

Příklady k přednášce 26 – Nelineární systémy a řízení



Michael Šebek
Automatické řízení 2018



Příklad: Nelineární stabilizace integrátoru

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Porovnejte lineární stabilizaci integrátoru

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ u = -x \end{array} \right\} \dot{x} = -x$$

- s nelineární stabilizací

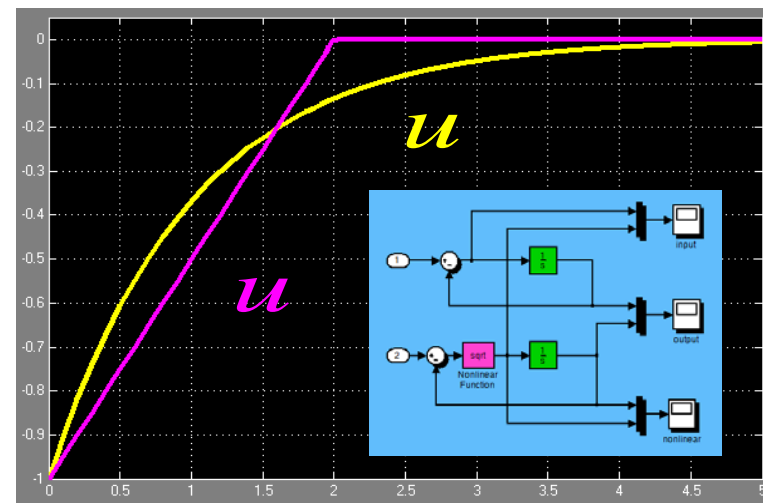
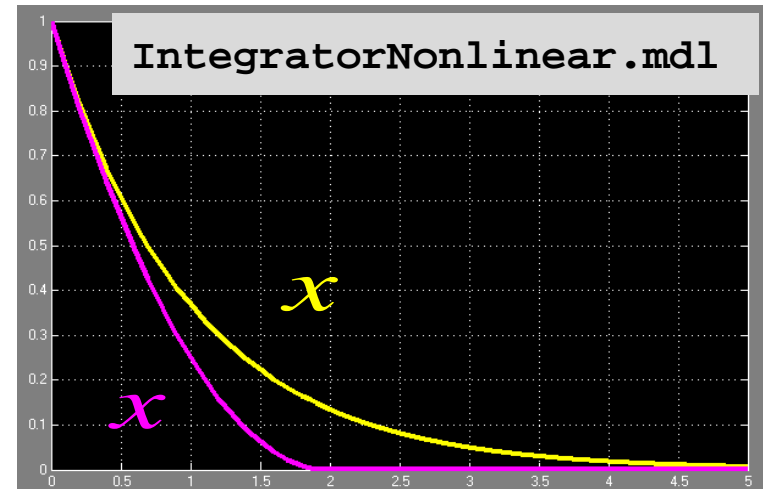
$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ u = -(\text{sign } x) \sqrt{|x|} \end{array} \right\} \dot{x} = -(\text{sign } x) \sqrt{|x|}$$

typu „spojitý deadbeat“

- Vhodná Lyapunovova funkce je

$$V(x) = x^2/2$$

$$V'(x) = x \text{ sign}(x) \sqrt{|x|} < 0 \quad \forall x \neq 0$$



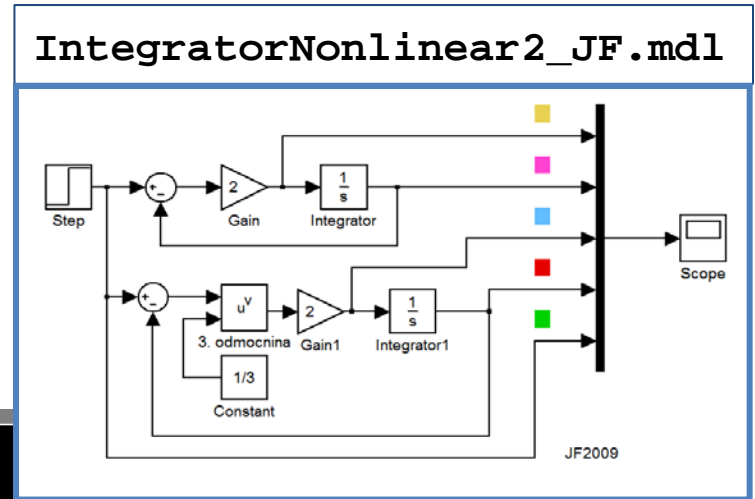
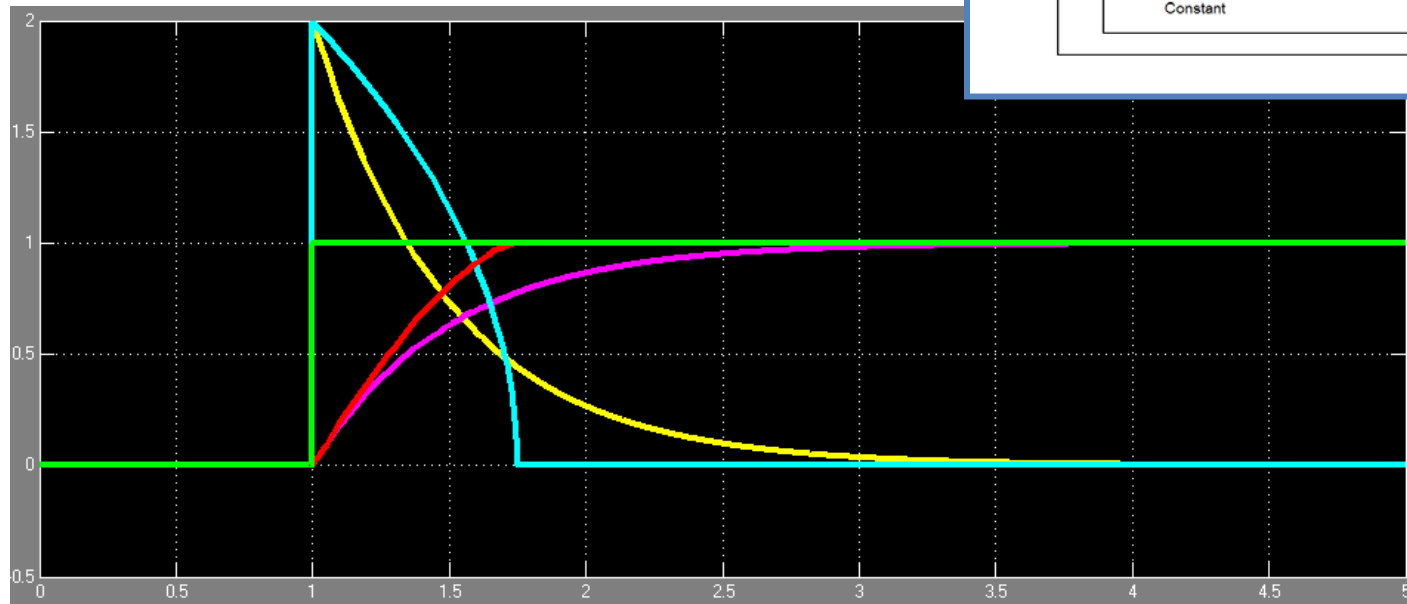


Příklad: Nelineární stabilizace integrátoru

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Jiná nelineární stabilizace je

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ u = -2\sqrt[3]{x} \end{array} \right\} \dot{x} = -2\sqrt[3]{x}$$



