# Příklady k přednášce 23 – Diskrétní systémy

Michael Šebek

Automatické řízení 2016

4-5-16

# Stavový a vnější popis

- Modely a převody v CSTbx

```
>> F=[1 2; 3 4]; G=[1 ;2]; H=[2 1]; J=0;
>> Pss = ss(F,G,H,J,-1)
a =      x1   x2
   x1    1    2
   x2    3    4
b =      u1
   x1    1
   x2    2
c =      x1   x2
   y1    2    1
d =      u1
   y1    0
Sampling time: unspecified
Discrete-time model.
>> Ptf=tf(Fss)
Transfer function:
   4 z + 1
-------------
z^2 - 5 z - 2
Sampling time: unspecified

>> Psdf = sdf(Pss)
Psdf =
       1 + 4z
    -------------
    -2 - 5z + z^2
```

# Odezva dlouhým dělením

- Vzor k danému (racionálnímu) z-obrazu lze také najít „dlouhým dělením," které
- nekončí výpočtem zbytku, ale pokračuje „do záporných mocnin"
- Toho můžeme využít k výpočtu odezvy pro přenosy v $z$

$$\frac{z}{z+1} = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - \cdots$$

i v $z^{-1}$

$$\frac{1}{1+z^{-1}} = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - \cdots$$

$$\frac{1}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots$$

$$\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} = \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \cdots$$

# Přenosy v $z$ a v $z^{-1} = d$

Příklady převodů: zkoumejte ryzost, řád apod.

$$\frac{b(z)}{a(z)} = \frac{z}{1+z^2} = \frac{z}{1+z^2}\frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}} = \frac{d}{1+d^2} = \frac{\hat{b}(d)}{\hat{a}(d)}$$

$$\frac{b(z)}{a(z)} = \frac{z^2}{1+z^2} = \frac{z^2}{1+z^2}\frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{1}{1+z^{-2}} = \frac{1}{1+d^2} = \frac{\hat{b}(d)}{\hat{a}(d)}$$

$$\frac{b(z)}{a(z)} = \frac{z^2}{1+z} = \frac{z^2}{1+z}\frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{1}{z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1}{d+d^2} = \frac{\hat{b}(d)}{\hat{a}(d)}$$

$$\frac{b(z)}{a(z)} = \frac{1}{z^2} = z^{-2} = d^2 = \frac{\hat{b}(d)}{\hat{a}(d)}$$

# Póly a nuly $z$ a v $z^{-1} = d$

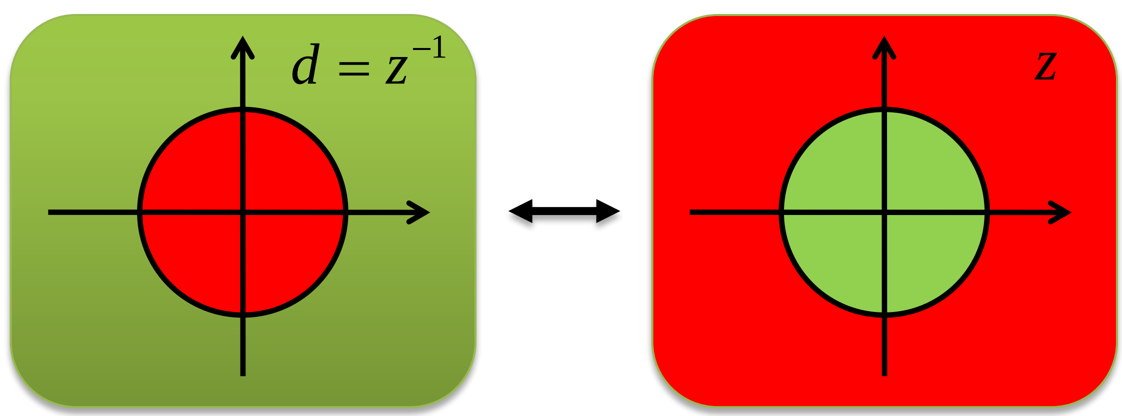
Změna operátoru (komplexní proměnné): $z \;\rightarrow\; f(z) = z^{-1} = d$

- je kruhová inverze plus reflexe (překlopení) podle reálné osy

$0 \leftrightarrow \infty$ $\quad 1 \leftrightarrow 1$ $\quad -1 \leftrightarrow -1$ $\quad -\tfrac{1}{2} \leftrightarrow -2$

$j \leftrightarrow -j$ $\quad 2j \leftrightarrow -\tfrac{1}{2}j$ $\quad 1 + j \leftrightarrow \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}j$

