úvod: CL stabilita při spojitém a diskretním řízení

Při návrhu emulací: CL stabilita spojitého řízení nezaručuje CL stabilitu diskretního řízení! Musíme testovat „diskretní stabilitu“!

Ukážeme to na P regulátoru - nejjednodušším možném. Ten ani „neaproximujeme,“ ale použijme přímo „jak je“ i pro diskretní řízení

- Pro soustavu $P(s) = \frac{a}{s+a}$, $a > 0$, regulátor $C(s) = k_p$ při spojitém řízení

je CL charakteristický polynom $c_{CL}(s) = s + a + ak_p$

- Nyní stejný regulátor použijme při diskretním řízení $C(z) = C(s) = k_p$
- Pro analýzu diskretního případu použijeme „diskretní model soustavy“ (spojitá soustava + vzorkovač + tvarovač ZOH)

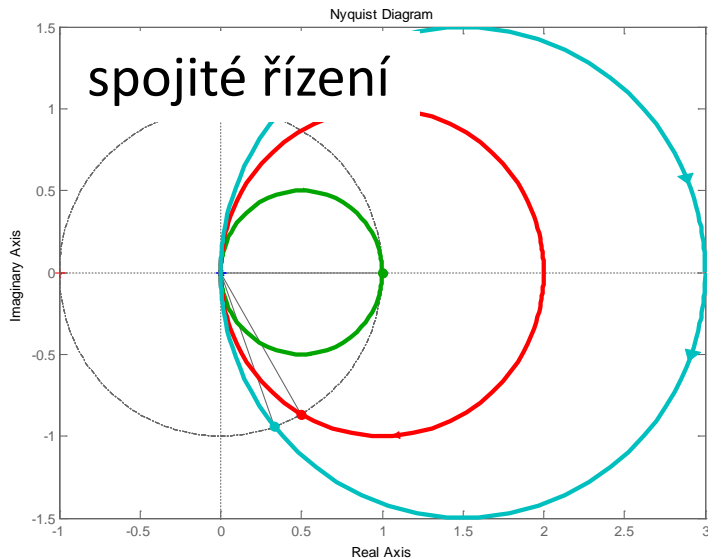
$$P(z) = \frac{1 - e^{-ah}}{z - e^{-ah}}$$

- Výsledný CL charakteristický polynom je teď $c_{CL}(z) = z - e^{-ah} + (1 - e^{-ah})k_p$

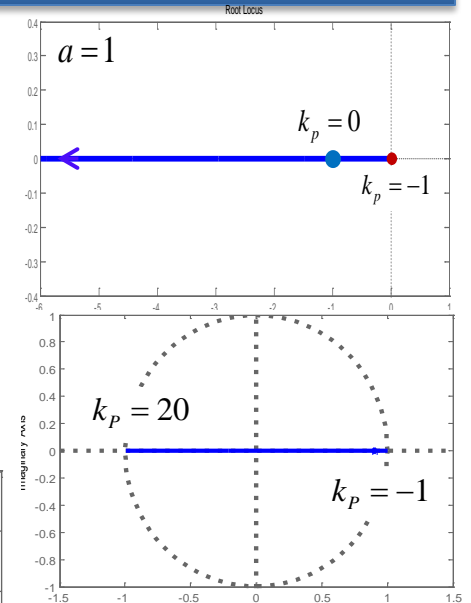
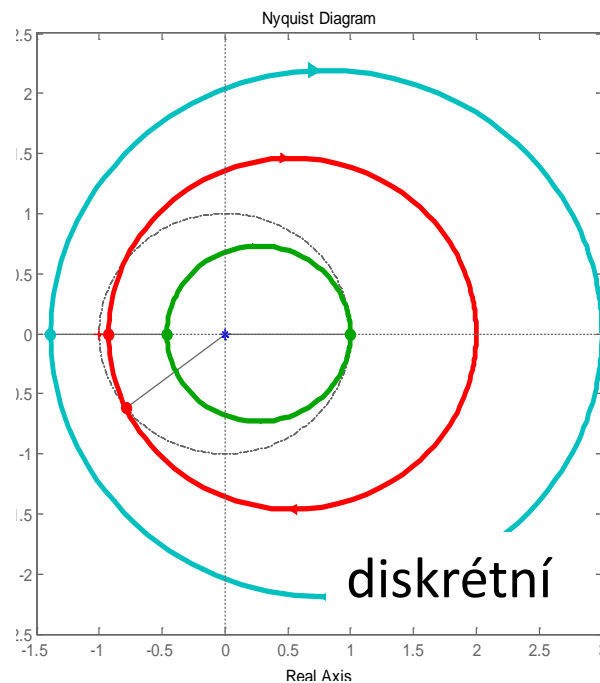