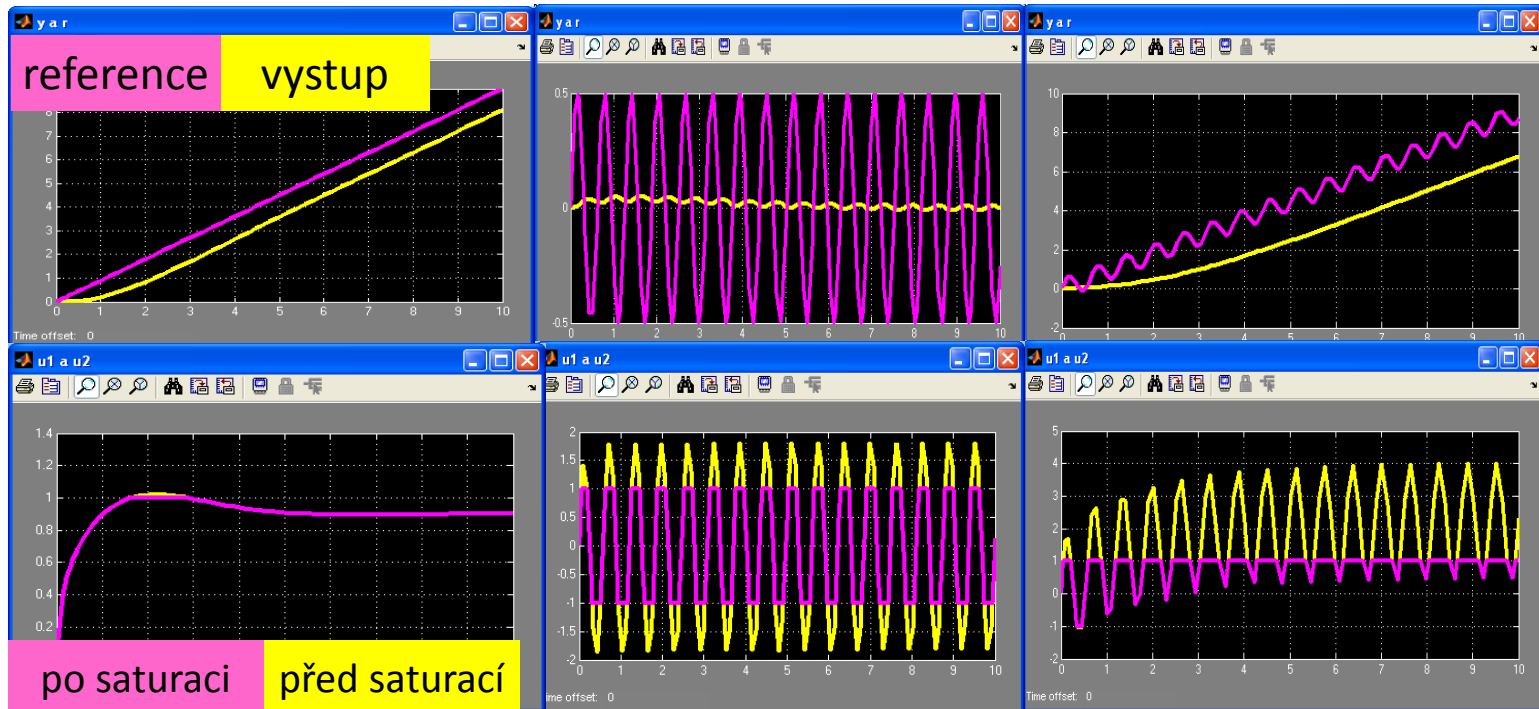
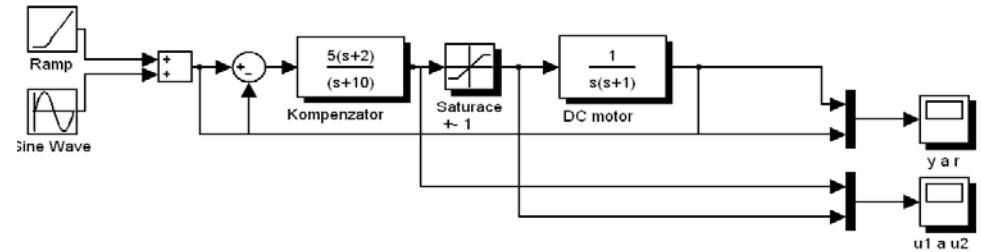


Příklad: Nelineární systém s lineární ZV

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

DC motor s omezením - odezva na rampu, sinus a součet rampa+sinus

- nefunguje superpozice
- ne-věrnost frekvence
- hůř sleduje

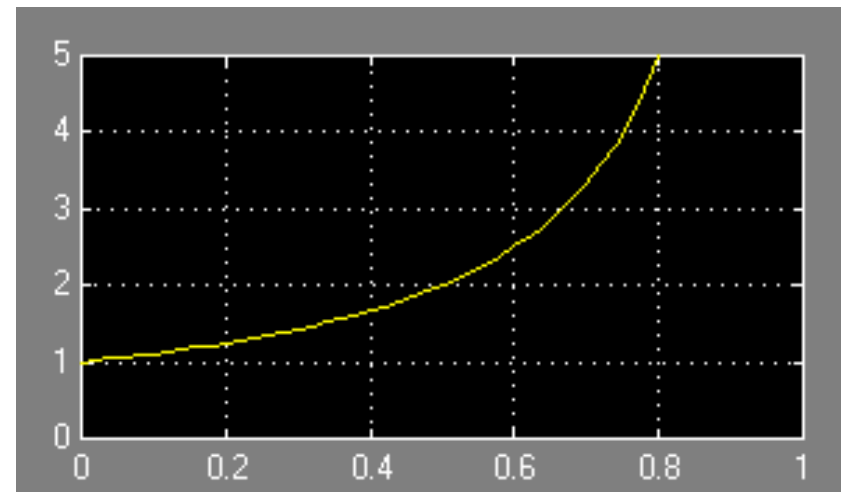
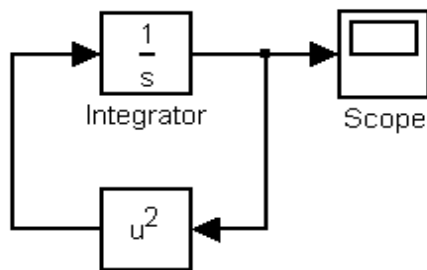




Příklad: Únik v konečném čase

- Jak rychle „uteče nelineární systém do nekonečna“? Až v nekonečném čase!
- Nelineární systém může utéct v čase konečném:
- rovnice $\dot{x} = x^2$ s počátečním stavem $x(0) = 1$
- má hyperbolické řešení

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$





Příklad: Více izolovaných ekvilibríí

System je v ekvilibriu, když jsou všechny stavové proměnné konstantní

- ekvilibrum je dáno konstantními vektory x_e, u_e takovými, že

$$\dot{x}_e = f(x_e, u_e) = 0$$

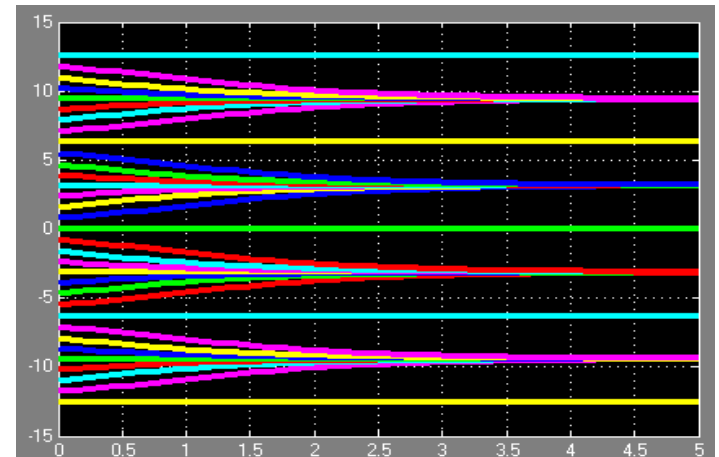
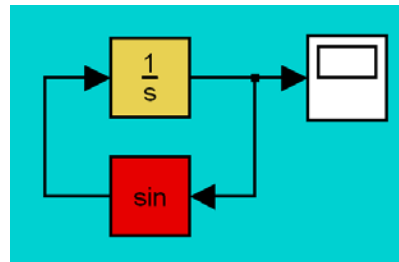
- z této rovnice ho vypočteme, nejčastěji pro $u_e = 0$
- LTI má většinou **jediný** ustálený stav v nule
(výjimečně podprostor ustálených stavů pro A singularní)
- Nelineární systém může mít více **izolovaných ekvilibríí**