- Oblasti stability a nestability jsou překlopené



# Póly a nuly v $z$ a $s$

- Pro návrh diskrétního řízení pro diskrétní soustavu metodou umístění pólů s danými specifikacemi v časové oblasti potřebujeme vědět, kam je máme umístit?
- Můžeme využít vzorců pro spojitý případ ve spojení se vzorcem pro póly/nuly vzorkovaného systému

- Pro soustavu 1. řádu

$$z_1 = e^{hs_1}$$

- Pro soustavu 2. řádu

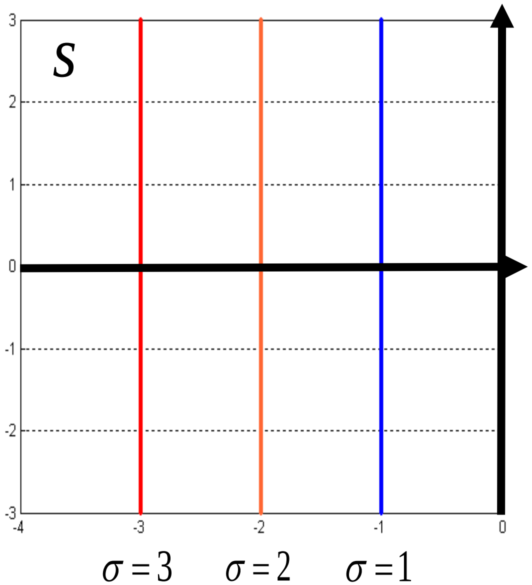
$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{hs_{1,2}} \\ &= e^{h(-\sigma \pm j\omega_d)} \\ &= e^{h(-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} \\ &= e^{\omega_n h(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})} \end{aligned}$$

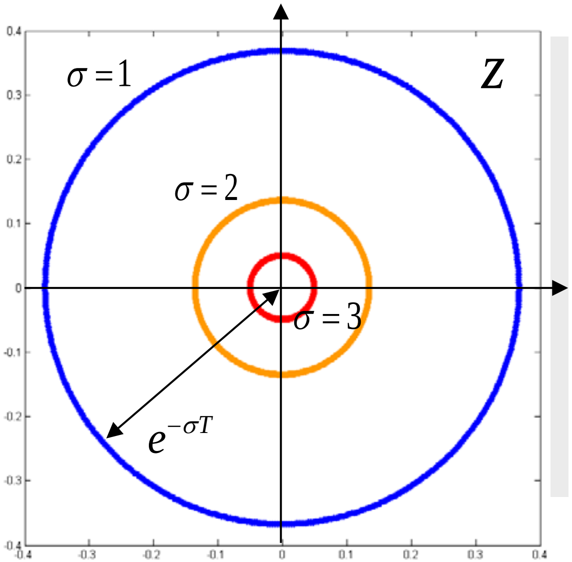
# Doba ustálení $T_s$

## Stejná doba ustálení $T_s = \dfrac{k}{\sigma}$

- v $s$-rovině póly ležící na vertikálních přímkách $\sigma$ = konst.
- v $z$-rovině jim odpovídají soustředné kružnice se středem v počátku $e^{-\sigma h} = \mathrm{konst}$

$$
\begin{aligned}
z &= e^{hs} \\
&= e^{h(-\sigma \pm j\omega_d)} \\
&= e^{h(-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} \\
&= e^{\omega_n h(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})}
\end{aligned}
$$