Na úvod: CL stabilita při spojitém a diskretním řízení

- spojitý případ $c_{CL}(s) = s + a + ak_p$
je **nestabilní** právě když $k_p \leq -1$
- diskretní případ $c_{CL}(z) = z - e^{-ah} + (1 - e^{-ah})k_p$
je **nestabilní** právě když $k_p \leq -1$ nebo $k_p \geq \frac{1 + e^{-ah}}{1 - e^{-ah}}$



$$k_p = [1, 2, 3]$$



spojitý případ
má nekonečné
GM

diskretní má
konečné GM



CL stabilita při spojitým a diskretním řízení

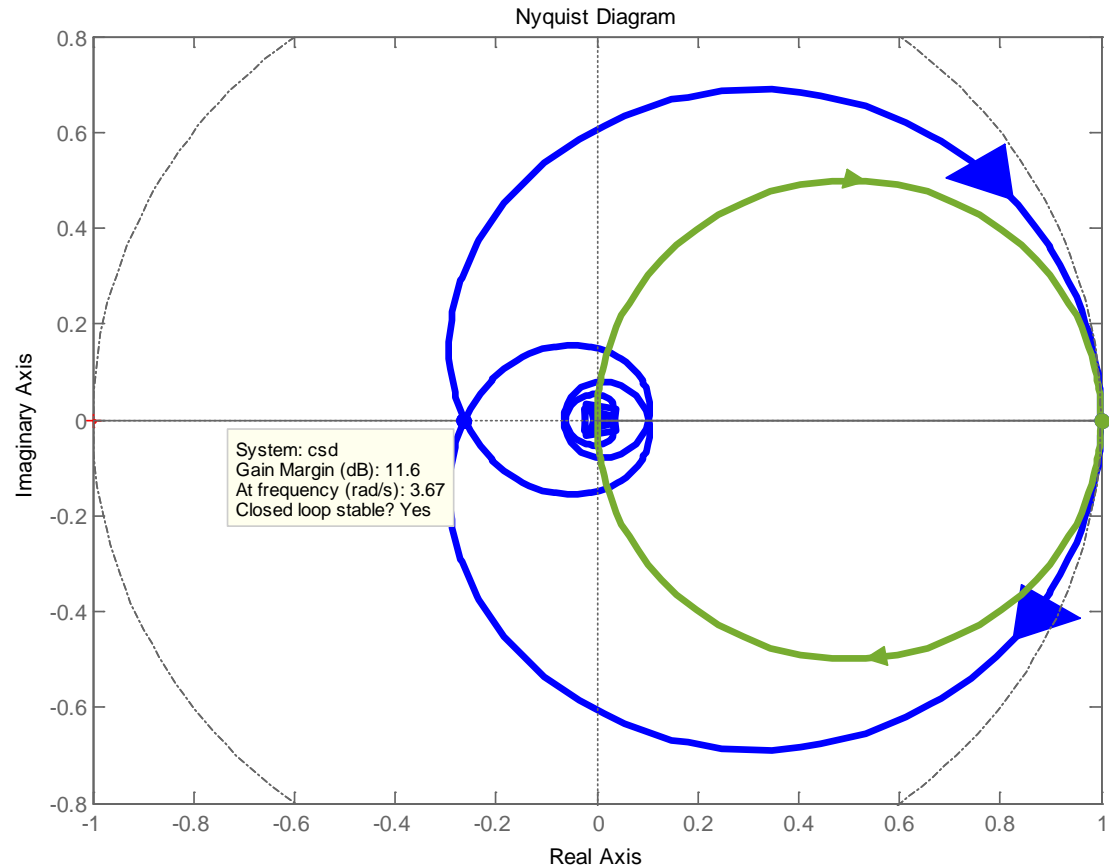
Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Rozdíl je ve vzorkování + ZOH !
- ZOH vnáší - zhruba řečeno - dopravní zpoždění $h/2$
- Srovnej

$$P(s) = \frac{a}{s+a}$$

$$P_{ZOH}(s) = \frac{a}{s+a} e^{-sh/2}$$

- Což má GM konečné!
- Proto je lépe s tím počítat už
- při spojitým návrhu





Problém okamžitého výpočtu

- v předchozích příkladech: stupeň čitatele v z = stupeň jmenovatele v z
- tedy diferenční rovnice regulátoru je
$$u(k) + \text{členy s } k-1, \dots = ce(k) + \text{členy s } k-1, k-2, \dots$$
- takový číslicový regulátor musí počítat okamžitě, tedy zpoždění plynoucí z nenulové doby výpočtu je zanedbáno
- to je prakticky přijatelné jen pokud výpočetní čas $< 1/10 h$, jinak musí mít diskretní regulátor aspoň zpoždění 1 krok
- stupeň čitatele v $z <$ stupeň jmenovatele v z (dostaneme ho třeba tak, že v MPZ metodě stupeň nedorovnáme)
- anebo to zpoždění musíme „přidat“ do soustavy
- nejde o dopravní zpoždění, je to jen způsob indexování