$$\dot{x} = \sin(x)$$

$$0 = \sin(x_e)$$



$$x_e = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$$





Srovnání: Lineární a nelineární oscilátor

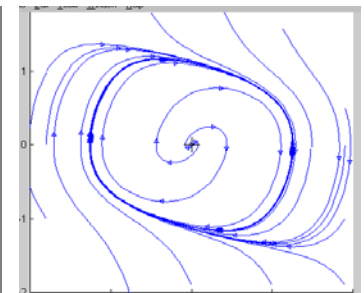
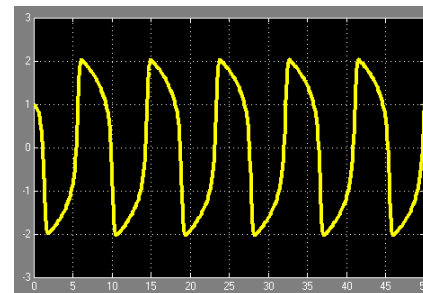
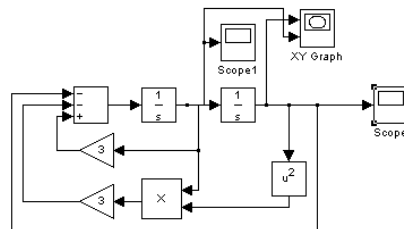
Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Lineární oscilátor $\ddot{x} + x = 0$

- může oscilovat (když má póly na imaginární ose), ale
- oscilace jsou **nestabilní** (póly jsou na mezi stability) a
- jejich **amplituda závisí na počátečních podmínkách**

Nelineární oscilátor $\ddot{x} + x + 3(x^2 - 1)\dot{x} = 0$

- jen nelineární systém může mít stabilní oscilace s pevnou amplitudou a frekvencí nezávisle na poč. stavu, tzv. limitní cykly
- např. **van der Polova rovnice** (model stahů srdce, nerv. pulsů, stahů svalů v jícnu a střevech,...



- další známé oscilátory: Raleigh: klarinet, housle, Voltera: populace

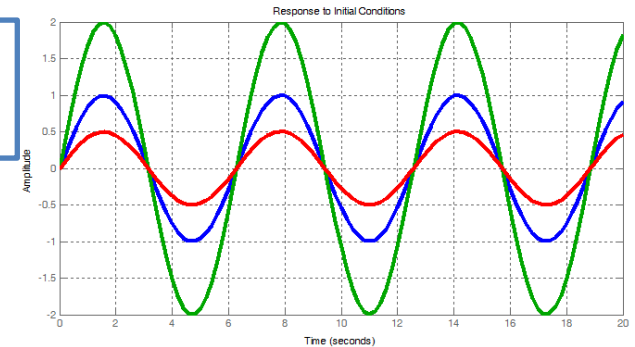


Příklad: Špatné vlastnosti lineárního oscilátor

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- LTI může oscilovat (když má póly na imaginární ose), ale
- jejich amplituda závisí na počátečních podmínkách $\ddot{x} + x = 0$

```
>> sys=ss(1/(s^2+1));initial(sys,[1,0],20), hold
>>initial(sys,[2,0],20),initial(sys,[.5,0],20)
```

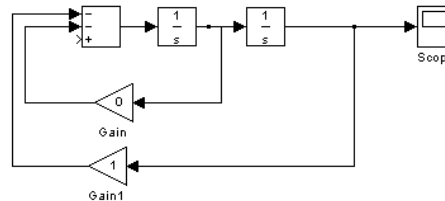


- a oscilace jsou nestabilní (póly na mezi stability)

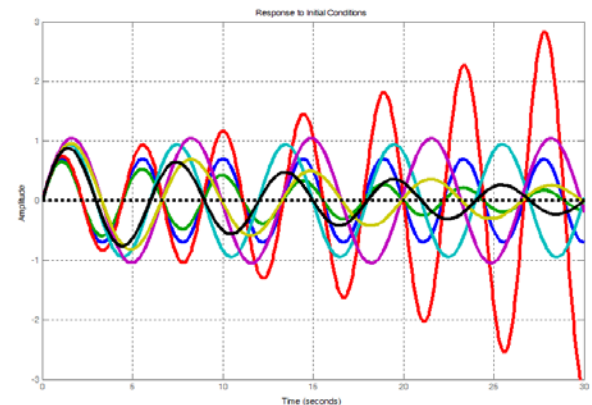
- Uvažme perturbovaný oscilátor $\ddot{x} + \varepsilon_1 \dot{x} + (1 + \varepsilon_0)x = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4 + 4\varepsilon_0 - \varepsilon_1^2}}{2}$$

$$\varepsilon_1^2 < 4 + 4\varepsilon_0$$



```
>> eps1=0;eps0=1;sys=ss(1/(s^2+eps1*s+1+eps0));
>> initial(sys,[1,0],30),hold
>> eps1=0.1;eps0=1; // atd.
```





Co ještě může nastat u nelineárních systémů?

- řešení **neexistuje**: Např. rovnice $\dot{x} = -\text{sign}(x), \quad x(0) = 0$, kde $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \dots x \geq 0 \\ -1 & \dots x < 0 \end{cases}$ nemá žádné řešení (= žádná spojitě dif. fce ji nesplňuje), i když není zas tak nesmyslná: je to zjednodušený model termostatu
- řešení **není jednoznačné**: Např. rovnice $\dot{x} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0$ je řešitelná každou funkcí $x_a = \begin{cases} (t-a)^3 & \dots t \geq a \\ 0 & \dots t < a \end{cases}$ s libovolným a
- **bifurkace** (kvalitativní rysy se mění se změnou parametrů)
- **synchronizace** (vázané oscilátory se synchronizují)
- **složité dynamické chování** (turbulence, chaos, ...)



Příklad: Fázový portrét tlumeného kyvadla

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

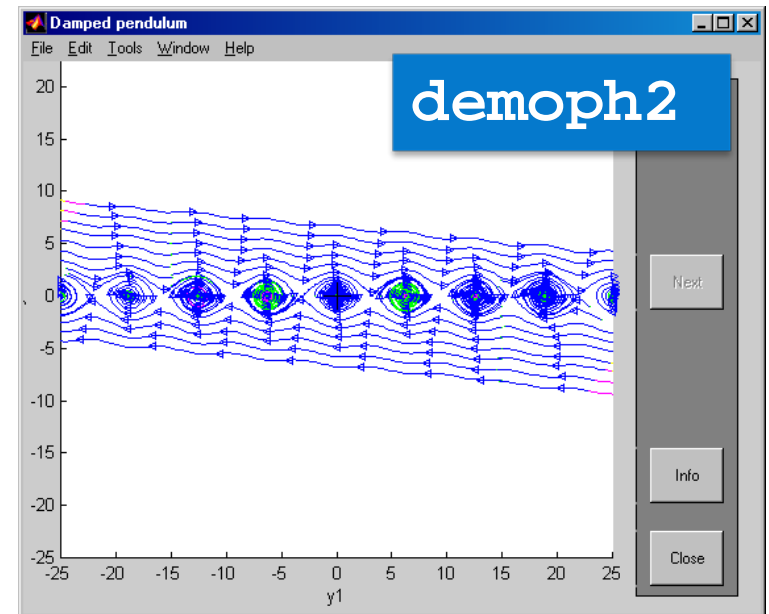
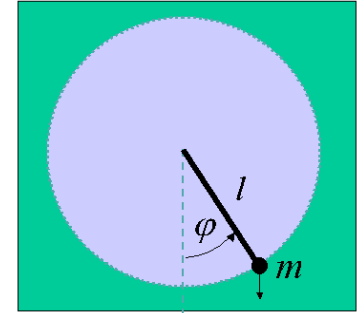
- Pohybová rovnice v tečném směru

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - kl\dot{\varphi}$$

- Pro stavové proměnné $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$ dostaneme
- nelineární stavový model