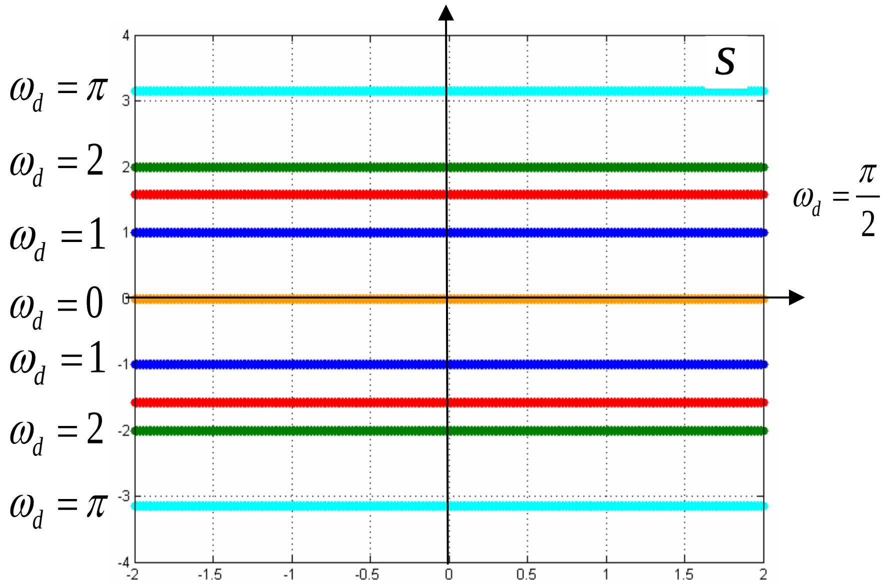
# Okamžik prvého maxima $T_p$

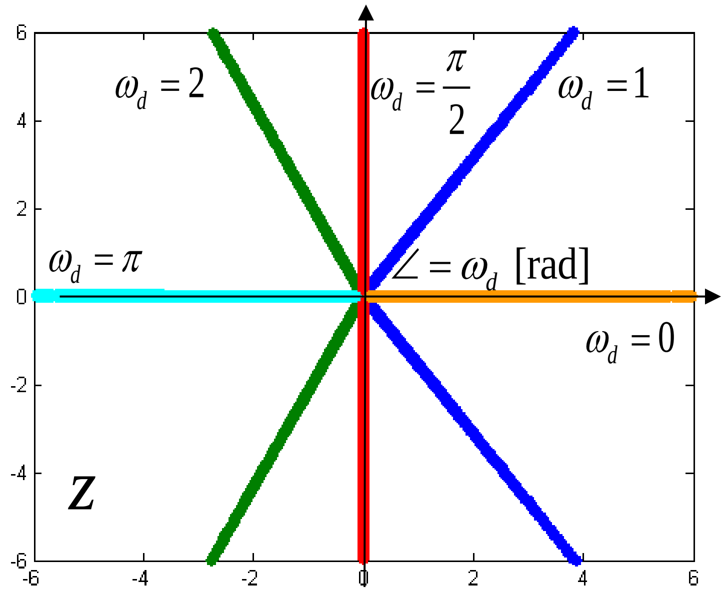
## Stejný okamžik prvého maxima

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$z = e^{hs} = e^{h(-\sigma \pm j\omega_d)} = e^{h(-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} = e^{\omega_n h(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})}$$

- v $s$-rovině horizontální přímky $\omega_d$ = konst.
- v $z$-rovině jim odpovídají radiální polopřímky vycházející z počátku $e^{\pm j\omega_d h} = \text{konst}$



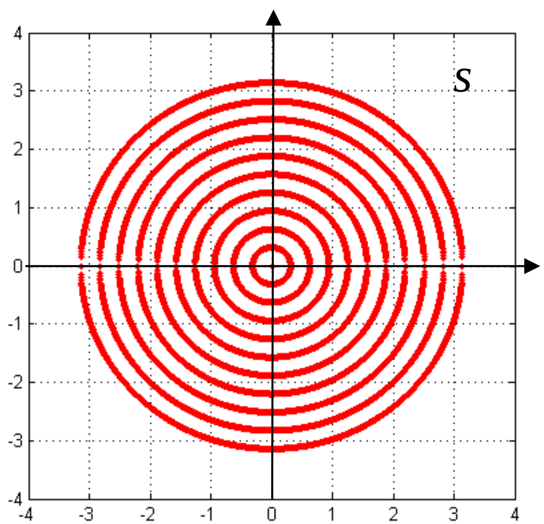
# Stejná doba náběhu $T_r$

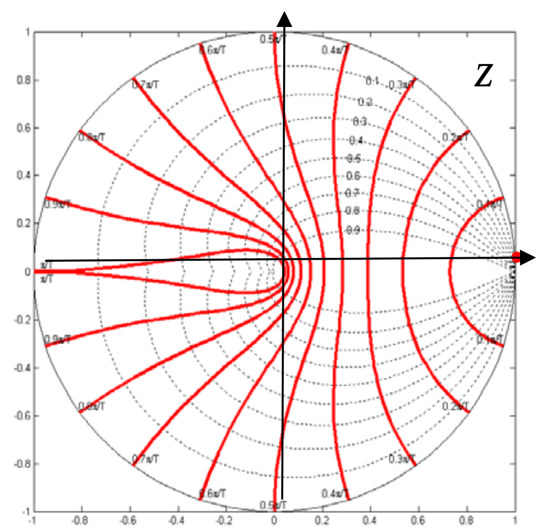
## Stejná doba náběhu

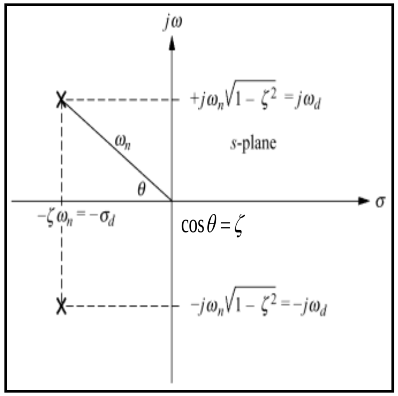
$$T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

$$\begin{aligned} z &= e^{hs} \\ &= e^{h(-\sigma \pm j\omega_d)} \\ &= e^{h(-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} \\ &= e^{\omega_n h(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})} \end{aligned}$$