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1)\end{aligned}$$

- Fázový portrét je na obr.
- Vidíme např. stabilní a nestabilní ekvilibria



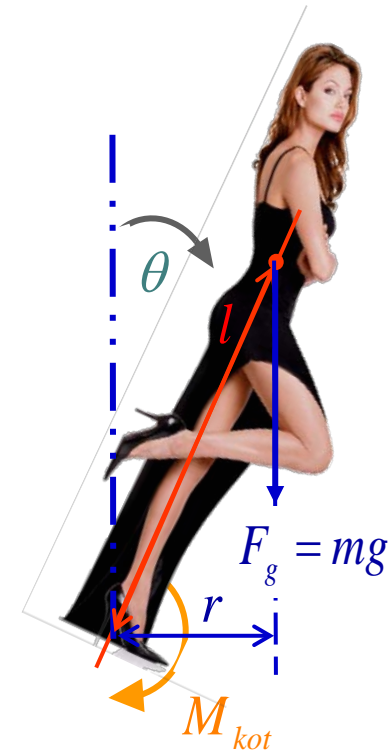
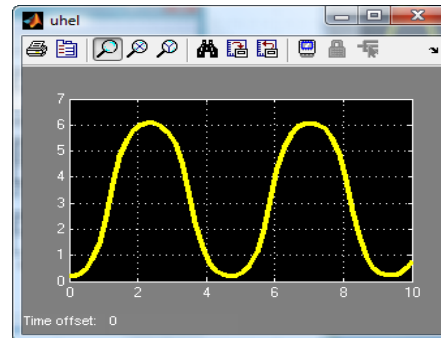
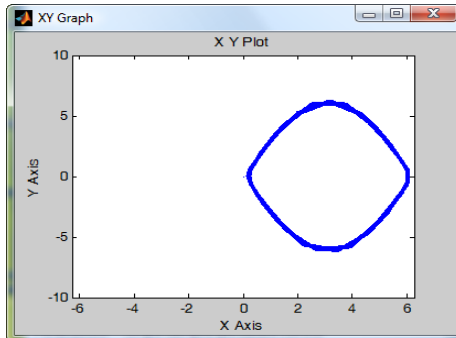
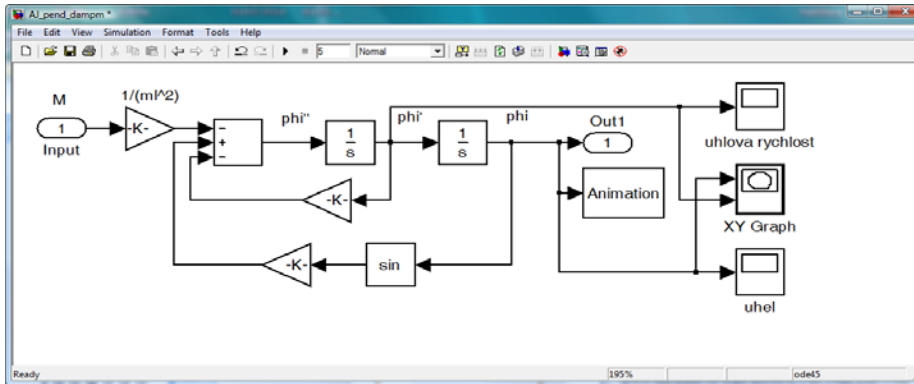


Příklad: Jiný portrét netlumeného kyvadla

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl}{J} \sin \theta + \frac{1}{J} M_{kot} \mapsto \ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{1}{ml^2} M_{kot}$$

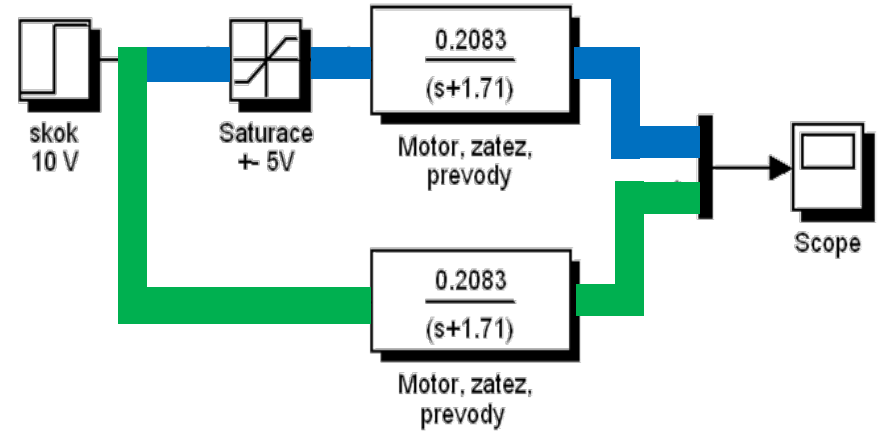
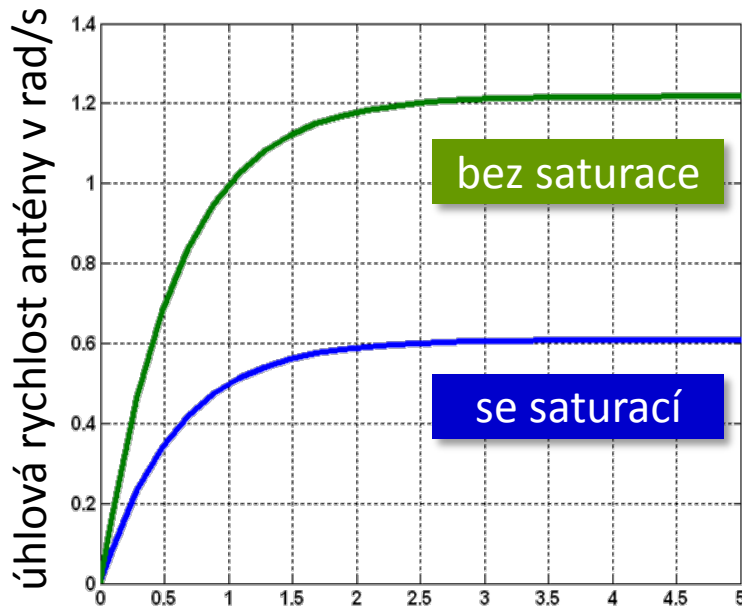
$$J = ml^2$$





Příklad: vliv saturace v aktuátoru

- Řízení motoru otáčejícím anténou
- se saturací v aktuátoru = výkonovém zesilovači
- Zesilovač má zesílení 1, ale také saturaci ± 5 V



Efekt saturace v zesilovači je podle očekávání:

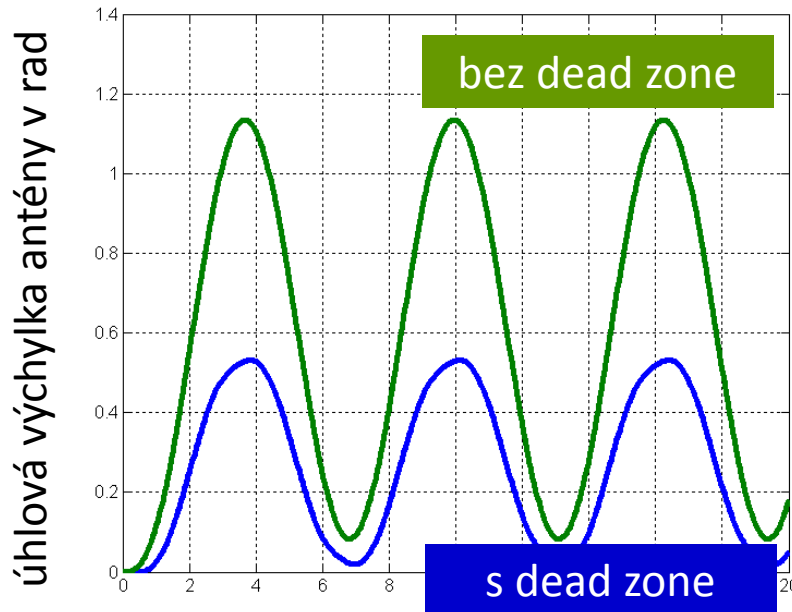
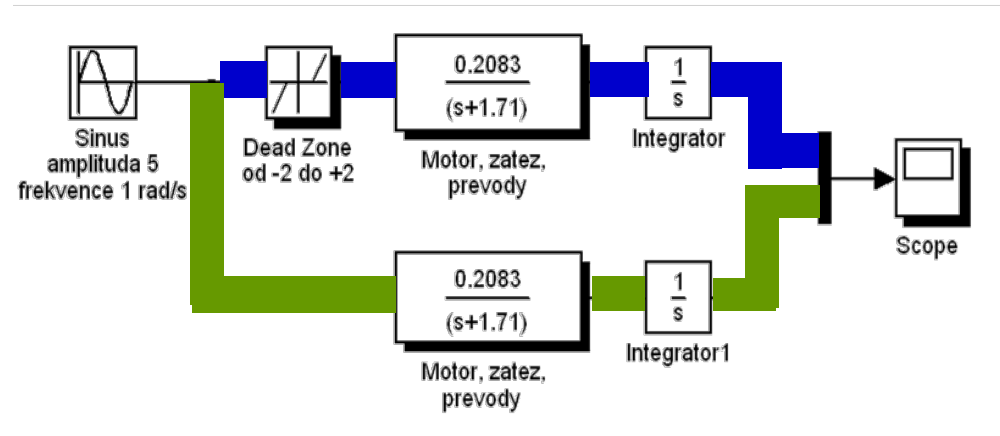
- saturace pouze zmenší skokový signál na vstupu
- a tomu odpovídá výstup