- v $s$-rovině póly ležící na soustředných kružnicích $\omega_n$ = konst.
- v $z$-rovině jim odpovídají křivky



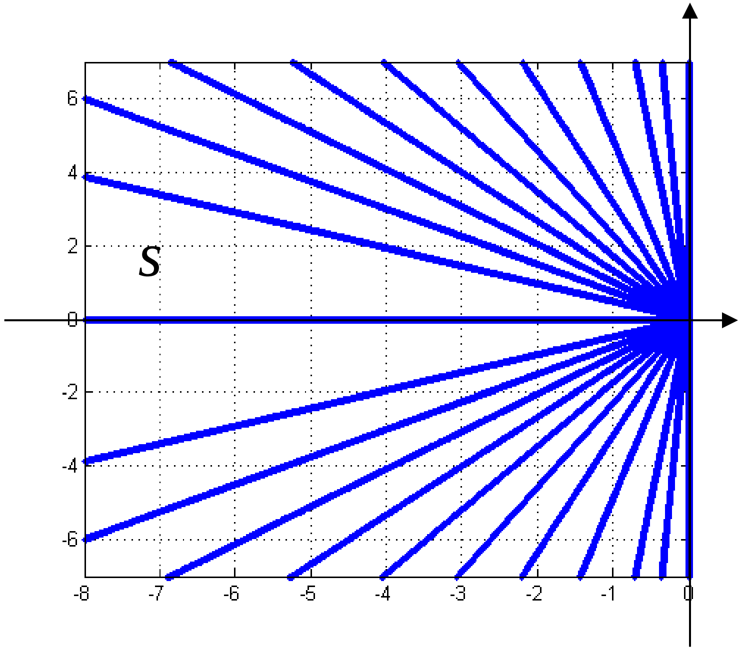



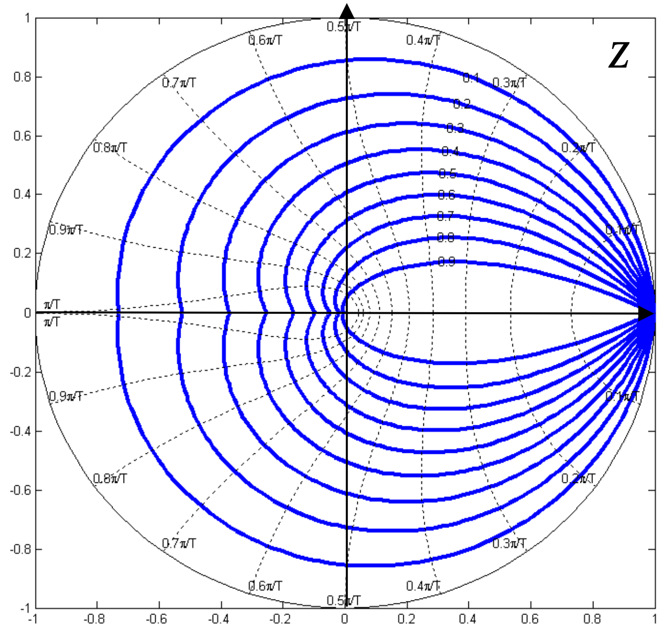
# Stejný překmit a tlumení



- Stejný překmit $\%OS = 100 \times e^{-(\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2})}$ a tlumení
- v $s$-rovině mu odpovídají přímky procházející počátkem
- v $z$-rovině části spirál (pro rostoucí velikost $s$ se kroutí kolem bodu 0)

$$
\begin{aligned}
z &= e^{hs} \\
&= e^{h(-\sigma \pm j\omega_d)} \\
&= e^{h(-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} \\
&= e^{\omega_n h(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})}
\end{aligned}
$$



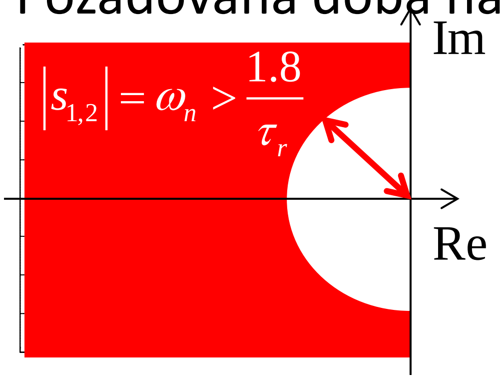



# Požadavky na odezvu pomocí polohy pólu: Řád 2



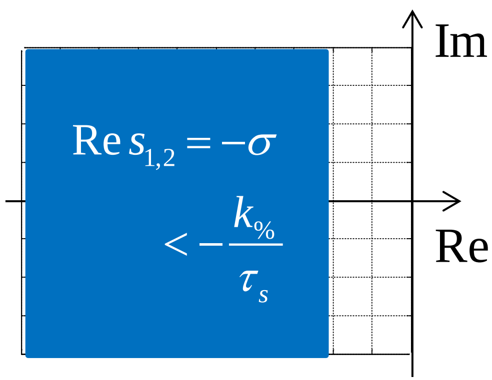
Spojité $s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