Příklad: Vliv pásma necitlivosti

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- pásmo necitlivosti
dead zone
- na výstupní hřídeli
- vstupní signály v pásmu od -2 V do +2 V nemají efekt na výstup (neotočí hřídeli)

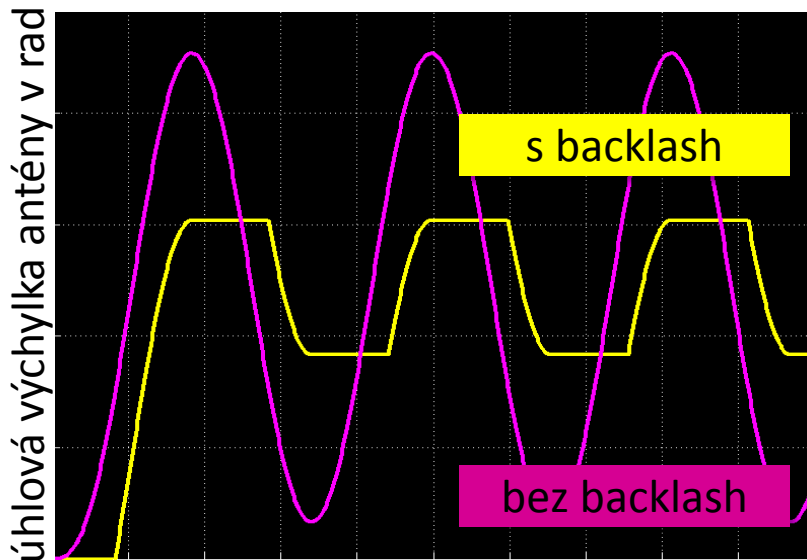
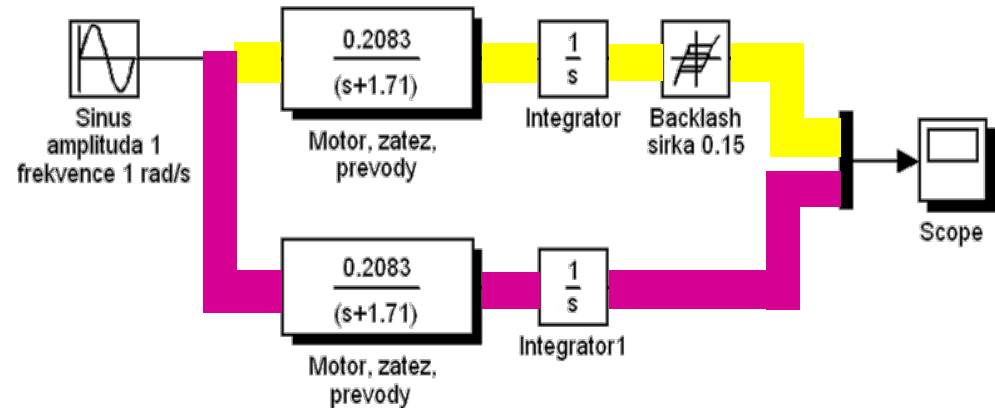


- dobře se projeví při sinusovém vstupním signálu
- hřídel reaguje teprve až vstupní signál překročí práh necitlivosti
- výsledkem je menší amplituda



Příklad: Vliv mrtvého chodu

- mrtvý chod - backlash
- vůle v ložiscích
- šířka pásma necitlivosti 0.15



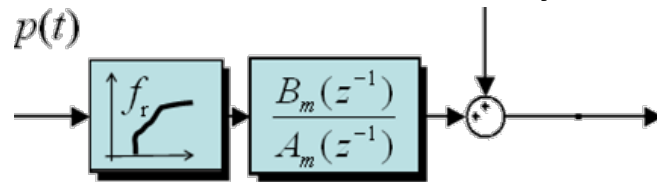
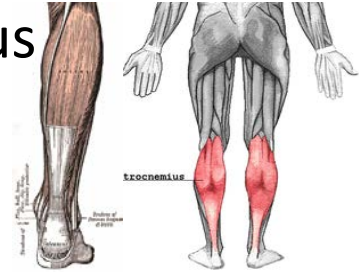
- dobře se projeví při sinusovém vstupním signálu
- po změně směru rotace motoru
- zůstane výstupní hřídel na chvíli v klidu
- „dokud ložiska nezaberou opačně“



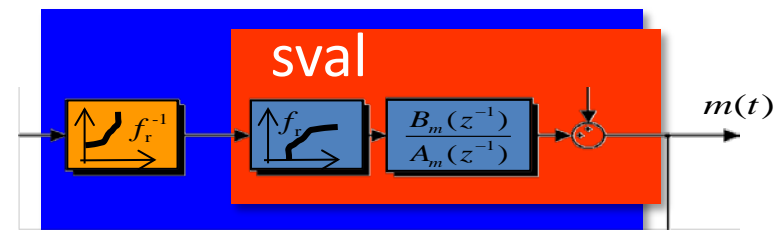
Příklad: Hammersteinův model lidského svalu

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Lýtkové svaly: triceps surae = Gastrocnemius + Soleus
- Jejich reakci na elektrickou stimulaci popisuje
- Hammersteinův empirický model: statická nelinearita + lineární dynamika



- z experimentální impulsní charakteristiky odvodíme tvar nelinearity
- a potom ji „vyrušíme“ umělou inverzí
- a z výsledkem je lineární systém
- Např. řízení momentu pro stabilizaci postoje paraplegika





Podivný příklad stability

- Může být ekvilibrum **stabilní asymptoticky, ale ne Lyapunovsky?**
- Uvažme systém s ekvilibríem (0,0)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2\end{aligned}$$

- pro $x_2(0) = 0$ má řešení

$$x_1(t) = \frac{x_1(0)}{1 - tx_1(0)}$$

$$x_2(t) = 0$$

- speciálně pro $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ má řešení

$$x_1(t) = \frac{1}{1-t}$$

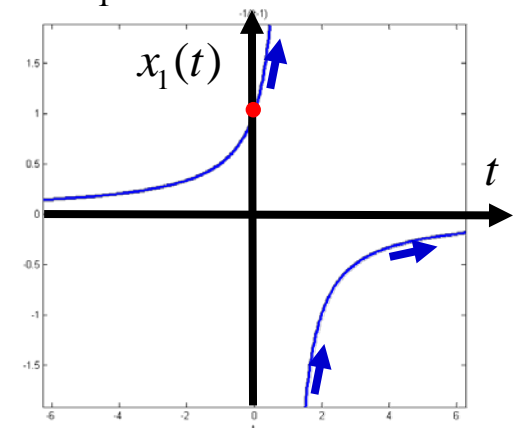
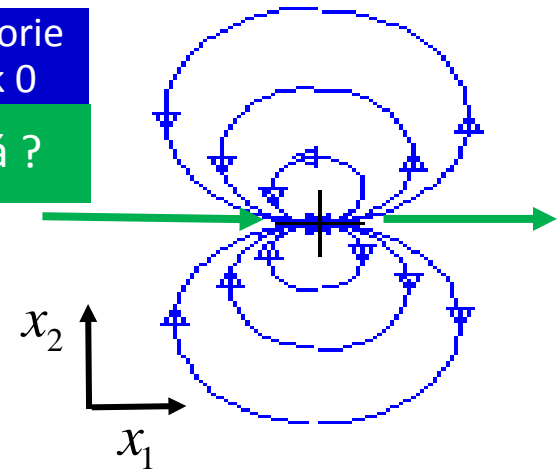
$$x_2(t) = 0$$

- také tato trajektorie asymptoticky konverguje k ekvilibríu, ale podivně: přes ∞ v čase $t=1$

fázový portrét

modré trajektorie konvergují k 0

a co zelená ?





Kdy je lineární systém Lyapunovsky stabilní?

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Zvláštním případem nelineárního systému je systém lineární: $\dot{x} = Ax$

- U lineárního systému je stabilita ekvilibria globální = **stabilitě systému**
- U lineárního systému **asymptotická stabilita implikuje Lyapunovskou**
- Kdy ještě je lineární systém Lyapunovsky stabilní? (není-li asymptoticky)

Role **vlastních čísel na mezi stability:**

- **Jednonásobná** vlastní čísla na mezi **neporuší Lyapunovskou stabilitu**
- Ale co vícenásobná?
- Neporuší ji taková vícenásobné vl. č. na mezi, pro která platí, že násobnost vl. č. = počet jeho lineárně nezávislých vlastních vektorů

Alternativně: násobnost vl. č. = počet jeho Jordanových bloků

Paralelní spojení
integrátorů **je**

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

Lyapunovsky stabilní

Kaskáda integrátorů
není

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

Lyapunovsky stabilní



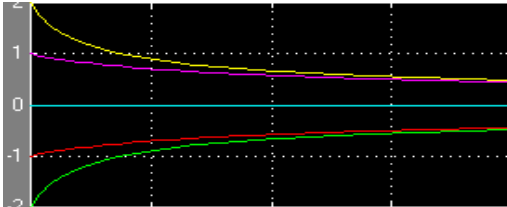
Příklad: Stabilní a nestabilní ekvilibrium

stabilní

nestabilní

Uvažme dva nelineární systémy: $\dot{x} = -x^3$ a $\dot{x} = -x^2$

- oba mají ekvilibrium v počátku $x_0 = 0$ a oba mají v jeho okolí
- stejnou linearizaci $\dot{x} = 0$ tj. $A = 0$, která má pól v $s = 0$



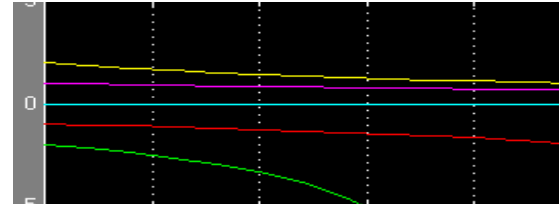
- „všechny pp. jdou k 0“

```

>> syms x0
>> sol=dsolve('Dx=-x^3','x(0)=x0')
sol = [ -1/(2*t+1/x0^2)^(1/2)]
       [ 1/(2*t+1/x0^2)^(1/2)]

```

- odmocnina z hyperboly posunuté do $-1/x_0^2$
- znaménko podle znaménka počáteční podmínky



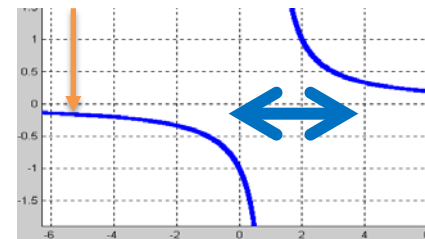
- jen kladné pp. jdou k 0

```

>> sol=dsolve('Dx=-x^2','x(0)=x0')
sol = 1/(t+1/x0)
>> sol=dsolve('Dx=-x^2','x(0)=-1')
sol = 1/(t-1)

```

- hyperbola posunutá do $-1/x_0$
- tj. pro $x_0 < 0$ druhá větev !



Pozor:
lim v ∞
nehraje roli



Jak zkoumat stabilitu - motivace

- Určíme stabilitu ekvilibria v počátku pro systém 2. řádu zkoumáním vzdálenosti jeho řešení od počátku $d^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$
- sledujeme její změnu jako funkce času podél tohoto řešení

Nejprve

- pro systém $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 \end{cases}$ je $d(x_1^2(t) + x_2^2(t))/dt = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$ dosazením rovnic systému dostaneme

$$d(x_1^2(t) + x_2^2(t))/dt = 2x_1(x_2 - x_1^3) + 2x_2(-x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4) \leq 0 \quad \forall t$$

dokud nejsou x_1 a x_2 současně 0, čtverec vzdálenosti klesá k 0 a řešení blíží k nule \rightarrow ekvilibrium je lokálně asymptoticky **stabilní**

Naopak

- pro systém $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^3 \end{cases}$ je $d(x_1^2(t) + x_2^2(t))/dt = 2x_1(x_2 + x_1^3) + 2x_2(-x_1 + x_2^3) = 2(x_1^4 + x_2^4) \geq 0 \quad \forall t$ tedy vzdálenost roste bez omezení \rightarrow ekvilibrium je **nestabilní**

Mimoходом: Oba systémy mají stejnou linearizaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

s vlastními čísly $\pm j$ stabilitu z ní nepoznáme

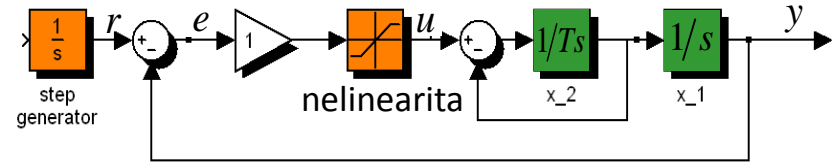


Příklad: Lyapunova funkce

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

Polohová ZV, Fe5 Ex 9.16, s. 695

- ZV od polohy + nelinearita v aktuátoru (saturace apod.)
- statická nelinearita s grafem procházejícím 1. a 3. kvadrantem



a s rovnicí $u = f(e)$ takovou, že

$$\int_0^e f(\sigma) d\sigma > 0 \quad \text{a} \quad f(e) = 0 \Rightarrow e = 0$$

- celkový systém je popsán rovnicemi

$$\dot{e} = -x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2/T + f(e)/T, \quad T > 0$$

- Zkusme Lyapunovovu funkci ve tvaru **potenciální + kinetická energie**

$$V = \frac{T}{2} x_2^2 + \int_0^e f(\sigma) d\sigma$$

- Zřejmě je $V = 0 \Leftrightarrow x_2 = e = 0$ a $V > 0 \Leftrightarrow x_2^2 + e^2 \neq 0$

- Zbývá ověřit 3. podmínku



- vypočteme derivaci dle trajektorie

$$\dot{V} = Tx_2 \dot{x}_2 + f(e)\dot{e} = Tx_2 \left[-\frac{1}{T}x_2 + \frac{f(e)}{T} \right] + f(e)(-x_2) = -x_2^2$$

- zřejmě platí $\dot{V} \leq 0$

- takže počátek je Lyapunovsky stabilní ekvilibrum

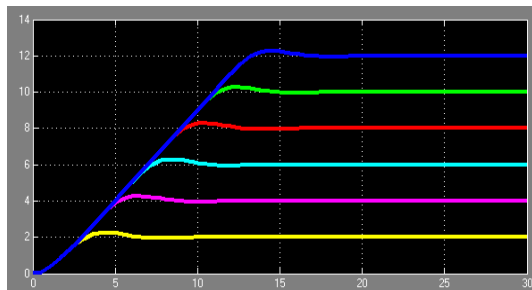
- Dále je zřejmě \dot{V} vždy klesající pro $x_2 \neq 0$