- Požadovaná doba náběhu



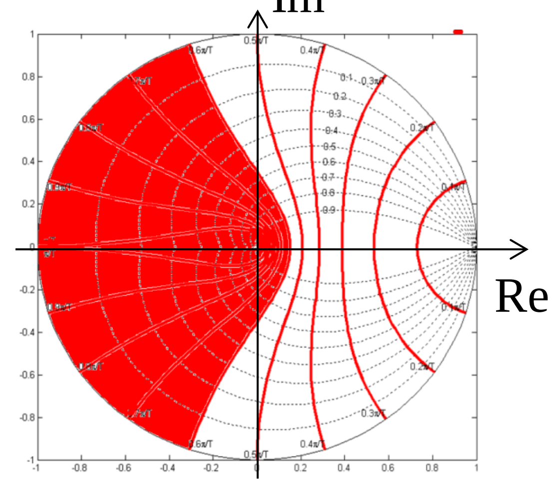

- Požadovaná doba ustálení

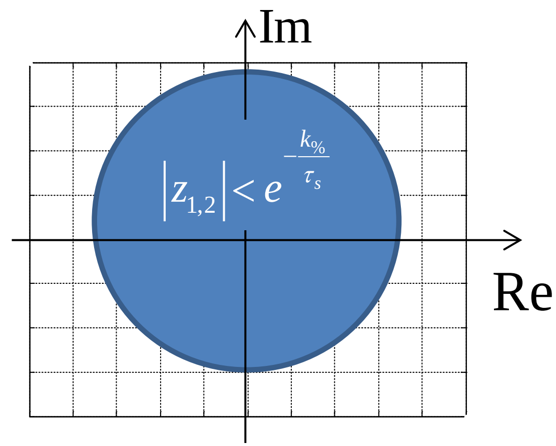
$$T_s < \tau_s \Leftrightarrow \operatorname{Re} s_{1,2} = -\sigma < -\frac{k_{\%}}{\tau_s}$$




Diskrétní

$$z_{1,2} = e^{hs_{1,2}} = e^{h(-\sigma \pm j\omega_d)} = e^{h(-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})}$$



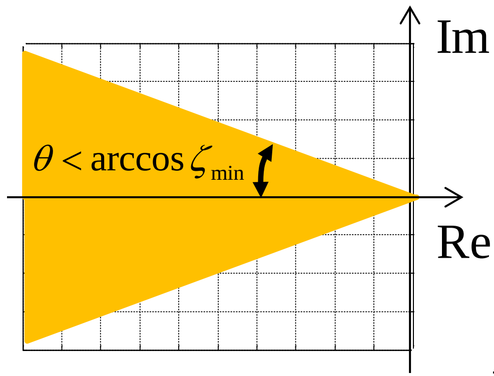



# Požadavky na odezvu pomocí polohy pólu: Řád 2



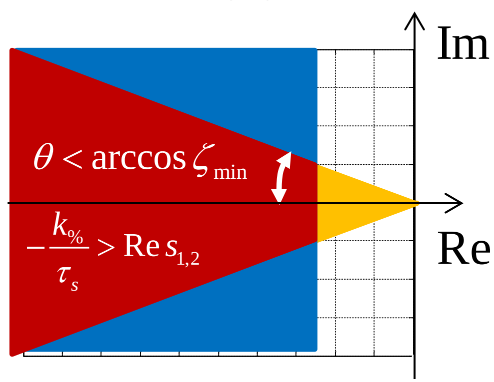
**Spojité** $s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

- Požadovaný překmit



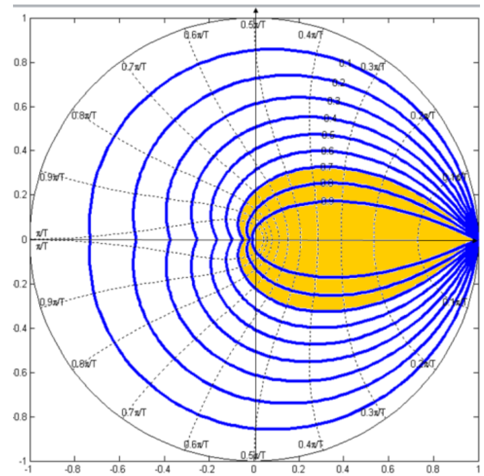

$$\zeta_{\min} = \frac{-\ln\left(p_{\max}/100\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(p_{\max}/100\right)}}$$

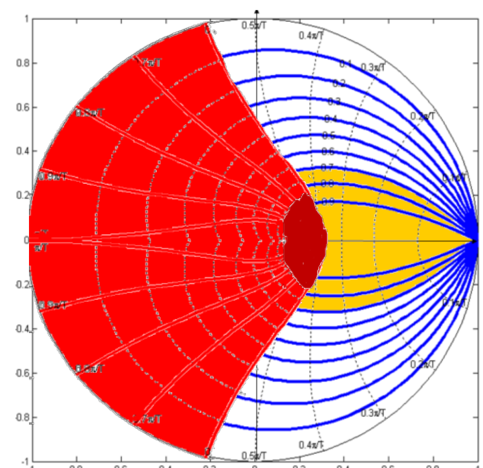
- Požadovaný překmit a




**Diskrétní** $z_{1,2} = e^{hs_{1,2}} = e^{h(-\sigma \pm j\omega_d)}$

$= e^{h(-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})}$



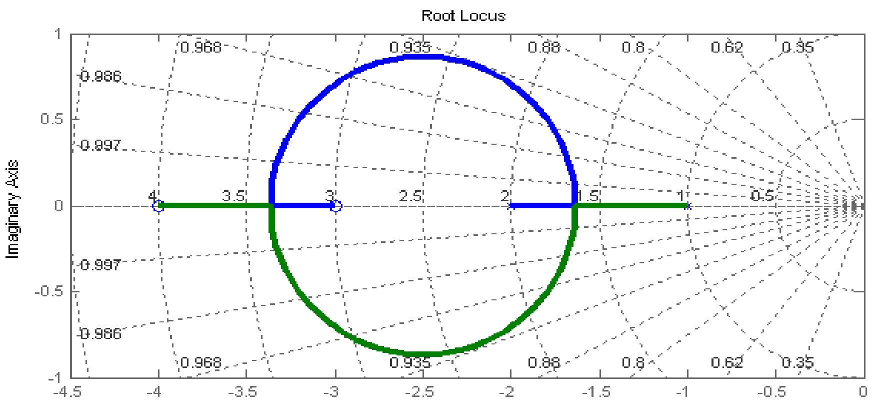


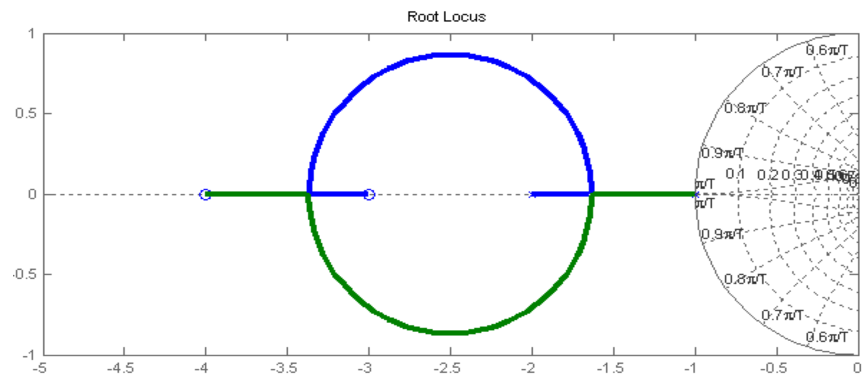
# Diskrétní Root Locus

- graf CL pólů v závislosti na *K*, tj. graf nul výrazu $1+KL(z)=0$
- graf se kreslí podle stejných pravidel, jako ve spojitém případě
- ale interpretace jeho polohy je samozřejmě jiná

```
>> Ls=(s+3)*(s+4)/(s+1)/(s+2)
Ls = 12+7s+s^2 / 2+3s+s^2
>> rlocus(Ls),sgrid
```

```
>> Lz=(z+3)*(z+4)/(z+1)/(z+2)
Ls = 12+7z+z^2 / 2+3z+z^2
>> rlocus(Lz),zgrid
```




všude stabilní

všude nestabilní

# Diskrétní Nyquistovo kritérium stability



## Diskrétní

CL systém má $Z = P - N$ nestabilních pólů, kde

$N$ ... počet bodu -1 Nyquistovým grafem $L(s)$

$P$ ... počet nestabilních OL pólů.