- a k tomu ještě žádná trajektorie kromě $x_2 = 0$ nemá $V(x_2) = 0$

- počátek je dokonce globálně asymptoticky stabilní a celý systém je asymptoticky stabilní

- Zopakujme, že nelinearita musí splňovat tyto podmínky:

- Simulace:



$$\int_0^e f(e)de > 0$$

$$f(e) = 0 \Rightarrow e = 0$$



Příklad: Lyapunova fce pro lineární systém

- Speciálně pro LTI $\dot{x} = Ax$
- Najdeme vždy Lyapunovovu funkci ve tvaru kvadratické formy
- Uvažme $V = x^T P x$, P je reálná symetrická matice
- Derivace podle trajektorie

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + P A) x$$

- Položíme $A^T P + P A = -Q$, což je tzv. **Lyapunova maticová rovnice**
- a dostaneme

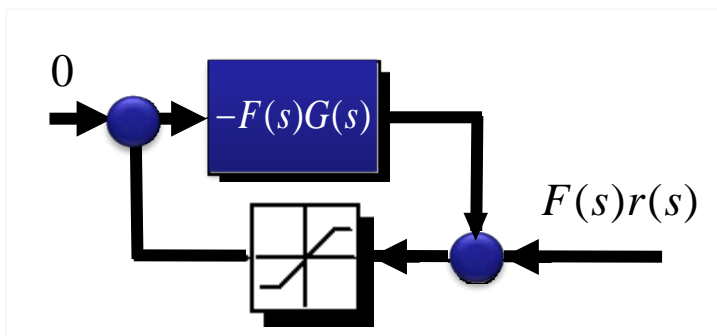
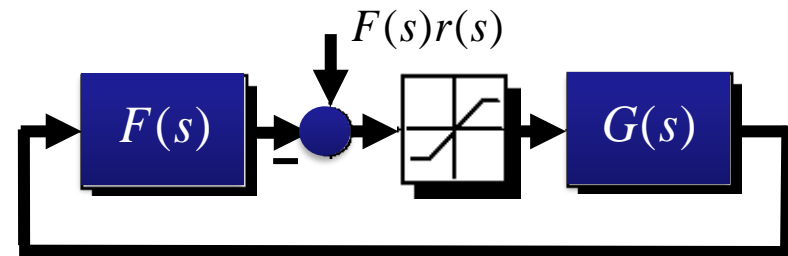
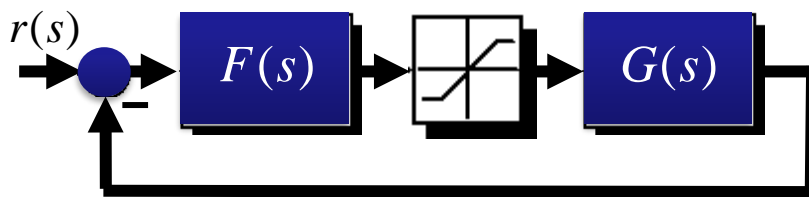
$$\dot{V} = -x^T Q x$$

- Prakticky: Volíme pozitivně definitní Q , vypočteme P a určíme její definitnost
- Je-li P pozitivně definitní, pak je systém asymptoticky stabilní
- Není-li, pak je systém nestabilní



Příklad: příprava na kruhové kritérium

- někdy ZV nelineární systém překreslujme do struktury s nelinearitou ve zpětné vazbě



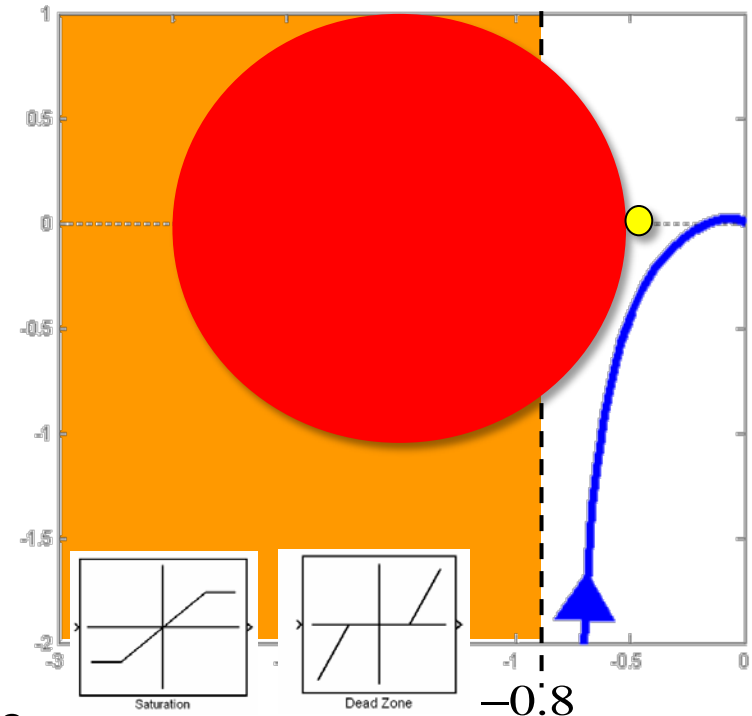


System s přenosem

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

má Nyquistův graf,

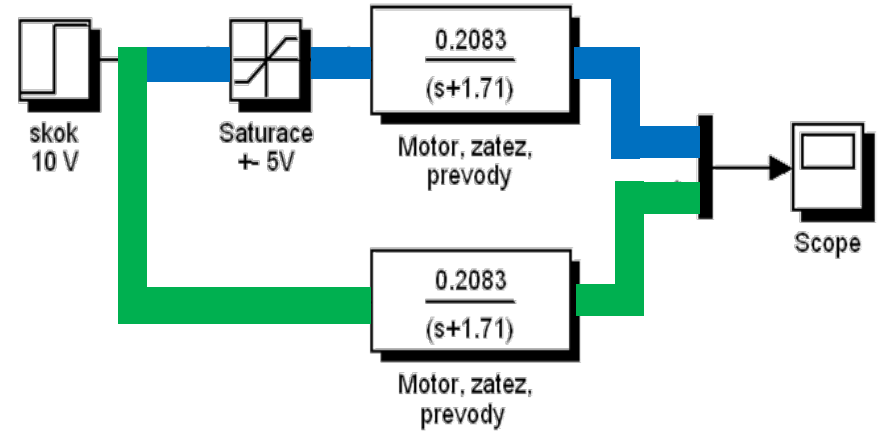
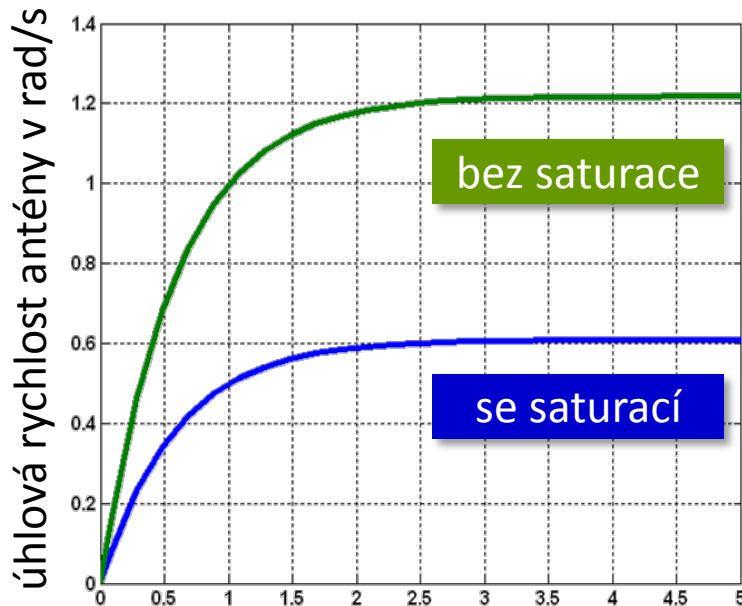
- který leží napravo od svislé přímky v -0.8
- tomu odpovídá „kruh“ ●
- $k_1 = 0$ a $k_2 = 1/0.8 = 1.25$
- systém je tedy stabilní s nelinearitou typu saturace či dead-zone kde směrnice lineární části < 1.25
- jiné vhodné kruhy jsou
 - mezi -2.5 a -0.5 , tj. $k_1 = 0.4$ a $k_2 = 2$ ●
 - mezi -0.5 a -0.3 , tj. $k_1 = 2$ a $k_2 = 3.3$ ●