## Spojitý pro srovnání

$Z = N + P$

ale tady je $N$

## Nyquistovo kritérium stability

CL systém je stabilní $\Leftrightarrow$ $P = N$

$N$ ... počet obkroužení Nyquistova grafu $L(s)$

$P$ ... počet nestabilních OL pólů

$P = -N$

ale tady je $-N$ , takže je to vlastně stejně

Zvláštní případ:

## Nyquistovo kritérium stability pro stabilní OL systém

Je-li OL systém stabilní, pak je i CL systém stabilní

$\Leftrightarrow$ Nyquistův graf $L(s)$ neobkrouží kritický bod -1

# Paralelní odvození obojího - pro srovnání

$n$ … počet nul fce $H(z)$ (= OL pólů) = počet pólů $H(z)$ (= CL pólů)

$Z$ … počet nestabilních CL pólů = počet nestabilních nul funkce

$P$ … počet nestabilních OL pólů = počet nestabilních nul funkce

$N$ … počet obkroužení kritického bodu -1 Nyquistovým grafem

ve stejném směru, ve kterém obkružujeme uvažovanou oblast

## Spojitý

- obkružujeme oblast nestability
  po směru hodinových ručiček
- z Principu argumentu plyne
  $$N = Z - P$$
- Z toho plyne
  $$Z = P + N$$
- CL stabilní když $Z = 0$, tj. když
  $$P = -N$$
  tedy obkroužení opačným směrem
- tedy proti směru hodin. ručiček

## Diskrétní

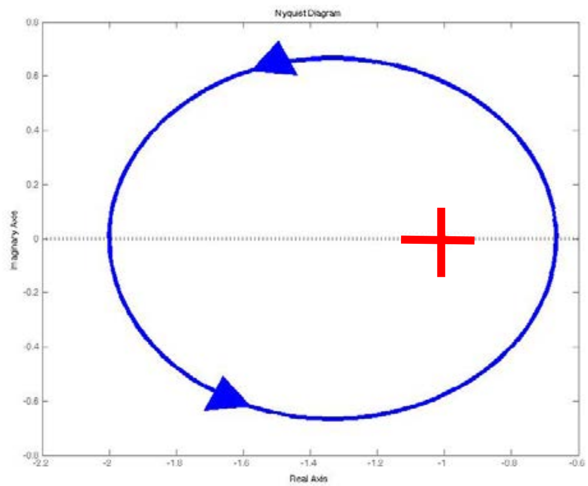
- obkružujeme oblast stability
  proti směru hodinových ručiček
- z Principu argumentu plyne
  $$N = (n - Z) - (n - P) = P - Z$$
- z toho plyne
  $$Z = P - N$$
- CL stabilní když $Z = 0$, tj. když
  $$P = N$$
  tedy obkroužení stejným směrem
- tedy proti směru hodinových ručiček

# Příklad

- Přenos otevřené smyčky je nestabilní, tedy $P = 1$

$$L(z) = \frac{2}{z-2}$$

- Nyquistův graf je



```
>> a=z-2,b=2
a =
     -2 + z
b =
      2
>> nyquist(b/a)
>> a+b
ans = z
```

tedy je $N = 1$ a

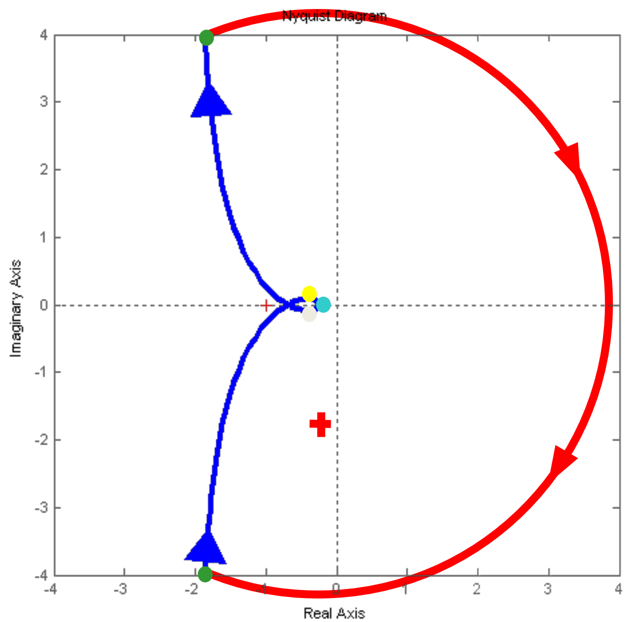
- podle kritéria bude uzavřená smyčka stabilní
- Opravdu je stabilní,
  charakteristický polynom uzavřené smyčky je $c(z) = (z-2) + 2 = z$

# Příklad

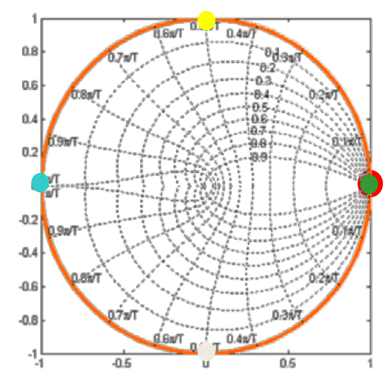
Vyhodnoťte CL stabilitu diskrétního systému se soustavou $G(s)=1/s(s+1)$

- vzorkovanou s frekvencí 0.5 Hz (tj. s periodou vzorkování $T=2$ s)
- s tvarovacím členem nultého řádu (ZOH)
- a diskrétním proporcionálním regulátorem $L(z)=KG(z)$

```
>> G=1/(1+s)/s
G = 1 / s(s+1)
>> Gz3=c2d(tf(G),2)
Transfer function:
   1.135z + 0.594
--------------------
z^2 - 1.135z + 0.1353
Sampling time: 2
>> zpk(Gz3)
Zero/pole/gain:
1.1353 (z+0.5232)
----------------
(z-1) (z-0.1353)
Sampling time: 2
K=1;Lz=K*Gz3;
nyquist(Lz)
```




$$N=0, P=0 \Rightarrow Z=0$$

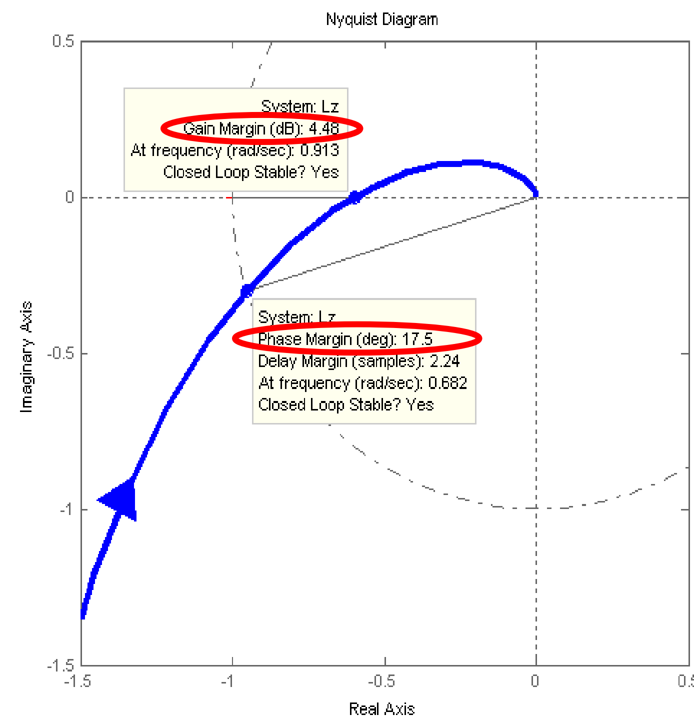


```
>> pformat rootc
>> Gzp=sdf(Gz3);
>> K=1;Lz=K*Gzp;
>> cl_char=Lz.num+Lz.den
cl_char =
  (z+0.8540i)(z-0.8540i)
>> isstable(cl_har_pol)
ans = 1
```

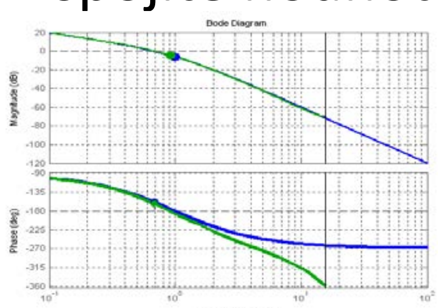
# Příklad: Diskrétní PM a GM

- Pro soustavu $G(s) = 1/s(s+1)^2$ vzorkovanou s frekvencí $5\,\mathrm{Hz}$, ZOH a diskrétní P regulátor s $K = 1$
- najděte diskrétní PM a GM

```
>> Gz=c2d(tf(1/(1+s)^2/s),1/5,'zoh');
>> zpk(Gz)
Zero/pole/gain:
0.0012077(z+3.381)(z+0.2422)
----------------------------
      (z-1)(z-0.8187)^2
Sampling time: 0.2
>> Lz=Gz;nyquist(Lz)
```




- GM ≈ 1.7 ≈ 5dB, PM ≈ 17.5º
- spojité hodnoty skoro stejné:




GM ≈ 6dB

PM ≈ 21º

Korekce:

$$PM_{\text{dis}} = PM_{\text{spoj}} - \Delta\varphi = PM_{\text{spoj}} - 29\omega T_s$$

$$= 21^\circ - 29^\circ \times 0.6 \times 0.2 = 21^\circ - 3.5^\circ = 17.5^\circ$$