Příklad statické nelinearity: vliv saturace v aktuátoru

- Řízení motoru otáčejícím anténou
- se saturací v aktuátoru = výkonovém zesilovači
- Zesilovač má zesílení 1, ale také saturaci ± 5 V



Efekt saturace v zesilovači je podle očekávání:

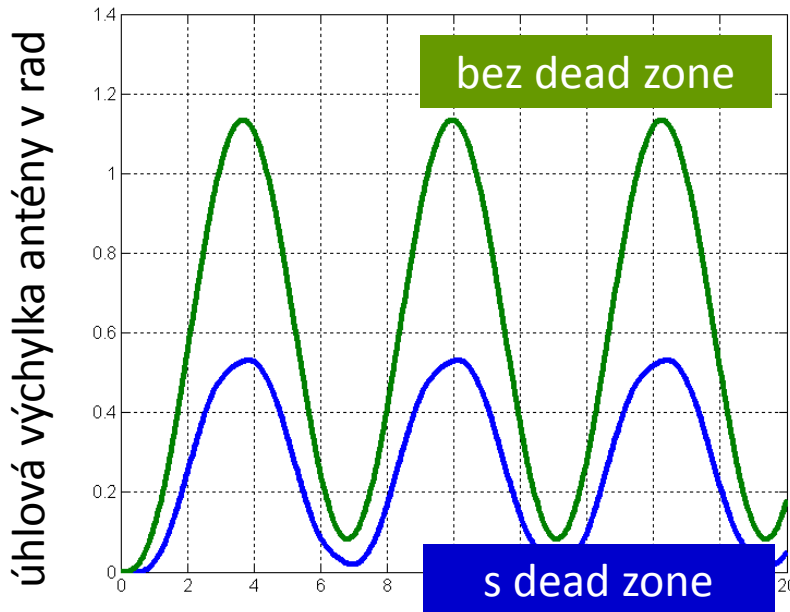
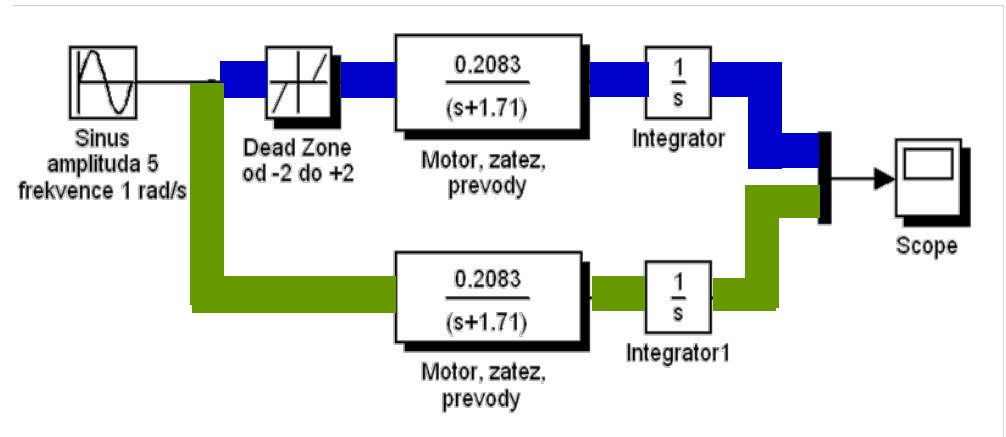
- saturace pouze zmenší skokový signál na vstupu
- a tomu odpovídá výstup



Příklad statické nelinearity: Vliv pásma necitlivosti

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- pásmo necitlivosti
dead zone
- na výstupní hřídeli
- vstupní signály v pásmu od -2 V do +2 V nemají efekt na výstup (neotočí hřídeli)

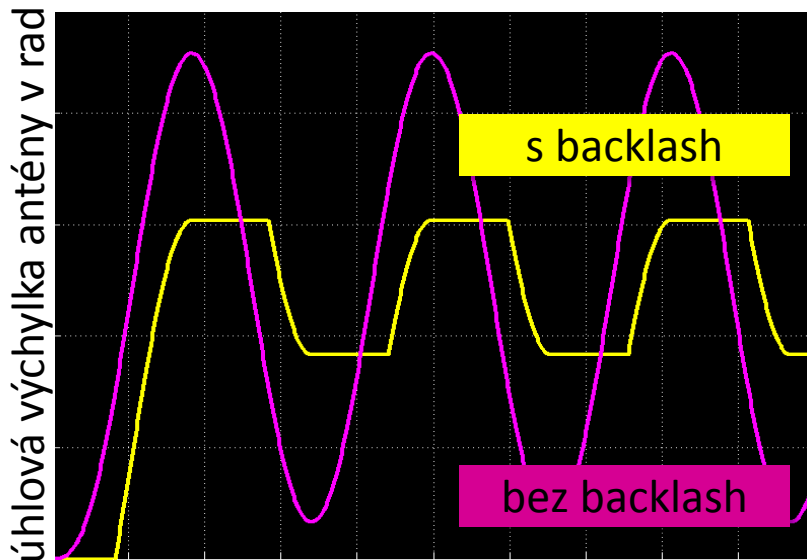
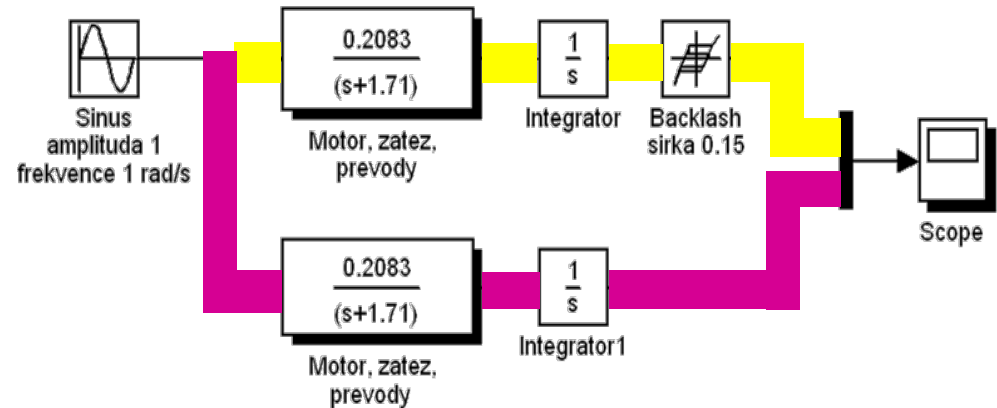


- dobře se projeví při sinusovém vstupním signálu
- hřídel reaguje teprve až vstupní signál překročí práh necitlivosti
- výsledkem je menší amplituda



Příklad statické nelinearity: Vliv mrtvého chodu

- mrtvý chod - backlash
- vůle v ložiscích
- šířka pásma necitlivosti 0.15



- dobře se projeví při sinusovém vstupním signálu
- po změně směru rotace motoru
- zůstane výstupní hřídel na chvíli v klidu
- „dokud ložiska nezaberou opačně“



- Různé nelineární modely v Simulinku
<http://www.hedengren.net/research/models.htm>
- Aplet kreslící fázové portréty
<http://www.bae.ncsu.edu/people/faculty/seaboch/phase/newphase.html>
- Kyvadlo na Wikipedii
[http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics))
- Hezká a čtivá (odborná) kniha o nelineárních systémech a chaosu - [na Amazonu](#)
- Složitější „matematické“ knihy, ale ty jsou spíš až pro magisterský kurz NES, nebo doktorské kurzy

